УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. V

Введение

1. Пусть (E, p, B) — векторное расслоение со флоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot, \cdot)$). На (E, p, B) фиксируем некоторую риманову метрику.

2. Пусть $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\mathfrak{H} \in \operatorname{Hom}(\mathbf{G}, \operatorname{Aut}(E, p, B))$, где через $\operatorname{Hom}(\mathbf{G}, \operatorname{Aut}(E, p, B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), обозначаемую через $\operatorname{Aut}(E, p, B)$. Напомним, что образом $\mathfrak{H}t$ точки $t \in \mathbf{G}$ при гомоморфизме $\mathfrak{H}$ является пара (X^t, χ^t), где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем:

а) $pX^t = \chi^t p$ при всяком $t \in \mathbf{G}$;

б) при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$;

в) $X^{t+s} = X^t X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ при всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$. Вместо X^1 будем писать X, вместо χ^1 — χ.

Потребуем от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, чтобы для некоторой функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, удовлетворяющей при всяких $t \in \mathbf{G}$ равенству

$$a(\chi^t b) = a(b), \tag{1}$$

при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство

$$\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|t|\, a(b)). \tag{2}$$

Так как $(X^t[b])^{-1} = X^{-t}[\chi^t b]$ ($b \in B$, $t \in \mathbf{G}$, то наложенное условие перейдет в эквивалентное, если вместо «при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство (2)» написать: «при всяких*) $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство

$$\max\{\| X^t[b] \|,\ \| (X^t[b])^{-1} \|\} \leqslant \exp(ta(b))». \tag{2$'$}$$

3. Для всякого**) $\theta \in \mathbf{G}_*$ определяется гомоморфизм $\mathfrak{H}_\theta \in \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}, \operatorname{Aut}(E, p, B))$ формулой

$$\mathfrak{H}_\theta s = \mathfrak{H}(s\theta) = (X^{s\theta},\ \chi^{s\theta}) \quad (s \in \mathbf{Z}). \tag{3}$$

Так как по условию при всяком $t \in \mathbf{G}$ выполнено неравенство $\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|t|\, a(b))$, то при всяком $s \in \mathbf{Z}$ выполнено неравенство $\| X^{s\theta}[b] \| \leqslant \exp(|s| \cdot |\theta|\, a(b))$, т. е. гомоморфизм $\mathfrak{H}_\theta$ удовлетворяет условию п. 2 (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)) с функцией $a_\theta(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ (вместо $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$), определенной формулой $a_\theta(b) \underset{\text{def}}{=} |\theta|\, a(b)$ ($b \in B$).

---

*) $\mathbf{G}_*^+ = \mathbf{R}_*^+$, если $\mathbf{G} = \mathbf{R}$; $\mathbf{G}_*^+ = \mathbf{N}$, если $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$; $\mathbf{R}_*^+ (\mathbf{N})$ — множество всех вещественных (целых) чисел > 0.

**) $\mathbf{G}_* = \mathbf{G} \setminus \{0\}$.

4. *Показатель Ляпунова* $\lambda_k(\mathfrak{H}, b)$ *гомоморфизма* $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ определяется при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{H}, b) \underset{\mathrm{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k+1}} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X^t \xi|; \tag{4}$$

здесь $G_i(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие i-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, через $\mathbf{R}_*^i$ обозначается множество всех ненулевых векторов векторного пространства $\mathbf{R}^i$, в выражении $t \to +\infty$ имеется в виду, что $t \in \mathbf{G}$ (напомним, что $\mathbf{G} = \mathbf{R}$ либо $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$), $|\cdot|$ — норма, индуцированная фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B).

В [1] доказана корректность приведенного определения. Там же доказано неравенство $|\lambda_k(\mathfrak{H}, b)| \leqslant a(b)$ при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

5. *Центральный показатель* $\Omega_k(\mathfrak{H}, b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ определяется при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой

$$\Omega_k(\mathfrak{H}, b) \underset{\mathrm{def}}{=}$$
$$\underset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \inf_{\tau \in \mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{5}$$

Смысл некоторых обозначений разъяснен выше после формулы (4); здесь дополнительно поясним, что через X_C^τ обозначается сужение на множество C отображения X^τ. Вместо $X^\tau_{p^{-1}(b)}$ пишем также (это отмечено выше) $X^\tau[b]$. Так как $X^\tau[b] : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$ — линейное отображение, то $X^t \mathbf{R}^{n-k+1}$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(\chi^t b)$. Норма линейного отображения $X^\tau_{\mathbf{R}^i}$ определяется стандартным образом:

$$\|X^\tau_{\mathbf{R}^i}\| \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\xi \in \mathbf{R}_*^i} (|X^\tau \xi| \cdot |\xi|^{-1}).$$

Вместо $\Omega_1(\mathfrak{H}, b)$ пишем также $\Omega(\mathfrak{H}, b)$.

В [2], предложение 7, доказано, что $\Omega_k(\mathfrak{H}, b)$ не изменится, если $\inf\limits_{\tau \in \mathbf{G}_*^+}$ в формуле (5) заменить на $\inf\limits_{\tau \in \theta\mathbf{N}}$, где $\theta \in \mathbf{G}_*^+$ — любое фиксированное; например, верна формула

$$\Omega_k(\mathfrak{H}, b) =$$
$$= \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\| \tag{5$'$}$$
$$(b \in B,\ k \in \{1, \ldots, n\}).$$

6. Положив для всякого $\xi \in E$

$$\lambda(\mathfrak{H}, \xi) \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \dfrac{1}{t} \ln |X^t \xi| & \text{при } |\xi| \neq 0, \\ -\infty & \text{при } |\xi| = 0 \end{cases} \tag{6}$$

(в выражении $t \to +\infty$ имеется в виду, что $t \in \mathbf{G}$), рассмотрим при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ множество

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{H}, b) \underset{\mathrm{def}}{=} \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H}, b) \leq \lambda_k(\mathfrak{H}, b)\}. \tag{7}$$

В [1, § 1] доказано, что $E_{n-k+1}(\mathfrak{H}, b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$.

Для всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ определяется число

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}, b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau} E_{n-k+1}}(\mathfrak{H}, b) \|. \tag{8}$$

В [2, предложение 6] доказано, что $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}, b)$ не изменится, если $\inf\limits_{\tau \in \mathbf{G}_*^+}$ в формуле (8) заменить на $\inf\limits_{\tau \in \theta \mathbf{N}},$ где $\theta \in \mathbf{G}_*^+$ — любое фиксированное; например, верна формула

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}, b) = \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau} E_{n-k+1}}(\mathfrak{H}, b) \|. \tag{8$'$}$$

7. Гомоморфизм*) $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ называется *насыщенным***), если для всякой точки $b \in B$ такой, что $\chi^{\theta} b \neq b$ при всяком $\theta \in \mathbf{G}_*$, для всякой окрестности $W(b)$ точки b (в пространстве B) для всякого базиса $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ (в пространстве E) найдется $\overline{\delta} \in \mathbf{R}_*^+$ такое, что для всякого $\tilde{t} \in \mathbf{N}$ и всяких невырожденных*) линейных операторов

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b) \to p^{-1}(\chi^m b) \quad (m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}),$$

удовлетворяющих при всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ неравенству

$$\| Y_m (X[\chi^{m-1} b])^{-1} - I \| + \| X[\chi^{m-1} b] Y_m^{-1} - I \| < \overline{\delta}, \tag{9}$$

найдется точка $b' \in W(b)$ и для всякого $m \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$ найдется изоморфизм слоев (как евклидовых пространств) $\psi_m : p^{-1}(\chi^m b') \to p^{-1}(\chi^m b)$ причем выполнены следующие требования:

i) $\psi_0^{-1} \xi_i \in U(\xi_i)$ при всяком $i \in \{1, \ldots, n\}$;

ii) при всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
p^{-1}(\chi^{m-1} b') & \xrightarrow[X[\chi^{m-1} b']]{} & p^{-1}(\chi^m b') \\
\downarrow \psi_{m-1} & & \downarrow \psi_m \\
p^{-1}(\chi^{m-1} b') & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}(\chi^m b)
\end{array}$$

коммутативна.

8. Гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ называется *экспоненциально***) *разделенным****) *с индексом* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *в точке* $b \in B$ если выполнена следующая совокупность условий:

i) имеет место строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H}, b) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}, b); \tag{10}$$

---

*) Вместо «гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$» здесь пишем иногда «автоморфизм $(X, \chi) : (E, p, B) \to (E, p, B)$» (удовлетворяющий условию, сформулированному в первой фразе п. 4 введения статьи [3]) или «семейство морфизмов $(X(m), \chi(m)) : (E, p, B) \to \to (E, p, B)$ $(m \in \mathbf{N})$, удовлетворяющее требованиям п. а) — в) §3 [4]».

**) Это есть определение насыщенного семейства морфизмов $(X(m), \chi(m)) : (E, p, B) \to \to (E, p, B)$ $(m \in \mathbf{N})$, понимаемое с уточнением, сформулированным в п. 5 введения статьи [5].

*) То есть имеющих нулевые ядра.

**) Иногда пишется «интегрально» вместо написанного здесь «экспоненциально».

***) Подробнее: экспоненциально разделенным на $\mathbf{G}^+$.

ii) для всякого алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b)\ominus\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ векторного подпространства****) $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют вещественные числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi\in\mathbf{R}^{n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ для всяких*****) $t\in\mathbf{G}^+$, $s\in\mathbf{G}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\cdot|X^s\xi|^{-1}\geqslant|\alpha X^t\eta|\cdot|X^s\eta|^{-1}\exp\ (\beta(t-s)). \tag{11}$$

9. В этом пункте в удобной для дальнейшего изложения форме напоминаются некоторые известные утверждения. Для полноты изложения они приводятся вместе с доказательствами.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть гомоморфизм* $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\ (\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\ (E,\ p,\ B))$ *экспоненциально разделен с индексом* $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *в точке* $b\in B$. *Тогда для всякого алгебраического дополнения* $\mathbf{R}^{n-k}$ *подпространства* $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ *слоя* $p^{-1}(b)$ *имеет место неравенство*******)

$$\inf_{t\in\mathbf{G}^+}\ \inf_{\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k}}\ \inf_{\eta\in(\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b))_*}\measuredangle(X^t\xi,\ X^t\eta)>0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Угол между векторами n-мерного евклидова пространства всегда $\in[0,\ \pi]$. Если $\mathbf{R}^s$ и $\mathbf{R}^q$ — подпространства евклидова пространства, то

$$\inf_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}_*^s}\ \inf_{\mathfrak{y}\in\mathbf{R}_*^q}\measuredangle(\mathfrak{x},\ \mathfrak{y})\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

(поскольку если $\mathfrak{y}\in\mathbf{R}_*^q$, то $-\mathfrak{y}\in\mathbf{R}_*^q$, причем $\measuredangle(\mathfrak{x},\ \mathfrak{y})+\measuredangle(\mathfrak{x},\ -\mathfrak{y})=\pi$, следовательно, один из углов $\measuredangle(\mathfrak{x},\ \mathfrak{y})$, $\measuredangle(\mathfrak{x},\ -\mathfrak{y})$ не превосходит $\pi/2$).

2. Пусть дано $\mathbf{R}^{n-k}=p^{-1}(b)\ominus\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$. По условию найдутся вещественные числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta\in(\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b))_*$ для всяких $t\in\mathbf{G}^+$, $s\in\mathbf{G}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство (11).

Возьмем $T\in\mathbf{G}_*^+$ такое, что

$$\alpha\exp\ (\beta T)\geqslant 2. \tag{12}$$

Возьмем $\delta\in\mathbf{R}_*^+$ такое, что

$$\delta\exp\ (2Ta(b))<1. \tag{13}$$

Предположим, что предложение неверно. Тогда найдутся $t\in\mathbf{G}^+$, $\xi\in X^t\mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta\in X^t(\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b))_*$ такие, что $\sphericalangle(\xi,\ \eta)<\delta$. Без ограничения общности считаем, что $|\xi|=1$, $|\eta|=1$. Имеем

$$|X^T\xi|\underset{(11)}{\geqslant}\alpha\ |X^T\eta|\exp\ (\beta T)\underset{(12)}{\geqslant}2\ |X^T\eta|,$$

поэтому

$$|X^T\xi|-|X^T\eta|\geqslant|X^T\eta|\geqslant\|(X^T[\chi^t b])^{-1}\|^{-1}\overset{(1)}{\underset{(2')}{\geqslant}}\exp\ (-Ta(b))\underset{(13)}{>}$$
$$\underset{(13)}{>}\delta\exp\ (Ta(b))>(\sphericalangle(\xi,\ \eta))\exp\ (Ta(b))\geqslant|\xi-\eta|\exp\ (Ta(b))\overset{(1)}{\underset{(2)}{\geqslant}}$$
$$\overset{(1)}{\underset{(2)}{\geqslant}}|X^T(\xi-\eta)|=|X^T\xi-X^T\eta|,$$

****) Напомним, что если выполнено неравенство (10), то через $\mathbf{R}_0^q(\mathfrak{H},\ b)$ обозначается $E_k(\mathfrak{H},\ b)$, где $E_k(\mathfrak{H},\ b)$ определено формулой (7).

*****) $\mathbf{G}^+=\mathbf{R}^+$, если $\mathbf{G}=\mathbf{R}$; $\mathbf{G}^+=\mathbf{Z}^+=\{0\}\bigcup\mathbf{N}$, если $\mathbf{G}=\mathbf{Z}$.

******) Звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля.

что противоречит неравенству треугольника. Предложение доказано.

Лемма B.1. *Пусть* $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^s \oplus \mathbf{R}^q$ *и пусть в* $\mathbf{R}^n$ *фиксирована евклидова структура. Пусть*

$$\measuredangle(\mathbf{R}^s,\ \mathbf{R}^q) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^s_*} \inf_{\mathfrak{y}\in\mathbf{R}^q_*} \measuredangle(\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}) = \gamma.$$

Тогда $\max\{\|P_s\|,\ \|P_q\|\} \leqslant \operatorname{cosec}\gamma$, где $P_s:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $P_q:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — *проекторы, такие, что* $\operatorname{Im}P_s=\mathbf{R}^s$, $\ker P_s=\mathbf{R}^q$, $\operatorname{Im}P_q=\mathbf{R}^q$, $\ker P_q=\mathbf{R}^s$.

Доказательство. Имеем $P_s+P_q=I$. Пусть $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$. Если $P_s\mathfrak{x}=0$, то $|P_s\mathfrak{x}|=0\leqslant|\mathfrak{x}|\operatorname{cosec}\gamma$. Если $P_q\mathfrak{x}=0$, то $|P_s\mathfrak{x}|=|(I-P_q)\mathfrak{x}|=|\mathfrak{x}|\leqslant|\mathfrak{x}|\operatorname{cosec}\gamma$.

Пусть $P_s\mathfrak{x}\neq0$, $P_q\mathfrak{x}\neq0$. Рассмотрим плоскость $\mathbf{R}^2$, порожденную векторами $P_s\mathfrak{x}$, $P_q\mathfrak{x}$. Эта плоскость наделена евклидовой структурой (поскольку пространство $\mathbf{R}^n$ наделено евклидовой структурой), поэтому для нее можно пользоваться теоремами евклидовой планиметрии. По теореме синусов, примененной к треугольнику с вершинами[*)] $0,\ \mathfrak{x}$, $P_s\mathfrak{x}$, получаем $|P_s\mathfrak{x}|\leqslant|P_s\mathfrak{x}|\operatorname{cosec}\measuredangle(\mathfrak{x},\ P_q\mathfrak{x})=|\mathfrak{x}|\operatorname{cosec}\measuredangle(P_s\mathfrak{x},\ P_q\mathfrak{x})\leqslant|\mathfrak{x}|\operatorname{cosec}\gamma$.

Таким образом доказано, что $|P_s\mathfrak{x}|\leqslant|\mathfrak{x}|\operatorname{cosec}\gamma$ для всякого $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$, т. е. $\|P_s\|\leqslant\operatorname{cosec}\gamma$. Поменяв обозначения $(s\mapsto q,\ q\mapsto s)$, получаем, что $\|P_q\|\leqslant\operatorname{cosec}\gamma$. Лемма B.1 доказана.

Лемма B.2. *Пусть* $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^s \oplus \mathbf{R}^q$ *и пусть в* $\mathbf{R}^n$ *фиксирована евклидова структура. Пусть* $L_s:\mathbf{R}^s\to\mathbf{R}^s$, $L_q:\mathbf{R}^q\to\mathbf{R}^q$ — *линейные операторы. Тогда* $\|L_sP_s+L_qP_q\|\leqslant(\|L_s\|+\|L_q\|)\operatorname{cosec}\gamma$, *где* $\gamma=\measuredangle(\mathbf{R}^s,\ \mathbf{R}^q)\underset{\text{def}}{=}\inf_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^s_*}\inf_{\mathfrak{y}\in\mathbf{R}^q_*}\measuredangle(\mathfrak{x},\ \mathfrak{y})$, *а* $P_s:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $P_q:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — *проекторы, такие, что* $\operatorname{Im}P_s=\mathbf{R}^s$, $K\operatorname{er}P_s=\mathbf{R}^q$, $\operatorname{Im}P_q=\mathbf{R}^q$, $K\operatorname{er}P_q=\mathbf{R}^s$.

Доказательство. $\|L_sP_s+L_qP_q\|\leqslant\|L_s\|\cdot\|P_s\|+\|L_q\|\cdot\|P_q\|\leqslant$ $\leqslant\left(\|L_s\|+\|L_q\|\right)\max\left\{\|P_s\|,\|P_q\|\right\}\leqslant\left(\|L_s\|+\|L_q\|\right)\operatorname{cosec}\gamma$ (последнее неравенство имеет место в силу леммы B.1). Лемма B.2 доказана.

§ 1

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{H}\in\operatorname{Hom}(\mathbf{G},\ \operatorname{Aut}(E,\ p,\ B))$ — *насыщенный гомоморфизм. Тогда в пространстве* B *найдется всюду плотное множество* C *типа* G_δ, *обладающее свойствами:*

а) *для всяких* $b\in C$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеют место равенства*

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b)=\Omega_k(\mathfrak{H},\ b)=\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b). \tag{14}$$

б) *для всяких* $b\in C$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *имеет место альтернатива: либо* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, *либо гомоморфизм* $\mathfrak{H}$ *экспоненциально разделен с индексом* k *в точке* b.

Доказательство. 1. Рассмотрим функции $\mu_k^{(m)}(\cdot):B\to\mathbf{R}$ ($m\in\mathbf{N}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$), определенные в [6]. Воспроизведем их определение:

$$\mu_k^{(m)}(b)\underset{\text{def}}{=}\lim_{q\to\infty}\mu_k^{(m,\ q)}(b),$$

---

*) Говоря о вершинах треугольника, мы подразумеваем, что вектор отождествляется с точкой плоскости. Можно интерпретировать вектор как направленный отрезок с началом в фиксированной точке 0; тогда вектор в первом смысле есть конец вектора во втором смысле.

$$\mu_k^{(m,\,q)}(b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \max_{t\in\{0,\,\ldots,\,q\}} \frac{1}{m+t} \ln \|X_{\mathbf{R}^k}^{m+t}\|. \tag{15}$$

В [6] доказана корректность этого определения, т. е. доказано (лемма 1 и следующая за ее доказательством фраза в статье [6]), что при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$, $m\in\mathbf{N}$ существует $\lim\limits_{q\to\infty}\mu_k^{(m,\,q)}(b)$.

Для всяких $m\in\mathbf{N}$, $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$ обозначим через $C_k^{(m)}$ множество точек непрерывности функции $\mu_k^{(m)}(\cdot):B\to\mathbf{R}$. В [6] доказано (см. доказательство теоремы 3 в [6]), что

$$C \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{k\in\{1,\,\ldots,\,n\}\\ m\in\mathbf{N}}} C_k^{(m)} \tag{16}$$

есть множество типа G_δ, всюду плотное в B.

2. Обозначим через P множество*) периодических точек семейства отображений $\chi^t:B\to B\ (t\in\mathbf{G})$, т. е. положим по определению, что точка b пространства B принадлежит множеству P в том и только в том случае, если найдется $\theta\in\mathbf{G}_*$, для которого $\chi^\theta b=b$. Для всякого $b\in P$ найдется $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ такое, что $\chi^\tau b=b$ (в самом деле, если $\theta\in\mathbf{G}_*\setminus\mathbf{G}_*^+$, $\chi^\theta b=b$, то $\tau\underset{\text{def}}{=}-\theta\in\mathbf{G}_*^+$, $\chi^{-\theta}b=\chi^{-\theta}(\chi^\theta b)=b$, т. е. $\chi^\tau b=b$).

В силу предложения [7] *для всяких* $b\in P$, $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$ *имеют место равенства* $\lambda_k(\mathfrak{H},\,b)=\Omega_k(\mathfrak{H},\,b)=\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\,b)$.

В силу предложений 2, 3 [3] *для всяких* $b\in P$, $k\in\{1,\,\ldots,\,n-1\}$ *имеет место альтернатива: либо* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\,b)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\,b)$, *либо гомоморфизм* $\mathfrak{H}$ *экспоненциально разделен с индексом* k *в точке* b.

3. Пусть $b\in C\setminus P$, где множество C определено формулой (16), а множество P определено в начале п. 2.

В [4] доказано (см. пп. 3 — 6 доказательства теоремы в [4]) утверждение, которое сформулируем здесь следующим образом: *для всякого* $k\in\{1,\,\ldots,\,n-1\}$ *имеет место альтернатива: либо* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H}_1,\,b)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}_1,\,b)$, *либо гомоморфизм* $\mathfrak{H}_1\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\,p,\,B))$ *экспоненциально разделен с индексом* k *в точке* b.

П о я с н е н и я. В [4] вместо «гомоморфизм $\mathfrak{H}_1$» написано «семейство морфизмов $(X(m),\,\chi(m)):(E,\,p,\,B)\to(E,\,p,\,B)$». В силу первых двух сносок к п. 7 введения насыщенность семейства морфизмов $(X(m),\,\chi(m)):(E,\,p,\,B)\to(E,\,p,\,B)$ эквивалентна насыщенности гомоморфизма $\mathfrak{H}$, которая по условию имеет место. В силу определения гомоморфизма $\mathfrak{H}_1$ (см. п. 3 введения) и первых двух сносок к п. 8 введения гомоморфизм $\mathfrak{H}_1\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\,p,\,B))$ экспоненциально разделен с индексом k в точке b в том и только в том случае, если семейство морфизмов $(X(m),\,\chi(m)):(E,\,p,\,B)\to(E,\,p,\,B)$ интегрально разделено с индексом k в точке b. Из этих пояснений следует, что сформулированное перед ними утверждение в самом деле эквивалентно утверждению, доказанному в пп. 3 — 6 доказательства теоремы [4].

В силу леммы 3 [1] равенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H}_1,\,b)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}_1,\,b)$ эквивалентно равенству $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\,b)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\,b)$, а в силу леммы 6 [1], для того чтобы гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\,p,\,B))$ был экспоненциально разделен с индексом $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ в

---

*) Множество P, как и множества C, $C_k^{(m)}$ и функции $\mu_k^{(m)}$, $\mu_k^{(m,\,q)}$, определенные в п. 1, зависят от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, но для краткости эта зависимость не отражена в обозначениях.

точке b, необходимо и достаточно, чтобы гомоморфизм $\mathfrak{H}_1 \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ был экспоненциально разделен с индексом k в точке b.

Поэтому из сформулированного в этом пункте утверждения из [4] вытекает следующее утверждение: *для всяких* $b \in C \setminus P$ $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$ *имеет место альтернатива: либо* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) = \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, *либо гомоморфизм* $\mathfrak{H}$ *экспоненциально разделен с индексом* k *в точке* b.

4. Объединим утверждения пп. 1 — 3:

1) множество C, *определенное формулой (16), есть множество типа* G_δ, *всюду плотное в* B;

2) а) для всяких $b \in P$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ *имеют место равенства* $\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) = \Omega_k(\mathfrak{H},\ b) = \Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b)$;

б) для всяких $b \in C$, $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$ *имеет место альтернатива: либо* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) = \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, *либо гомоморфизм* $\mathfrak{H}$ *экспоненциально разделен с индексом* k *в точке* b.

5. Предположим, что найдутся*) $b_0 \in C$, $q \in \{1,\ \dots,\ n\}$ такие, что

$$\lambda_q(\mathfrak{H},\ b_0) \neq \Omega^{(q)}(\mathfrak{H},\ b_0). \tag{17}$$

Тогда в силу утверждения 2а) п. 4 имеем $b_0 \in C \setminus P$.

Так как в силу предложений 2, 5 [2] имеет место неравенство $\lambda_q(\mathfrak{H},\ b_0) \leqslant \Omega^{(q)}(\mathfrak{H},\ b_0)$, то из (17) следует строгое неравенство $\lambda_q(\mathfrak{H},\ b_0) < \ < \Omega^{(q)}(\mathfrak{H},\ b_0)$. В [8] (см. доказательство теоремы в [8]) доказано, что для всякого $b \in C$ имеет место равенство $\lambda_1(\mathfrak{H},\ b) = \Omega^{(1)}(\mathfrak{H},\ b)$. Поэтому если найдутся $b_0 \in C$, $q \in \{1,\ \dots,\ n\}$, для которых выполнено неравенство (17), то найдутся и $b_0 \in C \setminus P$, $q \in \{2,\ \dots,\ n\}$ такие, что имеет место равенство

$$\lambda_1(\mathfrak{H},\ b_0) = \Omega^{(1)}(\mathfrak{H},\ b_0), \tag{18}$$

но для некоторого $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$ $(k = n - q + 1)$ выполнено неравенство

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b_0) < \Omega^{(n-k+1)}(\mathfrak{H},\ b_0). \tag{19}$$

а) Обозначим через k_0 наибольшее из тех $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$, для которых имеет место строгое неравенство (19). Тогда, во-первых, $\lambda_{n-k_0}(\mathfrak{H},\ b_0) \geqslant \Omega^{(n-k_0)}(\mathfrak{H},\ b_0),$, откуда в силу предложений 2, 5 [2] следует равенство

$$\lambda_{n-k_0}(\mathfrak{H},\ b_0) = \Omega^{(n-k_0)}(\mathfrak{H},\ b_0), \tag{20}$$

и, во-вторых,

$$\lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H},\ b_0) < \Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H},\ b_0). \tag{21}$$

Если бы выполнялось равенство

$$\lambda_{n-k_0}(\mathfrak{H},\ b_0) = \lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H},\ b_0), \tag{22}$$

то в силу формулы (7) выполнялось бы равенство $E_{k_0+1}(\mathfrak{H},\ b_0) = E_{k_0}(\mathfrak{H},\ b_0)$, из которого в силу формулы (8) следует равенство

$$\Omega^{(n-k_0)}(\mathfrak{H},\ b_0) = \Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H},\ b_0); \tag{23}$$

из формул (20), (22), (23) вытекает равенство $\lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H},\ b_0) = \Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H},\ b_0)$, противоречащее неравенству (21).

*) Множество C определено формулой (16).

Следовательно, $\lambda_{n-k_0}(\mathfrak{H},\ b_0) \neq \lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H},\ b_0)$ а так как $\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) \geqslant \lambda_{k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ для всяких $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, то

$$\lambda_{n-k_0}(\mathfrak{H},\ b_0) > \lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H},\ b_0). \tag{24}$$

Из неравенства (24) в силу утверждения 2б) п. 4 следует, что гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом k_0 в точке b_0. Следовательно, в силу леммы 6 [I] *гомоморфизм* $\mathfrak{H}_1$ *экспоненциально разделен с индексом* k_0 *в точке* b_0.

б) В силу леммы 3 [1] имеет место равенство

$$\lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H},\ b_0) = \lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H}_1,\ b_0). \tag{25}$$

В силу предложения 6 [2] имеет место равенство

$$\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H},\ b_0) = \Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0). \tag{26}$$

Из (21), (25), (26) следует строгое неравенство

$$\lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) < \Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0). \tag{27}$$

В силу леммы 2 [1] (см. замечание, приведенное в [1] после доказательства леммы 2) число $\lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$ совпадает с числом $\lambda_{n-k_0+1}(b_0)$, определенным по семейству морфизмов

$$(X(m),\ \chi(m)) \underset{\text{def}}{=} \mathfrak{H}m \underset{(3)}{=} \mathfrak{H}_1 m \quad (m \in \mathbf{N})$$

векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ в [6, с. 1408]. Следовательно, в силу леммы 5 [6] имеет место равенство

$$\lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) = \mu_{k_0}(b_0), \tag{28}$$

где

$$\mu_{k_0}(b_0) = \lim_{m\to\infty} \mu_{k_0}^{(m)}(b_0) \tag{29}$$

(см. в [6] формулу (6) и предшествующий ей текст, где доказано, что предел в формуле (29) существует).

Из (27) следует, что

$$\rho_0 \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{3}(\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) - \lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)) > 0. \tag{30}$$

Зафиксируем какое-нибудь $m_0 \in \mathbf{N}$, для которого

$$\mu_{k_0}^{(m_0)}(b_0) < \mu_{k_0}(b_0) + \rho_0; \tag{31}$$

существование такого $m_0 \in \mathbf{N}$ вытекает из формулы (29), так как $\rho_0 \underset{(30)}{>} 0$. Из (28), (31) следует неравенство

$$\mu_{k_0}^{(m_0)}(b_0) < \lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) + \rho_0. \tag{32}$$

Функция $\mu_{k_0}^{(m_0)}(\cdot) : B \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке b_0 (поскольку $b_0 \in C$, а во всякой точке множества C всякая функция $\mu_k^{(m)}(\cdot) : B \to \mathbf{R}$ ($m \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$) непрерывна (см. определение множества C в п. 1)); поэтому найдется окрестность $W(b_0)$ точки b_0 (в пространстве) B такая, что для всякого $b \in W(b_0)$ имеет место неравенство

$$\mu_{k_0}^{(m_0)}(b) < \mu_{k_0}^{(m_0)}(b_0) + \rho_0. \tag{33}$$

Для всякого $b \in W(b_0)$ имеем

$$\mu_{k_0}^{(m_0)}(b) \underset{(33)}{<} \mu_{k_0}^{(m_0)}(b_0) + \rho_0 \underset{(32)}{<} \lambda_{n-k_0+1}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) + 2\rho_0 \underset{(30)}{=} \Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) - \rho_0.$$

Подведем итог этого подпункта. В нем доказано, что *существуют* $\rho_0 \in \mathbf{R}_*^+$, $m_0 \in \mathbf{N}$ *и окрестность* $W(b_0)$ *точки* b_0 (*в пространстве* B) *такие, что для всякого* $b \in W(b_0)$ *выполнено неравенство*

$$\mu_{k_0}^{(m_0)}(b) < \Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) - \rho_0. \tag{34}$$

Фиксируем $\rho_0 \in \mathbf{R}_*^+$, $m_0 \in \mathbf{N}$ и окрестность $W(b_0)$ точки b_0, обладающие сформулированным в предыдущей фразе свойством.

в) Так как $b_0 \notin P$ (множество P определено в п. 2), а $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ по условию — *насыщенный* гомоморфизм, то в силу определения насыщенного гомоморфизма, приведенного в п. 7 введения, для окрестности $W(b_0)$ точки b_0, зафиксированной в конце подпункта б), *найдется вещественное число* $\delta_0 > 0$ *такое, что для всякого* $t \in \mathbf{N}$ *и всяких невырожденных линейных операторов*

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0) \ \ (m \in \{1,\ \ldots,\ t\}),$$

удовлетворяющих при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ t\}$ *неравенству*

$$\| Y_m (X[\chi^{m-1}b_0])^{-1} - I \| + \| X[\chi^{m-1}b_0] Y_m^{-1} - I \| < \delta_0, \tag{35}$$

найдутся точка $b \in W(b_0)$ *и изоморфизмы слоев* (*как евклидовых пространств*) $\psi_m : p^{-1}(\chi^m b) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ $m \in \{0,\ \ldots,\ t\}$ *такие, что при всяком* $m \in \{1,\ \ldots,\ t\}$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\chi^{m-1}b) & \xrightarrow[X[\chi^{m-1}b]]{} & p^{-1}(\chi^m b) \\ \downarrow \psi_{m-1} & & \downarrow \psi_m \\ p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}(\chi^m b_0) \end{array} \tag{36}$$

коммутативна.

Фиксируем число $\delta_0 \in (0,\ \pi)$, обладающее сформулированным в предыдущей фразе свойством.

г) Фиксируем произвольное $\mathbf{R}^{n-k_0} = p^{-1}(b_0) \ominus \mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$ (алгебраическое дополнение подпространства $\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) \underset{\mathrm{def}}{=} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$ в слое $p^{-1}(b_0)$).

Так как гомоморфизм $\mathfrak{H}_1$ экспоненциально разделен с индексом k_0 в точке b_0 (см. последнюю фразу подпункта а)), то (см. п. 8 введения) существуют $\alpha_0 \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta_0 \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k_0}$, $\eta \in (\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_* = E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*$ для всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$| X^t \xi | \cdot | X^s \xi |^{-1} \geqslant \alpha_0 | X^t \eta | \cdot | X^s \eta |^{-1} \exp(\beta_0 (t-s)).$$

Так как гомоморфизм $\mathfrak{H}_1$ экспоненциально разделен с индексом k_0 в точке b_0, то в силу предложения п. 9 введения имеет место строгое неравенство

$$\begin{aligned} \gamma_0 &\underset{\mathrm{def}}{=} \inf_{t \in \mathbf{Z}^+} \measuredangle (X^t \mathbf{R}^{n-k_0},\ X^t \mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)) \underset{\mathrm{def}}{=} \\ &\underset{\mathrm{def*}}{=} \inf_{t \in \mathbf{Z}^+} \inf_{\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k_0}} \inf_{\eta \in (\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*} (X^t \xi,\ X^t \eta) > 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Фиксируем $\overline{q} \in \mathbf{N}$ такое, что имеют место неравенства

$$\alpha_0 \exp(\beta_0 \overline{q}) \geqslant 1, \tag{37$'$}$$

$$\frac{1}{2} \sin \gamma_0 \geqslant \exp\left(-\frac{1}{8} \rho_0 \overline{q} \right). \tag{37$''$}$$

Положим
$$\delta_1 \underset{\text{def}}{=} \delta_0 \sin\gamma_0. \tag{38}$$
Так как $\gamma_0 \leqslant \pi/2$ (это, впрочем, очевидное утверждение доказано в п. 1 доказательства предложения п. 9 введения) и $\gamma_0 > 0$, то $\sin\gamma_0 > 0$, поэтому (так как $\delta_0 \in (0,\pi)$)
$$\delta_1 \in (0,\pi). \tag{39}$$
д) Фиксируем какое-нибудь натуральное число $m_1 > m_0$, удовлетворяющее неравенствам
$$m_1 > \overline{q}, \quad \exp\left(\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right) \geqslant \left(\sin\frac{\delta_1}{2}\right)^{-2} \tag{40}$$
(такое m_1 существует, так как $\sin\frac{\delta_1}{2} \underset{(39)}{\neq} 0$).

Фиксируем какое-нибудь натуральное число $l_0 > 1$, удовлетворяющее неравенству
$$\rho_0 l_0 \geqslant 8a(b_0). \tag{41}$$
Положим
$$s_0 \underset{\text{def}}{=} l_0 m_1. \tag{42}$$
е) Имеем
$$\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) \underset{(8)}{=}$$
$$\underset{(8)}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)} \|. \tag{43}$$
Так как $s_0 \underset{(42)}{\in} \mathbf{N}$, то
$$\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) \underset{(43)}{\leqslant} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{ms_0}\sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{s_0}_{X^{js_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)} \|,$$
откуда следует, что *существует натуральное число* $t_0 > 1$ *такое, что*
$$\frac{1}{t_0 s_0}\sum_{j=0}^{t_0-1} \ln \| X^{s_0}_{X^{js_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)} \| > \Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) - \frac{1}{8}\rho_0. \tag{44}$$
Фиксируем какое-нибудь натуральное $t_0 > 1$, удовлетворяющее неравенству (44).

ж) Положим
$$Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1} b_0] \tag{45}$$
при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ s_0 - 1\}$.

з) При всяком $m \in \mathbf{N}$ фиксируем какой-нибудь вектор*)
$$\xi^{(m)} \in (X^{(m-1)s_0} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*, \tag{46}$$
удовлетворяющий уравнению
$$|X^{s_0}\xi^{(m)}| = \| X^{s_0}_{X^{(m-1)s_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)} \| \cdot |\xi^{(m)}|. \tag{47}$$
Определим по индукции невырожденные линейные операторы $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ для всех $m \in \{1,\ \ldots,\ t_0 s_0 - 1\}$.

---

*) Звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля.

При всех $m \in \{1,\ \ldots,\ s_0 - 1\}$ эти операторы определены формулой (45); для них при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ s_0 - 1\}$ имеют место равенства

$$Y_m \ldots Y_1 |_{\mathbf{R}^{n-k_0}} \underset{(45)}{=} X^m_{\mathbf{R}^{n-k_0}}, \tag{48}$$

$$Y_m \ldots Y_1 E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) \underset{(45)}{=} X^m E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0). \tag{49}$$

Это — начало индукции.

Допустим, что при всех $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0 - 1\}$, где $r \in \{1,\ \ldots,\ t_0 - 1\}$, определены невырожденные линейные операторы $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$, удовлетворяющие при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0 - 1\}$ равенствам (48), (49).

Определим тогда линейные операторы $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ ($m \in \{rs_0,\ \ldots,\ (r+1)s_0 - 1\}$) (стало быть, построение операторов Y_m ведется индукцией по r) следующим образом.

Так как по индуктивному предположению формула (49) имеет место при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0 - 1\}$, то

$$XY_{rs_0 - 1} \ldots Y_1 E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) \underset{(49)}{=} X^{rs_0} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0), \tag{50}$$

поэтому

$$\xi_{r+1} \underset{\text{def}}{=} XY_{rs_0 - 1} \ldots Y_1 \xi^{(1)} \underset{(48)}{\in} (X^{rs_0} E_{s_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*. \tag{51}$$

Кроме того,

$$\xi^{(r+1)} \underset{(46)}{\in} (X^{rs_0} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*. \tag{52}$$

Если для всякого $s \in \{1,\ \ldots,\ l_0 - 1\}$ имеет место неравенство $|X^{sm_1} \xi_{r+1}| \cdot | X^{(s-1)m_1} \xi_{r+1}|^{-1} > |X^{sm_1} \xi^{(r+1)}| \cdot | X^{(s-1)m_1} \xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right)$,

то положим

$$Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1} b_0] \tag{53}$$

при всяком $m \in \{rs_0,\ \ldots,\ (r+1)s_0 - 1\}$, и тогда равенства (48), (49), будучи, согласно индуктивному предположению, верными при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0 - 1\}$, будут верны и при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ (r+1)s_0 - 1\}$.

Если найдется $s \in \{1,\ \ldots,\ l_0 - 1\}$, для которого имеет место неравенство

$$|X^{sm_1} \xi_{r+1}| \cdot | X^{(s-1)m_1} \xi_{r+1}|^{-1} \leqslant |X^{sm_1} \xi^{(r+1)}| \cdot | X^{(s-1)m_1} \xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right), \tag{54}$$

то, обозначив через $\overline{s}$ наименьшее из чисел $s \in \{1,\ \ldots,\ l_0 - 1\}$, удовлетворяющих неравенству (54), определим операторы Y_m $m \in \{rs_0,\ \ldots,\ (r+1)s_0 - 1\}$ следующим образом.

α) Если $\overline{s} > 1$, то положим

$$Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1} b_0] \tag{55}$$

при всяком $m \in \{rs_0,\ \ldots,\ rs_0 + (\overline{s} - 1)m_1 - 1\}$, и тогда равенства (48), (49), будучи, согласно индуктивному предположению, верными при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0 - 1\}$, будут верны и при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0 + (\overline{s} - 1)m_1 - 1\}$.

Если $\bar{s}=1$, то переходим к подпункту β), отметив предварительно, что справедливость равенств (48), (49) при всяком $m\in\{1,\ \ldots,\ rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1\}$ в случае $\bar{s}=1$ имеет место согласно индуктивному предположению.

β) Положим

$$Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} \underset{\text{def}}{=} Z_r^{(1)} X[\chi^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1} b_0], \tag{56}$$

где $Z_r^{(1)}: p^{-1}(\chi^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} b_0) \to p^{-1}(\chi^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} b_0)$ — линейный оператор, определенный следующими условиями:

i) сужение линейного оператора $Z_r^{(1)}$ на подпространство $X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}\mathbf{R}^{n-k_0}$ (напомним, что $\mathbf{R}^{n-k_0}$ определено в подпункте г)) есть единичный оператор; *ii*) сужение

$$Z_{r,\,0}^{(1)}: X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) \to X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$$

линейного оператора $Z_r^{(1)}$ на подпространство $X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$ определено условиями:

ii.1) если вектор ξ_{r+1} коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то $Z_{r,\,0}^{(1)}$ — единичный оператор, а если эти векторы не коллинеарны, то сужение линейного оператора $Z_{r,\,0}^{(1)}$ на плоскость, порожденную двумя векторами $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, есть поворот этой плоскости на угол $\frac{1}{2}\delta_1$ в направлении от вектора $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$ к вектору, $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$ если угол между этими векторами $>\frac{1}{2}\delta_1$ (слова «в направлении от вектора ξ к вектору η» означают в данном контексте, что в разложении образа вектора ξ по базису $\{\xi,\ \eta\}$ коэффициент при векторе η положителен) и есть поворот этой плоскости, переводящий вектор $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$ в вектор

$$|\,X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}\,|\cdot|\,X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}\,|^{-1}\ X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)},$$

если угол между этими векторами $\leqslant\frac{1}{2}\delta_1$;

ii.2) если вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то сужение линейного оператора $Z_{r,\,0}^{(1)}$ на ортогональное дополнение в пространстве $X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$ плоскости, порожденной двумя векторами $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, есть единичный оператор.

Корректность этого определения оператора $Z_r^{(1)}$ следует из формул (51), (52).

Из определения оператора $Z_r^{(1)}$ следует равенство

$$Z_r^{(1)} X_{\mathbf{R}^{n-k_0}}^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} = X_{\mathbf{R}^{n-k_0}}^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}. \tag{57}$$

Из определения оператора $Z_r^{(1)}$ в силу формул (51), (52) следует равенство

$$Z_r^{(1)} X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) = X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0). \tag{58}$$

Из (55), (56) следует равенство

$$Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}\ldots Y_{rs_0} = Z_r^{(1)} X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}[\chi^{rs_0-1} b_0]. \tag{59}$$

При всяком $m\in\{1,\ \ldots,\ rs_0-1\}$ в силу индуктивного предположения имеют место формулы (48), (49), в частности,

$$Y_{rs_0-1}\ldots Y_1|_{\mathbf{R}^{n-k_0}} = X^{rs_0-1}_{\mathbf{R}^{n-k_0}}, \tag{60}$$

$$Y_{rs_0-1}\ldots Y_1 E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) = X^{rs_0-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0). \tag{61}$$

Имеем

$$\begin{gathered} Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}\ldots Y_1|_{\mathbf{R}^{n-k_0}} \underset{(60)}{\overset{(59)}{=}} \\ \underset{(60)}{\overset{(59)}{=}} Z_r^{(1)} X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}_{\mathbf{R}^{n-k_0}} \underset{(57)}{=} X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}_{\mathbf{R}^{n-k_0}}, \end{gathered} \tag{62}$$

$$\begin{gathered} Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}\ldots Y_1 E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) \underset{(61)}{\overset{(59)}{=}} \\ \underset{(60)}{\overset{(59)}{=}} Z_r^{(1)} X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) \underset{(58)}{=} \\ \underset{(58)}{=} X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0). \end{gathered} \tag{63}$$

Из (62), (63) следует, что равенства (48), (49), будучи верными при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1\}$ (см. подпункт α)), верны и при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0+(\bar{s}-1)m_1\}$.

γ) Положим

$$Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1}b_0] \tag{64}$$

при всяком $m \in \{rs_0+(\bar{s}-1)m_1+1,\ \ldots,\ rs_0+\bar{s}m_1-1\}$ (напомним, что по определению $m_1>1$). Тогда равенства (48), (49), будучи верными при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0+(\bar{s}-1)m_1\}$, верны и при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ rs_0+\bar{s}m_1-1\}$.

δ) Положим

$$Y_{rs_0+\bar{s}m_1} \underset{\text{def}}{=} Z_r^{(2)} X[\chi^{rs_0+\bar{s}m_1-1}b_0], \tag{65}$$

где $Z_r^{(2)} : p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0) \to p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0)$ — линейный оператор, определенный следующими условиями:

i) сужение линейного оператора $Z_r^{(2)}$ на подпространство $X^{rs_0+\bar{s}m_1}\mathbf{R}^{n-k_0}$ (напомним, что $\mathbf{R}^{n-k_0}$ определено в подпункте г)) есть единичный оператор;

ii) сужение $Z_{r,\,0}^{(2)}$ линейного оператора $Z_r^{(2)}$ на подпространство $X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$ определено условиями: если два вектора

$$XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\ldots Y_{rs_0}X^{-1}\xi_{r+1},\ X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)} \tag{66}$$

коллинеарны, то $Z_{r,\,0}^{(2)}$ — единичный оператор; если эти два вектора не коллинеарны, то сужение оператора $Z_{r,\,0}^{(2)}$ на плоскость, порожденную этими двумя векторами, есть поворот этой плоскости, переводящий первый из векторов (66) в вектор $\sigma_r X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}$, где $\sigma_r \in \mathbf{R}_*^+$, а сужение оператора $Z_{r,\,0}^{(2)}$ на ортогональное дополнение этой плоскости есть единичный оператор.

В каждом из этих двух случаев (т. е. независимо от того, коллинеарны два вектора (66) или нет) имеем

$$Y_{rs_0+\bar{s}m_1}\dots Y_1\xi^{(1)}\underset{(65)}{=}Z_r^{(2)}XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\dots Y_1\xi^{(1)}= \\ =\sigma_r X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}, \tag{67}$$

где $\sigma_r\in\mathbf{R}_*$. Оба вектора (66) содержатся в подпространстве $X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$:

$$XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\dots Y_{rs_0}X^{-1}\xi_{r+1}\underset{(51)}{=}XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\dots Y_1\xi^{(1)}\underset{(46)}{\in}$$

$$\underset{(46)}{\in}XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\dots Y_1E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)\underset{(63)}{=}$$

$$\underset{(63)}{=}XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\dots Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1+1}X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)=$$

$$\underset{(64)}{=}X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0),$$

$$X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}\underset{(46)}{\in}X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0),$$

поэтому определение оператора $Z_r^{(2)}$ корректно и из условия *ii*), наложенного в определении оператора $Z_r^{(2)}$, следует равенство

$$Z_r^{(2)}X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)=X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0). \tag{68}$$

Из условия *i*), наложенного в определении оператора $Z_r^{(2)}$, следует равенство

$$Z_r^{(2)}X_{\mathbf{R}^{n-k_0}}^{rs_0+\bar{s}m_1}=X_{\mathbf{R}^{n-k_0}}^{rs_0+\bar{s}m_1}. \tag{69}$$

Имеем

$$Y_{rs_0+\bar{s}m_1}\dots Y_1= \\ =Y_{rs_0+\bar{s}m_1}Y_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\dots Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1+1}Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}\dots Y_1= \\ \overset{(64)}{\underset{(65)}{=}}Z_r^{(2)}X^{m_1}Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}\dots Y, \tag{70}$$

$$Y_{rs_0+\bar{s}m_1}\dots Y_1\big|_{\mathbf{R}^{n-k_0}}\overset{(62)}{\underset{(70)}{=}}Z_r^{(2)}X_{\mathbf{R}^{n-k_0}}^{rs_0+\bar{s}m_1}\underset{(69)}{=}X_{\mathbf{R}^{n-k_0}}^{rs_0+\bar{s}m_1}, \tag{71}$$

$$Y_{rs_0+\bar{s}m_1}\dots Y_1E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)\overset{(63)}{\underset{(70)}{=}}Z_r^{(2)}X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)= \\ \underset{(68)}{=}X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0). \tag{72}$$

Формулы (71), (72) означают, что равенства (48), (49), будучи верными при всяком $m\in\{1,\ \dots,\ rs_0+\bar{s}m_1-1\}$ (см. подпункт γ)), верны и при всяком $m\in\{1,\ \dots,\ rs_0+\bar{s}m_1\}$.

e) Положим

$$Y_m\underset{\text{def}}{=}X[\chi^{m-1}b_0] \tag{73}$$

при всяком $m\in\{rs_0+\bar{s}m_1+1,\ \dots,\ (r+1)s_0-1\}$. Тогда равенства (48), (49), будучи верными при всяком $m\in\{1,\ \dots,\ rs_0+\bar{s}m_1\}$, верны и при всяком $m\in\{1,\ \dots,\ (r+1)s_0-1\}$.

Так как линейный оператор $X[b]:p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi b)$ невырожден (при всяком $b\in B$) и линейные операторы $Z_r^{(1)}$, $Z_r^{(2)}$ невырожденные (как это следует непосредственно из их определений), то линейные операторы $Y_m:p^{-1}(\chi^{m-1}b_0)\to p^{-1}(\chi^m b_0)$ $(m\in\{rs_0,\ \dots,\ (r+1)s_0-1\})$ невырожденные.

Начало индукции и шаг индукции по $r\in\{1,\ \dots,\ t_0-1\}$ полностью описаны.

Тем самым по индукции определены невырожденные линейные операторы $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ для всех $m \in \{1,\ \ldots,\ t_0s_0-1\}$, причем для этих операторов при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ t_0s_0-1\}$ имеют место равенства (48), (49).

и) Наконец, положим

$$Y_{t_0s_0} \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{t_0s_0-1}b_0]. \tag{74}$$

Из формулы (74) следует, что линейный оператор $Y_{t_0s_0} : p^{-1}(\chi^{t_0s_0-1}b_0) \to p^{-1}(\chi^{t_0s_0}b_0)$ невырожденный, а равенства (48), (49), будучи верными при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ t_0s_0-1\}$, верны и при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ t_0s_0\}$.

к) *Линейный оператор* $Z_r^{(1)}$, *определенный фразой, содержащей формулу* (*56*), *удовлетворяет неравенству*

$$\|Z_r^{(1)} - I\| + \|(Z_r^{(1)})^{-1} - I\| < \delta_0. \tag{75}$$

Докажем это. В силу определения оператора $Z_r^{(1)}$ он может быть записан формулой

$$Z_r^{(1)} = P_{n-k_0}^{(\overline{s})} + Z_{r,\ 0}^{(1)} P_{k_0}^{(\overline{s})}, \tag{76}$$

где

$$P_{n-k_0}^{(\overline{s})} : p^{-1}(\chi^{rs_0+(\overline{s}-1)m_1}b_0) \to p^{-1}(\chi^{rs_0+(\overline{s}-1)m_1}b_0),$$

$$P_{k_0}^{(\overline{s})} : p^{-1}(\chi^{rs_0+(\overline{s}-1)m_1}b_0) \to p^{-1}(\chi^{rs_0+(\overline{s}-1)m_1}b_0)$$

— проекторы, такие, что

$$\operatorname{Im} P_{n-k_0}^{(\overline{s})} = X^{rs_0+(\overline{s}-1)m_1}\mathbf{R}^{n-k_0},$$

$$\operatorname{Ker} P_{n-k_0}^{(\overline{s})} = X^{rs_0+(\overline{s}-1)m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0),$$

$$\operatorname{Im} P_{k_0}^{(\overline{s})} = X^{rs_0+(\overline{s}-1)m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0),$$

$$\operatorname{Ker} P_{k_0}^{(\overline{s})} = X^{rs_0+(\overline{s}-1)m_1}\mathbf{R}^{n-k_0}.$$

Для так определенных проекторов имеет место равенство

$$I = P_{n-k_0}^{(\overline{s})} + P_{k_0}^{(\overline{s})} \tag{77}$$

(это хорошо известно и легко доказывается).

Из условия *ii*) определения оператора $Z_r^{(1)}$ следуют неравенства

$$\|Z_{r,\ 0}^{(1)} - I\| < \frac{1}{2}\delta_1, \tag{78}$$

$$\|(Z_{r,\ 0}^{(1)})^{-1} - I\| < \frac{1}{2}\delta_1; \tag{79}$$

это тоже хорошо известно и легко доказывается, а впрочем, доказательство этого утверждения изложено в подпункте з) пункта 3 доказательства теоремы в [8].

Из (76), (77) следует равенство*) $Z_r^{(1)} - I = (Z_{r,\ 0}^{(1)} - I)P_{k_0}^{(\overline{s})}$, из которого в силу леммы B.2, примененной в случае, когда один из операторов L_s, L_q равен нулю, и формулы (37) (напомним, что $\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b) \underset{\text{def}}{=} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b)$) следует неравенство

$$\|Z_r^{(1)} - I\| \leqslant \|Z_{r,\ 0}^{(1)} - I\| \operatorname{cosec}\gamma_0 \underset{(78)}{<} \frac{1}{2}\delta_1 \operatorname{cosec}\gamma_0. \tag{80}$$

---

*) I — универсальное обозначение для единичного оператора. Этой буквой в одной и той же формуле могут обозначаться тождественные отображения разных множеств.

Так как $Z_{r,\,0}^{(1)}: X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)\to X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$ — невырожденный линейный оператор, то

$$(Z_r^{(1)})^{-1}\underset{(77)}{\overset{(76)}{=}}P_{n-k_0}^{(\bar{s})}+(Z_{r,\,0}^{(1)})^{-1}P_{k_0}^{(\bar{s})}. \tag{81}$$

Из (77), (81) следует равенство $(Z_r^{(1)})^{-1}-I=((Z_{r,\,0}^{(1)})^{-1}-I)P_{k_0}^{(\bar{s})}$, из которого в силу леммы В.2, примененной в случае, когда один из операторов L_s, L_q равен нулю, и формулы (37) (напомним, что $\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b)=E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b)$) следует неравенство

$$\|(Z_r^{(1)})^{-1}-I\|\leqslant\|(Z_{r,\,0}^{(1)})^{-1}-I\|\operatorname{cosec}\gamma_0\underset{(79)}{<}\frac{1}{2}\delta_1\operatorname{cosec}\gamma_0. \tag{82}$$

Из (80), (82) следует неравенство

$$\|Z_r^{(1)}-I\|+\|(Z_r^{(1)})^{-1}-I\|<\delta_1\operatorname{cosec}\gamma_0\underset{(38)}{=}\delta_0.$$

Неравенство (75) доказано.

В силу формулы (56) неравенство (75) переписывается в виде

$$\|Y_m(X[\chi^{m-1}b_0])^{-1}-I\|+\|X[\chi^{m-1}b_0]Y_m^{-1}-I\|<\delta_0, \tag{83}$$

где $m=rs_0+(\bar{s}-1)m_1$.

л) Пусть $r\in\{1,\ \ldots,\ t_0-1\}$ таково, что множество индексов $s\in\{1,\ \ldots,\ l_0-1\}$, удовлетворяющих неравенству (54), непусто.

Из определения оператора $Z_r^{(1)}$ вытекает, что если вектор ξ_{r+1} коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то $Z_r^{(1)}=I$, а если вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то

$$Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}=\rho_1X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}+\rho_2X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}, \tag{84}$$

где $\rho_1\in\mathbf{R}$, $\rho_2\in\mathbf{R}_*^+$, причем если

$$\measuredangle(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})\leqslant\frac{1}{2}\delta_1, \tag{85}$$

то $\rho_1=0$, а если

$$\measuredangle(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})>\frac{1}{2}\delta_1, \tag{86}$$

то

$$\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})=\frac{1}{2}\delta_1. \tag{87}$$

α.1) Пусть вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$ и пусть выполнено неравенство (86). Тогда из (84), (86), (87) следует, что $\rho_1>0$. Так как $\rho_1>0$, то

$$\begin{gathered}\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ \rho_1X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1})=\\=\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1})\underset{(87)}{=}\frac{1}{2}\delta_1.\end{gathered} \tag{88}$$

Как и выше, плоскость в слое $p^{-1}(\chi^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}b_0)$, порожденная двумя векторами $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, наделена евклидовой структурой, поскольку сам слой наделен евклидовой структурой. Воспользуемся для этой плоскости теоремами евклидовой планиметрии. По теореме синусов, примененной к треугольнику с вершинами[*] 0, $Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, $\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, имеем

$$|\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}| = [\sin\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ \rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})]^{-1})\times$$
$$\times|\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}|\sin\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ \rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1})\geqslant$$
$$\geqslant|\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}|\sin\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ \rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}) = \tag{89}$$
$$\underset{(88)}{=}|\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}|\sin\frac{\delta_1}{2}$$

(напомним, что $\sin\measuredangle(\xi,\ \eta)\geqslant 0$ для всяких векторов ξ, η).

Плоскость в слое $p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0)$, порожденная двумя векторами $X^{\bar{s}m_1}\xi_{r+1}$, $X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}$, тоже наделена евклидовой структурой, поскольку сам слой наделен евклидовой структурой. Для этой плоскости тоже можно пользоваться теоремами евклидовой планиметрии. По теореме синусов примененной к треугольнику с вершинами[*)] 0, $X^{m_1}\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, $X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, имеем

$$\sin\measuredangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ \ X^{m_1}\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})\underset{(84)}{=}$$
$$\underset{(84)}{=}|X^{m_1}\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}|\cdot|X^{m_1}\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}\times$$
$$\times\sin\measuredangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ \ X^{m_1}\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1})\leqslant \tag{90}$$
$$\leqslant|X^{m_1}\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}|\cdot|X^{m_1}\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1} =$$
$$=|\rho_1 X^{\bar{s}m_1}\xi_{r+1}|\cdot|\rho_2 X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}.$$

Так как при $s=\bar{s}$ выполнено неравенство (54), то

$$|\rho_1 X^{\bar{s}m_1}\xi_{r+1}|\leqslant|\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}|\cdot|X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}|\cdot|X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right)\underset{(89)}{\leqslant}\left(\sin\frac{\delta_1}{2}\right)^{-1}|\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}|\cdot|X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}|\times$$
$$\times|X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right)=\left(\sin\frac{\delta_1}{2}\right)^{-1}|\rho_2 X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}|\times \tag{91}$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right)\underset{(40)}{\leqslant}|\rho_2 X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}|\sin\frac{\delta_1}{2}.$$

Имеем

$$\sin\measuredangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ \ X^{m_1}\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})\underset{(90)}{\leqslant}$$
$$\underset{(90)}{\leqslant}|\rho_1 X^{\bar{s}m_1}\xi_{r+1}|\cdot|\rho_2 X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}\underset{(91)}{\leqslant}\sin\frac{\delta_1}{2}. \tag{92}$$

В рассмотренном треугольнике отношение стороны, противолежащей углу при вершине 0, к одной из двух сторон треугольника (это отношение есть правая часть

---

[*] Говоря о вершинах треугольников, имеем в виду, что вектор интерпретируется как точка плоскости, можно интерпретировать вектор как направленный отрезок с началом в точке 0, тогда вектор в первом смысле есть конец вектора во втором смысле.

[*)] См. предыдущую сноску.

последнего равенства цепочки (90)) не превосходит числа $\sin\frac{\delta_1}{2}<1$ (вследствие формулы (91)). Следовательно, угол при вершине 0 не превосходит одного из двух других углов треугольника и потому является острым, т. е.

$$\sphericalangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1};\ X^{m_1}\rho_2X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})<\frac{\pi}{2}.$$

В силу (92) синус этого острого угла не превосходит $\sin\frac{\delta_1}{2}$, следовательно, сам угол не превосходит $\frac{\delta_1}{2}$:

$$\sphericalangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ X^{m_1}\rho_2X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})\leqslant\frac{1}{2}\delta_1. \tag{93}$$

α.2) Если вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$ и неравенство (86) не выполнено, то $\rho_1=0$ (см. начало подпункта л)) и, следовательно, $Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}\underset{(84)}{=}\rho_2X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, откуда $X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}=X^{m_1}\rho_2X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, следовательно, неравенство (93) выполнено и в этом случае.

м) Пусть $r\in\{1,\ \ldots,\ t_0-1\}$ таково, что множество индексов $s\in\{1,\ \ldots,\ l_0-1\}$, удовлетворяющих неравенству (54), непусто.

Имеем $XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\ldots Y_{rs_0}\overset{(55),(56)}{\underset{(64)}{=}}X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1+1}[\chi^{rs_0-1}b_0]$, поэтому первый из двух векторов (66), т. е. вектор $XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\ldots Y_{rs_0}X^{-1}\xi_{r+1}$, равен $X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$.

α) Пусть вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$. Тогда $\rho_2>0$ (см. начало подпункта л)), и так как $X^{m_1}\rho_2X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}=\rho_2X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}$, то угол между двумя векторами (66) равен

$$\sphericalangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\ X^{m_1}\rho_2X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})\underset{(93)}{\leqslant}\frac{1}{2}\delta_1. \tag{94}$$

Линейный оператор $Z_r^{(2)}$, определенный в подпункте δ) подпункта з), можно записать формулой

$$Z_r^{(2)}=P_{n-k_0}^{(\bar{s},\ 2)}+Z_{r,\ 0}^{(2)}P_{k_0}^{(\bar{s},\ 2)}, \tag{95}$$

где

$$P_{n-k_0}^{(\bar{s},\ 2)}:p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0)\to p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0),$$
$$P_{k_0}^{(\bar{s},\ 2)}:p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0)\to p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0)$$

— проекторы, такие, что

$$\operatorname{Im}P_{n-k_0}^{(\bar{s},\ 2)}=X^{rs_0+\bar{s}m_1}\mathbf{R}^{n-k_0},\quad \operatorname{Ker}P_{n-k_0}^{(\bar{s},\ 2)}=X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0),$$
$$\operatorname{Im}P_{k_0}^{(\bar{s},\ 2)}=X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0),\quad \operatorname{Ker}P_{k_0}^{(\bar{s},\ 2)}=X^{rs_0+\bar{s}m_1}\mathbf{R}^{n-k_0}.$$

Хорошо известно (и легко доказывается), что для так определенных проекторов имеет место равенство

$$I=P_{n-k_0}^{(\bar{s},\ 2)}+P_{k_0}^{(\bar{s},\ 2)}. \tag{96}$$

Из условия *ii*) определения оператора $Z_r^{(2)}$ в силу неравенства (94) следуют неравенства

$$\| Z_{r,\,0}^{(2)} - I \| < \frac{1}{2}\delta_1, \tag{97}$$

$$\| (Z_{r,\,0}^{(2)})^{-1} - I \| < \frac{1}{2}\delta_1; \tag{98}$$

это хорошо известно и легко доказывается; доказательство этого утверждения изложено в подпункте з) пункта 3 доказательства теоремы в [8].

Из (95), (96) следует равенство[*] $Z_r^{(2)} - I = (Z_{r,\,0}^{(2)} - I)P_{k_0}^{(\bar{s},\,2)}$, из которого в силу леммы B.2, примененной в случае, когда один из операторов L_s, L_q равен нулю, и формулы (37) (напомним, что $\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0) \underset{\text{def}}{=} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)$) следует неравенство

$$\| Z_r^{(2)} - I \| \leqslant \| Z_{r,\,0}^{(2)} - I \| \operatorname{cosec}\gamma_0 \underset{(97)}{<} \frac{1}{2}\delta_1 \operatorname{cosec}\gamma_0. \tag{99}$$

Так как $Z_{r,\,0}^{(2)} : X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0) \to X^{rs_0+\bar{s}m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)$ — невырожденный линейный оператор, то

$$(Z_r^{(2)})^{-1} \underset{(95)}{=} P_{n-k_0}^{(\bar{s},\,2)} + (Z_{r,\,0}^{(2)})^{-1} P_{k_0}^{(\bar{s},\,2)}. \tag{100}$$

Из (96), (100) следует равенство $(Z_r^{(2)})^{-1} - I = ((Z_{r,\,0}^{(2)})^{-1} - I)P_{k_0}^{(\bar{s},\,2)}$, из которого в силу леммы B.2, примененной в случае, когда один из операторов L_s, L_q равен нулю, и формулы (37) (напомним, что $\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0) = E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)$) следует неравенство

$$\| (Z_r^{(2)})^{-1} - I \| \leqslant \| (Z_{r,\,0}^{(2)})^{-1} - I \| \operatorname{cosec}\gamma_0 \underset{(98)}{<} \frac{1}{2}\delta_1 \operatorname{cosec}\gamma_0. \tag{101}$$

Из (99), (101) следует неравенство $\|Z_r^{(2)} - I\| + \|(Z_r^{(2)})^{-1} - I\| < \delta_1 \operatorname{cosec}\gamma_0 \underset{(38)}{=} \delta_0$, откуда в силу формулы (65) следует неравенство

$$\|Y_m(X[\chi^{m-1}b_0])^{-1} - I\| + \|X[\chi^{m-1}b_0]Y_m^{-1} - I\| < \delta_0, \tag{102}$$

где $m = rs_0 + \bar{s}m_1$.

β) Если ξ_{r+1} коллинеарен $\xi^{(r+1)}$, то $Z_r^{(1)} = I$ (см. подпункт β) подпункта 3)), следовательно, два вектора (66) совпадают, поэтому $Z_r^2 = I$ (см. подпункт δ) подпункта 3)), значит, неравенство (102) верно и в этом случае: $0 < \delta_0$.

н) Для операторов $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$, определенных в подпунктах ж) — и), при всяком $m \in \{1,\, \ldots,\, t_0 s_0\}$ выполнено неравенство (35). В самом деле, при всяком $m \in \{1,\, \ldots,\, t_0 s_0\}$ либо $Y_m = X[\chi^{m-1}b_0]$ и тогда левая часть неравенства (35) равна $0 < \delta_0$, либо $Y_m = \ = Z_r^{(1)}X[\chi^{m-1}b_0]$ при некотором r, и тогда неравенство (35) доказано (см. формулу (83)), либо $Y_m = Z_r^{(2)}X[\chi^{m-1}b_0]$ при некотором r, и тогда неравенство (35) тоже доказано (см. формулу (102)).

о) В силу утверждений подпунктов в), н) найдутся точка

$$b_1 \in W(b_0) \tag{103}$$

и изоморфизмы слоев (как евклидовых пространств) $\psi_m : p^{-1}(\chi^m b_1) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ $m \in \{0,\, \ldots,\, t_0 s_0\}$ такие, что при всяком $m \in \{1,\, \ldots,\, t_0 s_0\}$ диаграмма

---

[*] Напомним, что буквой I в одной и той же формуле могут обозначаться тождественные отображения разных множеств.

$$
\begin{array}{ccc}
p^{-1}(\chi^{m-1}b_1) & \xrightarrow[X[\chi^{m-1}b_1]]{} & p^{-1}(\chi^{m}b_1) \\
\downarrow\Psi_{m-1} & & \downarrow\Psi_{m} \\
p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}(\chi^{m}b_0)
\end{array}
\tag{104}
$$

коммутативна. Фиксируем такие b_1 и ψ_m $(m\in\{0,\ \ldots,\ t_0s_0\})$. Из коммутативности при всяком $m\in\{1,\ \ldots,\ t_0s_0\}$ диаграммы (104) следует коммутативность диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
p^{-1}(b_1) & \xrightarrow[X^{t_0s_0}[b_1]]{} & p^{-1}(\chi^{t_0s_0}b_1) \\
\downarrow\Psi_{0} & & \downarrow\Psi_{t_0s_0} \\
p^{-1}(b_0) & \xrightarrow[Y_{t_0s_0}\ldots Y_1]{} & p^{-1}(\chi^{t_0s_0}b_0)
\end{array}
\tag{105}
$$

(напомним, что $X[\chi^{t_0s_0-1}b]\ \ldots\ X[\chi^0 b]=X^{t_0s_0}[b]$ при всяком $b\in B$).

Так как ψ_0, $\Psi_{t_0s_0}$ — изоморфизмы евклидовых пространств, соединенных в диаграмме (105) стрелками, помеченными знаками ψ_0, $\Psi_{t_0s_0}$, то из коммутативности диаграммы (105) следует, что при всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ при всяком $\mathbf{R}^s\in G_k(p^{-1}(b_0))$ имеет место равенство

$$
||X^{t_0s_0}_{\psi_0^{-1}\mathbf{R}^k}||=||Y_{t_0s_0}\ldots Y_1|_{\mathbf{R}^k}||. \tag{106}
$$

п) Из определения операторов Y_m (см. подпункты ж) — и)) следует, что при всяком $m\in\{1,\ \ldots,\ t_0s_0\}$ имеет место равенство

$$
Y_m=L_mX[\chi^{m-1}b_0], \tag{107}
$$

где $L_m:p^{-1}(\chi^m b_0)\to p^{-1}(\chi^m b_0)$ — некоторый невырожденный линейный оператор, сужение которого на $X^m\mathbf{R}^{n-k_0}$ есть единичный оператор:

$$
L_m|_{X^m\mathbf{R}^{n-k_0}}=I, \tag{108}
$$

а сужение на $X^mE_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$ есть некоторый ортогональный оператор $V_m:X^mE_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)\to X^mE_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$, равный либо I, либо $Z^{(1)}_{r,\,0}$ при некотором r (либо $Z^{(2)}_{r,\,0}$ при некотором r):

$$
L_m|_{X^mE_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)}=V_m. \tag{109}
$$

Поэтому при всяком $m\in\{1,\ \ldots,\ t_0s_0\}$ имеют место равенства

$$
||Y_m|_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)}||=||X_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)}||, \tag{110}
$$

$$
||(Y_m|_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)})^{-1}||=||(X_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)})^{-1}||, \tag{111}
$$

а при всяких $m\in\{1,\ \ldots,\ t_0s_0\}$, $\xi\in X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0)$ выполнено равенство

$$
|Y_m\xi|=|X\xi|. \tag{112}
$$

Так как для всякого множества $Q \subset E$ имеет место равенство $(X_Q)^{-1} = X_{XQ}^{-1}$, то $\|(X_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\| = \|X^{-1}_{X^m E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\|$; поэтому равенство (111) может быть переписано в виде

$$\|(Y_m|_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\| = \|X^{-1}_{X^m E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\|. \tag{113}$$

При всяком $m \in \{1, \ldots, t_0 s_0\}$ имеем

$$\begin{gathered} \max\{\|Y_m|_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\|,\ \|(Y_m|_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\|\} = \\ \underset{(113)}{\overset{(110)}{=}} \max\{\|X_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\|,\ \|X^{-1}_{X^m E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\|\}. \end{gathered} \tag{114}$$

Так как для всякого $t \in \mathbf{G}$ имеем $X^t E_{k_0}(\mathfrak{H}_1, b_0) \subset X^t p^{-1}(b_0) = p^{-1}(\chi^t b_0)$ и для всяких $t \in \mathbf{G}$, $b \in B$ символом $X^t_{p^{-1}(b)}$ обозначается $X^t[b]$, то

$$\| X_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\| \leqslant \|X[\chi^{m-1}b_0]\|,\ \ \|X^{-1}_{X^m E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\| \leqslant \|X^{-1}[\chi^m b_0]\|,$$

и поэтому из (114) следует неравенство

$$\begin{gathered} \max\{\|Y_m|_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\|,\ \|(Y_m|_{X^{m-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\|\} \leqslant \\ \leqslant \max\{\|X[\chi^{m-1}b_0]\|,\ \|X^{-1}[\chi^m b_0]\|\} \underset{(2)}{\leqslant} \max\{\exp(a(\chi^{m-1}b_0)), \\ \exp(a(\chi^m b_0))\} \underset{(1)}{=} \exp(a(b_0)) \end{gathered} \tag{115}$$

(при применении формулы (2) использовано равенство $X \underset{\text{def}}{=} X^1$ см. п. 2 введения).

р) Положим

$$\eta_0 \underset{\text{def}}{=} \xi^{(1)},\ \eta_m \underset{\text{def}}{=} Y_m \eta_{m-1}\ \ (m \in \{1, \ldots, t_0 s_0\}). \tag{116}$$

Имеем

$$\eta_0 \underset{(116)}{\overset{(46)}{\in}} (E_{k_0}(\mathfrak{H}_1, b_0))_*, \tag{117}$$

$$\eta_{s_0-1} \underset{(116)}{\overset{(45)}{=}} X^{s_0-1}\eta_0, \tag{118}$$

$$|\eta_{S_0}| \underset{(116)}{=} |Y_{s_0}\eta_{s_0-1}| \underset{(117),(118)}{\overset{(112)}{=}} |X\eta_{s_0-1}| \underset{(118)}{=} |X^{s_0}\eta_0|. \tag{119}$$

Имеют место равенства

$$|\eta_{S_0}| \cdot |\eta_0|^{-1} \underset{(119)}{=} |X^{s_0}\eta_0| \cdot |\eta_0|^{-1} \underset{(116)}{=} |X^{s_0}\xi^{(1)}| \cdot |\xi^{(1)}|^{-1} \underset{(47)}{=} \|X^{s_0}_{E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\|. \tag{120}$$

с) Определим множество $M \subset \{1, \ldots, t_0 - 1\}$ следующим образом: $r \in \{1, \ldots, t_0 - 1\}$ принадлежит множеству M в том и только в том случае, если для некоторого $s \in \{1, \ldots, l_0 - 1\}$ имеет место неравенство (54).

Пусть $r \in M$. Имеем

$$\eta_{rs_0+\bar{s}m_1} \underset{(116)}{\overset{(67)}{=}} \sigma_r X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}, \tag{121}$$

где $\sigma_r \in \mathbf{R}_*$. Далее,

$$\eta_{(r+1)s_0} \underset{(116)}{=} Y_{(r+1)s_0} \ldots Y_{rs_0+\bar{s}m_1+1} \eta_{rs_0+\bar{s}m_1} \underset{(73)}{=} Y_{(r+1)s_0} X[\chi^{(r+1)s_0-2} b_0] \ldots$$
$$\ldots X[\chi^{rs_0+\bar{s}m_1} b_0] \eta_{rs_0+\bar{s}m_1} = Y_{(r+1)s_0} X^{s_0-\bar{s}m_1-1} \eta_{rs_0+\bar{s}m_1} \underset{(121)}{=} \sigma_r Y_{(r+1)s_0} X^{s_0-1} \xi^{(r+1)}, \qquad (122)$$

Поэтому

$$|\, \eta_{(r+1)s_0} \,| \underset{(122)}{=} |\, \sigma_r Y_{(r+1)s_0} X^{s_0-1} \xi^{(r+1)} \,| \overset{(46)}{\underset{(112)}{=}} |\, \sigma_r X^{s_0} \xi^{(r+1)} \,|. \qquad (123)$$

Из (121), (123) следует равенство

$$|\, \eta_{(r+1)s_0} \,| \cdot |\, \eta_{rs_0+\bar{s}m_1} \,|^{-1} = |\, X^{s_0} \xi^{(r+1)} \,| \cdot |\, X^{\bar{s}m_1} \xi^{(r+1)} \,|^{-1}. \qquad (124)$$

Итак, в этом подпункте доказано, что *для всякого* $r \in M$ *имеет место равенство* (*124*).

т) Пусть

$$r \in CM \underset{\text{def}}{=} \{1, \ \ldots, \ t_0 - 1\} \setminus M \qquad (125)$$

(множество M определено в начале подпункта с)). Тогда для всякого $s \in \{1, \ \ldots, \ l_0 - 1\}$ имеет место неравенство (отрицание неравенства (54)):

$$|\, X^{sm_1} \xi_{r+1} \,| \cdot |\, X^{(s-1)m_1} \xi_{r+1} \,|^{-1} >$$
$$> |\, X^{sm_1} \xi^{(r+1)} \,| \cdot |\, X^{(s-1)m_1} \xi^{(r+1)} \,|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right). \qquad (126)$$

Кроме того, тогда

$$\eta_{(r+1)s_0-m_1} \overset{(51)}{\underset{(116)}{=}} Y_{(r+1)s_0-m_1} \ldots Y_{rs_0} X^{-1} \xi_{r+1} \underset{(53)}{=} X^{s_0-m_1} \xi_{r+1}, \qquad (127)$$

$$\eta_{rs_0-1} \overset{(51)}{\underset{(116)}{=}} X^{-1} \xi_{r+1} \underset{(51)}{\in} (X^{rs_0-1} E_{k_0}(\mathfrak{H}_1, \ b_0))_*. \qquad (128)$$

Перемножив неравенства (126) по всем $s \in \{1, \ \ldots, \ l_0 - 1\}$, воспользовавшись формулой $s_0 \underset{(42)}{=} l_0 m_1$, получаем неравенство

$$|\, X^{s_0-m_1} \xi_{r+1} \,| \cdot |\, \xi_{r+1} \,|^{-1} > |\, X^{s_0-m_1} \xi^{(r+1)} \,| \cdot |\, \xi^{(r+1)} \,|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 (s_0 - m_1)\right) \geqslant$$
$$\geqslant |\, X^{s_0-m_1} \xi^{(r+1)} \,| \cdot |\, \xi^{(r+1)} \,|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 s_0\right),$$

которое с помощью формул (127), (128) переписывается в виде $|\, \eta_{(r+1)s_0-m_1} \,| \times$ $\times |\, X \eta_{rs_0-1} \,|^{-1} > |\, X^{s_0-m_1} \xi^{(r+1)} \,|\, \xi^{(r+1)} \,|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 s_0\right)$. Это неравенство в свою очередь может быть переписано в виде

$$|\, \eta_{(r+1)s_0-m_1} \,| \cdot |\, \eta_{rs_0} \,|^{-1} > |\, X^{s_0-m_1} \xi^{(r+1)} \,| \cdot |\, \xi^{(r+1)} \,|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 s_0\right), \qquad (129)$$

так как $|\eta_{rs_0}| \underset{(116)}{=} |Y_{rs_0} \eta_{rs_0-1}| \overset{(112)}{\underset{(128)}{=}} |X \eta_{rs_0-1}|$.

Итак, в этом подпункте доказано, что *для всякого* $r \in CM$ *имеет место неравенство* (*129*).

у) Пусть $r \in M$. Рассмотрим сначала случай*) $\bar{s} > 1$. По определению числá $\bar{s}$ (см. подпункт з)) для всякого $s \in \{1, \ldots, \bar{s}-1\}$ неравенство (54) не имеет места, т. е. для всякого $s \in \{1, \ldots, \bar{s}-1\}$ выполнено неравенство

$$|X^{sm_1}\xi_{r+1}| \cdot |X^{(s-1)m_1}\xi_{r+1}|^{-1} > |X^{sm_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |X^{(s-1)m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right). \quad (130)$$

Кроме того, тогда

$$\begin{aligned} \eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1} &\underset{(116)}{\overset{(51)}{=}} Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1}\ldots Y_{rs_0}X^{-1}\xi_{r+1} \underset{(55)}{=} \\ &\underset{(55)}{=} X^{(\bar{s}-1)m_1-1}\xi_{r+1} \underset{(51)}{\in} (X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*, \end{aligned} \quad (131)$$

$$\eta_{rs_0-1} \underset{(116)}{\overset{(51)}{=}} X^{-1}\xi_{r+1} \underset{(51)}{\in} (X^{rs_0-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*. \quad (132)$$

Перемножив неравенства (130) по всем $s \in \{1, \ldots, \bar{s}-1\}$, получаем неравенство

$$\begin{gathered} |X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}| \cdot |\xi_{r+1}|^{-1} > |X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |\xi^{(r+1)}|^{-1} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1(\bar{s}-1)\right), \end{gathered}$$

из которого в силу формул (131), (132) и неравенств $m_1(\bar{s}-1) \leqslant m_1(l_0-2) \underset{(42)}{<} s_0$ следует неравенство $|X\eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1}| \cdot |X\eta_{rs_0-1}|^{-1} > |X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |\xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 s_0\right)$. Это неравенство в свою очередь может быть переписано в виде

$$\begin{gathered} |\eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}| \cdot |\eta_{rs_0}|^{-1} > \\ > |X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |\xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 s_0\right), \end{gathered} \quad (133)$$

если применить при $m = rs_0 + (\bar{s}-1)m_1$ и при $m = rs_0$ равенства $|\eta_m| \underset{(116)}{=} |Y_m\eta_{m-1}| = |X\eta_{m-1}|$ (последнее равенство при $m = rs_0 + (\bar{s}-1)m_1$ следует из формулы (112) в силу формулы (131), а при $m = rs_0$ следует из формулы (112) в силу формулы (132)).

Теперь рассмотрим случай $\bar{s} = 1$. В этом случае левая часть неравенства (133) равна 1, а правая часть равна $\exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 s_0\right)$, поэтому неравенство (133) верно и в случае $\bar{s} = 1$. Итак, в этом подпункте доказано, что для всякого $r \in M$ имеет место неравенство (133).

ф) Для всякого $r \in \{1, \ldots, t_0-1\}$ имеем

---

*) Число $\bar{s}$, определенное в подпункте з) и фигурирующее здесь и в других местах статьи, зависит от r, хотя это и не отражено в его обозначении.

$$
|\eta_{(r+1)s_0}|\cdot|\eta_{(r+1)s_0-m_1}|^{-1} \underset{(116)}{=}
$$

$$
\underset{(116)}{=} |\eta_{(r+1)s_0}|\cdot|Y^{-1}_{(r+1)s_0-m_1+1}\dots Y^{-1}_{(r+1)s_0}\eta_{(r+1)s_0}|^{-1} \overset{(116)}{\underset{(117)}{\geqslant}}
$$

$$
\overset{(116)}{\underset{(117)}{\geqslant}} \|(Y_{(r+1)s_0-m_1+1}|_{X^{(r+1)s_0-m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\dots
$$

$$
\dots(Y_{(r+1)s_0}|_{X^{(r+1)s_0-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\|^{-1}\geqslant
$$

$$
\geqslant \prod_{j=0}^{m_1-1} \|(Y_{(r+1)s_0-j}|_{X^{(r+1)s_0-1-j}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\|^{-1} \underset{(115)}{\geqslant}
$$

$$
\underset{(115)}{\geqslant} \exp(-m_1 a(b_0)) \overset{(1)}{\underset{(2)}{\geqslant}}
$$

$$
\overset{(1)}{\underset{(2)}{\geqslant}} \|X^{m_1}[\chi^{(r+1)s_0-m_1}b_0]\|\exp(-2m_1 a(b_0)) \underset{(46)}{\geqslant}
$$

$$
\underset{(46)}{\geqslant} \|X^{s_0}\xi^{(r+1)}|\cdot|X^{s_0-m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}\exp(-2m_1 a(b_0)).
$$

Таким образом, для всякого $r\in\{1,\ \dots,\ t_0-1\}$ доказано неравенство

$$
\begin{gathered}
|\eta_{(r+1)s_0}|\cdot|\eta_{(r+1)s_0-m_1}|^{-1}\geqslant\\
\geqslant\|X^{s_0}\xi^{(r+1)}|\cdot|X^{s_0-m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}\exp(-2m_1 a(b_0)).
\end{gathered}
\tag{134}
$$

x) Для всякого $r\in M$ имеем

$$
|\eta_{rs_0+\bar{s}m_1}|\cdot|\eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}|^{-1} \underset{(116)}{=}
$$

$$
\underset{(116)}{=} |\eta_{rs_0+\bar{s}m_1}|\cdot|Y^{-1}_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1+1}\dots Y^{-1}_{rs_0+\bar{s}m_1}\eta_{rs_0+\bar{s}m_1}|^{-1}\geqslant
$$

$$
\geqslant\|(Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1+1}|_{X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\dots
$$

$$
\dots(Y_{rs_0+\bar{s}m_1}|_{X^{rs_0+\bar{s}m_1-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\|^{-1}\geqslant
$$

$$
\geqslant \prod_{j=1}^{m_1} \|(Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1+j}|_{X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1+j-1}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)})^{-1}\|^{-1}\geqslant
$$

$$
\underset{(115)}{\geqslant} \exp(-m_1 a(b_0)) \overset{(1)}{\underset{(2)}{\geqslant}}
$$

$$
\overset{(1)}{\underset{(2)}{\geqslant}} \|X^{m_1}[\chi^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}]\|\exp(-2m_1 a(b_0)) \underset{(46)}{\geqslant}
$$

$$
\underset{(46)}{\geqslant} \|X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}|\cdot|X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}\exp(-2m_1 a(b_0)).
$$

Таким образом, *для всякого* $r\in M$ *имеет место неравенство*

$$
\begin{aligned}
&|\eta_{rs_0+\bar{s}m_1}|\cdot|\eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}|^{-1}\geqslant\\
&\geqslant|X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}|\cdot|X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}\exp(-2m_1a(b_0)).
\end{aligned} \tag{135}
$$

ц) Пусть $r\in M$. Перемножив равенство (124) и неравенства (135), (133), получаем

$$
|\eta_{(r+1)s_0}|\cdot|\eta_{rs_0}|^{-1}\geqslant|X^{s_0}\xi^{(r+1)}|\cdot|\xi^{(r+1)}|^{-1}\exp\left(-2m_1a(b_0)-\frac{1}{2}\rho_0s_0\right). \tag{136}
$$

Пусть $r\in CM$. Перемножив неравенства (134) и (129), получаем

$$
|\eta_{(r+1)s_0}|\cdot|\eta_{rs_0}|^{-1}\geqslant|X^{s_0}\xi^{(r+1)}|\cdot|\xi^{(r+1)}|^{-1}\exp\left(-2m_1a(b_0)-\frac{1}{2}\rho_0s_0\right). \tag{137}
$$

Перемножив неравенства (136) по всем $r\in M$ и неравенства (137) по всем $r\in CM$, получаем (пользуясь формулой (125))

$$
\begin{aligned}
&|\eta_{t_0s_0}|\cdot|\eta_{s_0}|^{-1}\geqslant\exp((-2m_1a(b_0)-\frac{1}{2}\rho_0s_0)(t_0-1))\}\times\\
&\times\prod_{r=1}^{t_0-1}(|X^{s_0}\xi^{(r+1)}|\cdot|\xi^{(r+1)}|^{-1})\underset{(47)}{=}\\
&\underset{(47)}{=}\left\{\exp\left(\left(-2m_1a(b_0)-\frac{1}{2}\rho_0s_0\right)(t_0-1)\right)\right\}\times\\
&\times\prod_{r=1}^{t_0-1}(\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|,
\end{aligned}
$$

откуда в силу формулы (120) следует неравенство $|\eta_{t_0s_0}|\cdot|\eta_{s_0}|^{-1}\geqslant$ $\geqslant\left\{\exp\left(\left(-2m_1a(b_0)-\dfrac{1}{2}\rho_0s_0\right)t_0\right)\right\}\prod_{r=0}^{t_0-1}(\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|$, из которого вследствие формулы $2m_1a(b_0)\overset{(41)}{\underset{(42)}{\leqslant}}\dfrac{1}{4}\rho_0s_0$ вытекает неравенство

$$
|\eta_{t_0s_0}|\cdot|\eta_{s_0}|^{-1}\geqslant\left\{\exp\left(-\frac{3}{4}\rho_0s_0t_0\right)\right\}\prod_{r=0}^{t_0-1}(\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|. \tag{138}
$$

ч) Пусть дано произвольное $\mathbf{R}^{k_0}\in G_{k_0}(p^{-1}(b_0))$. Так как

$$
\eta_0\overset{(46)}{\underset{(116)}{\in}}(E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0))_*, \tag{139}
$$

$$
\mathbf{R}^{n-k_0}\bigcap E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)=\{0\}, \tag{140}
$$

поскольку по определению $\mathbf{R}^{n-k_0}$ имеет место равенство $\mathbf{R}^{n-k_0}\oplus E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)=p^{-1}(b_0)$, то $\eta_0\notin\mathbf{R}^{n-k_0}$, и потому векторное подпространство слоя $p^{-1}(b_0)$, порожденное подпространством $\mathbf{R}^{n-k_0}$ и вектором η_0 (т. е. множество всех векторов вида $\xi+\lambda\eta_0$, где $\xi\in\mathbf{R}^{n-k_0}$, $\lambda\in\mathbf{R}$), имеет размерность $n-k_0+1>n-k_0=\dim p^{-1}(b_0)-\dim\mathbf{R}^{k_0}$, следовательно, пересечение этого векторного подпространства с $\mathbf{R}^{k_0}$ не равно $\{0\}$, т. е. найдется $\zeta_0\in\mathbf{R}^{k_0}_*$ такое, что

$$
\zeta_0=\theta_0+\lambda_0\eta_0, \tag{141}
$$

где $\theta_0\in\mathbf{R}^{n-k_0}$, $\lambda_0\in\mathbf{R}$.

Фиксируем такие ζ_0, ξ_0, λ_0. Рассмотрим два случая.

α) $\theta_0 = 0$. Тогда $\zeta_0 = \lambda_0 \eta_0$, причем $\lambda_0 \neq 0$, так как $\zeta_0 \neq 0$. Следовательно, $\eta_0 = \lambda_0^{-1} \zeta_0 \in \mathbf{R}_*^{k_0}$ (так как $\zeta_0 \in \mathbf{R}_*^{k_0}$), и поэтому

$$|Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0| \cdot |\zeta_0|^{-1} = |Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \eta_0| \cdot |\eta_0|^{-1} \underset{(116)}{=} |\eta_{t_0 s_0}| \cdot |\eta_0|^{-1}. \tag{142}$$

β) $\theta_0 \neq 0$. Тогда векторы θ_0 и η_0 линейно независимы в силу формулы (140), так как

$$\theta_0 \in \mathbf{R}^{n-k_0},\ \eta_0 \underset{(139)}{\in} (E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_* = (\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*. \tag{143}$$

Обозначим через $\mathbf{R}^2$ плоскость в слое $p^{-1}(b_0)$, порожденную векторами θ_0 и η_0. Имеем $\zeta_0 \underset{(141)}{=} \theta_0 + \lambda_0 \eta_0 \in \mathbf{R}^2$. Из (143) в силу формул (48), (49), примененных при $m = t_0 s_0$, следует

$$Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \theta_0 \underset{(48)}{=} X^{t_0 s_0} \theta_0 \in X^{t_0 s_0} \mathbf{R}_*^{n-k_0}, \tag{144}$$

$$Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \eta_0 \underset{(49)}{\in} X^{t_0 s_0}(E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_* = X^{t_0 s_0}(\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*. \tag{145}$$

Обозначим через $\mathbf{R}_1^1$ прямую в плоскости $\mathbf{R}^2$, порожденную вектором θ_0, через $\mathbf{R}_2^1$ — прямую в плоскости $\mathbf{R}^2$, порожденную вектором η_0. В силу формул (37), (144), (145) имеет место неравенство

$$\sphericalangle(Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \mathbf{R}_1^1,\ Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \mathbf{R}_2^1) \geqslant \gamma_0. \tag{146}$$

Обозначим через P_1^1 проектор плоскости $Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \mathbf{R}^2 \subset p^{-1}(\chi^{t_0 s_0},\ b_0)$, такой, что

$$\operatorname{Im} P_1^1 = Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \mathbf{R}_1^1,\ \operatorname{Ker} P_1^1 = Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \mathbf{R}_2^1,$$

а через P_2^1 — проектор той же плоскости, такой, что

$$\operatorname{Im} P_2^1 = Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \mathbf{R}_2^1,\ \operatorname{Ker} P_2^1 = Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \mathbf{R}_1^1.$$

В силу леммы В.1 из неравенства (146) следует неравенство

$$\max\{\|P_1^1\|,\ \|P_2^1\|\} \leqslant \operatorname{cosec} \gamma_0. \tag{147}$$

Имеем
$$Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0 \underset{(141)}{=} Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 (\theta_0 + \lambda_0 \eta_0) = Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \theta_0 + {}$$
$$+ \lambda_0 Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \eta_0,$$

откуда

$$Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \theta_0 = P_1^1 Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0, \tag{148}$$

$$\lambda_0 \eta_{t_0 s_0} \overset{(46)}{\underset{(116)}{=}} \lambda_0 Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \eta_0 = P_2^1 Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0. \tag{149}$$

Далее,
$$|P_1^1 Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0| \geqslant \|P_1^1\| \cdot |Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0| \underset{(147)}{\leqslant}$$
$$\underset{(147)}{\leqslant} |Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0| \operatorname{cosec} \gamma_0,$$

$$|P_2^1 Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0| \leqslant \|P_2^1\| \cdot |Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0| \underset{(147)}{\leqslant} |Y_{t_0 s_0} \ldots Y_1 \zeta_0| \operatorname{cosec} \gamma_0,$$

откуда

$$|Y_{t_0s_0}\dots Y_1\zeta_0|\geqslant\frac{1}{2}(|P_1^1Y_{t_0s_0}\dots Y_1\zeta_0|+|P_2^1Y_{t_0s_0}\dots Y_1\zeta_0|)\sin\gamma_0\underset{(149)}{\overset{(148)}{=}}$$
$$\underset{(149)}{\overset{(148)}{=}}\frac{1}{2}(|Y_{t_0s_0}\dots Y_1\theta_0|+|\lambda_0\eta_{t_0s_0}|)\sin\gamma_0\underset{(144)}{=}$$
$$\underset{(144)}{=}\frac{1}{2}(|X^{t_0s_0}\theta_0|+|\lambda_0\eta_{t_0s_0}|)\sin\gamma_0\underset{(37''),\,(40),\,(42)}{\geqslant}\tag{150}$$
$$\underset{(37''),\,(40),\,(42)}{\geqslant}(|X^{t_0s_0}\theta_0|+|\lambda_0\eta_{t_0s_0}|)\exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0s_0\right),$$

Пусть имеет место случай β), т. е. $\theta_0\neq 0$. В силу подпункта г) для всяких $\xi_0\in\mathbf{R}_*^{n-k_0}$, $\eta_0\in(\mathbf{R}_0^{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*=(E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\ b_0))_*$ для всяких $t\in\mathbf{Z}^+$, $s\in\mathbf{Z}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\cdot|X^s\xi|^{-1}\geqslant\alpha_0|X^t\eta|\cdot|X^s\eta|^{-1}\exp(\beta_0(t-s)).$$

Так как $\theta_0\in\mathbf{R}_*^{n-k_0}$ (см. формулу (143)), то при всяком $r\in\{0,\ \dots,\ t_0-1\}$ имеет место неравенство

$$|X^{(r+1)s_0}\theta_0|\cdot|X^{rs_0}\theta_0|^{-1}\geqslant$$
$$\geqslant\alpha_0\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|\exp(\beta_0s_0)\underset{(40),\,(42)}{\overset{(37')}{\geqslant}}\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|.\tag{151}$$

Перемножив неравенства (151) по всем $r\in\{0,\ \dots,\ t_0-1\}$, получаем неравенство

$$|X^{t_0s_0}\theta_0|\cdot|\theta_0|^{-1}\geqslant\prod_{r=0}^{t_0-1}\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|.\tag{152}$$

Из (138), (152) в силу формулы (150) следует

$$|Y_{t_0s_0}\dots Y_1\zeta_0|\geqslant(|\theta_0|+|\lambda_0\eta_0|)\left\{\exp\left(-\frac{7}{8}\rho_0s_0t_0\right)\right\}\prod_{r=0}^{t_0-1}\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|\underset{(141)}{\geqslant}$$
$$\underset{(141)}{\geqslant}|\zeta_0|\left\{\exp\left(-\frac{7}{8}\rho_0s_0t_0\right)\right\}\prod_{r=0}^{t_0-1}\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|.$$

В случае α) (т. е. если $\theta_0=0$) из (138), (142) следует неравенство

$$|Y_{t_0s_0}\dots Y_1\zeta_0|\geqslant|\zeta_0|\left\{\exp\left(-\frac{3}{4}\rho_0s_0t_0\right)\right\}\prod_{r=0}^{t_0-1}\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|,$$

следовательно, и в этом случае имеет место неравенство (153). Так как $\zeta_0\in\mathbf{R}_*^{k_0}$ (см. фразу, содержащую формулу (141)), то

$$\|X^{t_0s_0}_{\psi_0^{-1}\mathbf{R}^{k_0}}\|\underset{(106)}{=}\|Y_{t_0s_0}\dots Y_1|_{\mathbf{R}^{k_0}}\|\geqslant$$
$$\geqslant|Y_{t_0s_0}\dots Y_1|\cdot|\zeta_0|^{-1}\underset{(153)}{\geqslant}$$
$$\underset{(153)}{\geqslant}\left\{\exp\left(-\frac{7}{8}\rho_0s_0t_0\right)\right\}\prod_{r=0}^{t_0-1}\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\,b_0)}\|.$$

откуда

$$\frac{1}{t_0 s_0}\ln\|X^{t_0 s_0}_{\psi_0^{-1}\mathbf{R}^{k_0}}\| \geqslant -\frac{7}{8}\rho_0+\frac{1}{t_0 s_0}\sum_{r=0}^{t-1}\ln\|X^{s_0}_{X^{rs_0}E_{k_0}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)}\| \underset{(44)}{\geqslant}$$
$$\underset{(44)}{\geqslant}\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)-\rho_0.$$

Неравенство (154) доказано при всяком $\mathbf{R}^{k_0}\in G_{k_0}(p^{-1}(b_0))$ (см. начало подпункта ч)).

ш) При всяком натуральном $m\leqslant t_0 s_0$, при всяком натуральном $q\geqslant t_0 s_0-m$ при всяком $\mathbf{R}^{k_0}\in G_{k_0}(p^{-1}(b_0))$ имеем

$$\max_{t\in\{0,\,\ldots,\,q\}}\frac{1}{m+t}\ln\|X^{m+t}_{\psi_0^{-1}\mathbf{R}^{k_0}}\|\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{t_0 s_0}\ln\|X^{t_0 s_0}_{\psi_0^{-1}\mathbf{R}^{k_0}}\| \underset{(154)}{>}\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)-\rho_0.$$

Следовательно, при всяком натуральном $m\leqslant t_0 s_0$, при всяком натуральном $q\geqslant t_0 s_0-m$ имеет место формула

$$\inf_{\mathbf{R}^{k_0}\in G_{k_0}(p^{-1}(b_0))}\max_{t\in\{0,\,\ldots,\,q\}}\frac{1}{m+t}\ln\|X^{m+t}_{\psi_0^{-1}\mathbf{R}^{k_0}}\|\geqslant$$
$$\geqslant\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)-\rho_0. \qquad (155)$$

Так как ψ_0 — изоморфизм слоя $p^{-1}(b_1)$ на слой $p^{-1}(b_0)$, то $\psi_0^{-1}G_{k_0}(p^{-1}(b_0))=G_{k_0}(p^{-1}(b_1))$, поэтому левая часть неравенства (155) равна

$$\inf_{\mathbf{R}^{k_0}\in G_{k_0}(p^{-1}(b_1))}\max_{t\in\{0,\,\ldots,\,q\}}\frac{1}{m+t}\ln\|X^{m+t}_{\mathbf{R}^{k_0}}\| \underset{(15)}{=}\mu^{(m,\,q)}_{k_0}(b_1);$$

следовательно, неравенство (155) переписывается в виде

$$\mu^{(m,\,q)}_{k_0}(b_1)\geqslant\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)-\rho_0 \qquad (156)$$

(при всяком натуральном $m\leqslant t_0 s_0$, при всяком натуральном $q\geqslant t_0 s_0-m$).

При всяком натуральном $m\leqslant t_0 s_0$ имеем $\mu^{(m)}_{k_0}(b_1)\underset{(15)}{=}\lim\limits_{q\to\infty}\mu^{(m,\,q)}_{k_0}(b_1)\underset{(156)}{\geqslant}\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)-\rho_0$.

В частности

$$\mu^{(m_0)}_{k_0}(b_1)\geqslant\Omega^{(n-k_0+1)}(\mathfrak{H}_1,\, b_0)-\rho_0, \qquad (157)$$

так как $m_0\in\{1,\ \ldots,\ m_1\}\underset{(42)}{\subset}\{1,\ \ldots,\ s_0\}\subset\{1,\ \ldots,\ t_0 s_0\}$ (см. подпункт д)), поскольку $t_0\in\mathbf{N}$.

Неравенство (157) в сочетании с формулой (103) противоречит утверждению, содержащему формулу (34).

Полученное противоречие выведено из предположения, что для некоторых $b_0\in C$, $q\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место неравенство (17). Следовательно, доказано, что для всяких $b\in C$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ выполнено равенство

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\, b)=\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\, b). \qquad (158)$$

В силу предложений 2, 5 [2] для всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ имеют место неравенства

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\, b)\leqslant\Omega_k(\mathfrak{H},\, b)\leqslant\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\, b). \qquad (159)$$

Из (158), (159) следует, что для всяких $b \in C$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеют место равенства $\lambda_k(\mathfrak{H}, b) = \Omega_k(\mathfrak{H}, b) = \Omega^{(k)}(\mathfrak{H}, b)$., что в сочетании с утверждениями 1) и 26) п. 4 заканчивает доказательство теоремы. Теорема доказана.

Литература

1. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2132 — 2148.
2. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1344 — 1356.
3. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 2, с. 196 — 214.
4. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 3, с. 431 — 468.
5. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1394 — 1410.
6. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408 — 1416.
7. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 11, с. 1866 — 1870.
8. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 2, с. 241 — 257.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 26 января 1983 г.