УДК517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. III

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть (E, p, B) — векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot, \cdot)$). На (E, p, B) фиксируем некоторую риманову метрику.

2. Пусть $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\wp \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$, где через $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), обозначаемую через $\mathrm{Aut}\,(E, p, B)$. Напомним, что образом $\wp t$ точки $t \in \mathbf{G}$ при гомоморфизме $\wp$ является пара (X^t, χ^t), где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем:

а) $pX^t = \chi^t p$ при всяком $t \in \mathbf{G}$;

б) при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$;

в) $X^{t+s} = X^t X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ при всяких $t \in \mathbf{G}$; $s \in \mathbf{G}$.

Вместо X^t будем писать X, вместо χ^t — χ.

Потребуем от гомоморфизма $\wp$, чтобы для некоторой функции $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}$, удовлетворяющей при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ равенству

$$a(\chi^t b) = a(b), \tag{1}$$

при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство

$$\left\| X^t[b] \right\| \le \exp(|t| a(b)) \tag{2}$$

Так как $(X^t[b])^{-1} = X^{-t}[\chi^t b]$ $(b \in B,\ t \in \mathbf{G})$, то наложенное условие перейдет в эквивалентное, если вместо «при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство (2)» написать: «при всяких[*] $b \in B$, $t \in \mathbf{G}_*^+$ выполнялось неравенство

$$\max\left\{\left\| X^t[b] \right\|, \left\| X^t[b] \right\|^{-1}\right\} \le \exp(ta(b))». \tag{2'}$$

3. Для всякого[**] $\theta \in \mathbf{G}_*$ определим гомоморфизм $\wp_\theta \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ формулой

$$\wp_\theta s = \wp(s\theta) = \left(X^{s\theta}, \chi^{s\theta}\right) \qquad (s \in \mathbf{Z}) \tag{3}$$

Так как по условию при всяком $t \in \mathbf{G}$ выполнено неравенство $\left\| X^t[b] \right\| \le \exp(|t| a(b))$, то при всяком $s \in \mathbf{Z}$ выполнено неравенство $\left\| X^{s\theta}[b] \right\| \le \exp(|s| \cdot |\theta| a(b))$, т. е. гомоморфизм $\wp_\theta$ удовлетворяет условию п. 2 (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)) с функцией $a_\theta(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$ (вместо $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$), определенной формулой $a_\theta(b) \underset{def}{=} |\theta| a(b)$ $(b \in B)$.

4. Показатель Ляпунова $\lambda_k(\wp, b)$ гомоморфизма $\wp \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ определяется при всяких $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$ формулой

---

[*] $\mathbf{G}_*^+ = \mathbf{R}_*^+$, если $\mathbf{G} = \mathbf{R}$; $\mathbf{G}_*^+ = \mathbf{N}$, если $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$; $\mathbf{R}_*^+(\mathbf{N})$ — множество всех вещественных (целых) чисел > 0.

[**] $\mathbf{G}_* = \mathbf{G} \setminus \{0\}$.

$$\lambda_k(\wp,b) \underset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k+1}} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right|; \tag{4}$$

здесь $G_i(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие i-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, через $\mathbf{R}_*^i$ обозначается множество всех ненулевых векторов векторного пространства $\mathbf{R}^i$, в выражении $t\to+\infty$ имеется в виду, что $t\in\mathbf{G}$ (напомним, что $\mathbf{G}=\mathbf{R}$ либо $\mathbf{G}=\mathbf{Z}$), $|\cdot|$ — норма, индуцированная фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B).

Доказательство корректности приведенного определения дано в [1]. Там же доказано, что $|\lambda_k(\wp, b)| \le a(b)$ при всяких $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$.

5. Центральный показатель $\Omega_k(\wp, b)$ гомоморфизма $\wp\in\mathrm{Hom}\ (\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\ (E, p, B))$ определяется при всяких $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$ формулой (подробности см. в [2])

$$\Omega_k(\wp,b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \inf_{\tau\in\mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\right\| \tag{5}$$

Смысл некоторых обозначений разъяснен выше после формулы (4); дополнительно поясним следующее: через X_C^{τ} обозначается сужение на множество C отображения X^{τ}. Вместо X^{τ} пишем также (это отмечено выше) $X^{\tau}[b]$. Так как $X^t[b]$: $p^{-1}(b) \overset{p^{-1}(b)}{\to} p^{-1}(\chi^t b)$ — линейное отображение, то $X^t\mathbf{R}^{n-k+1}$ — векторное подпространство векторного пространства $p^{-1}(\chi^t b)$. Норма линейного отображения $X^{\tau}_{\mathbf{R}^i}$ определяется стандартным образом: $\left\|X^{\tau}_{\mathbf{R}^i}\right\| \underset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\xi\in\mathbf{R}_*^i}\left(\left|X^{\tau}\xi\right|\cdot\left|\xi\right|^{-1}\right)$. Вместо $\Omega_1(\wp, b)$ пишется также $\Omega(\wp, b)$.

6. Положив для всякого $\xi\in E$

$$\lambda(\wp,\xi) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\dfrac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right| \text{ при } |\xi|\ne 0, \\ -\infty \text{ при } |\xi| = 0 \end{cases} \tag{6}$$

(в выражении $t\to+\infty$ имеется в виду, что $t\in\mathbf{G}$), рассмотрим при всяких $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$ множество

$$E_{n-k+1}(\wp,b) \underset{\text{def}}{=} \left\{\xi\in p^{-1}(b) : \lambda(\wp,\xi)\le\lambda_k(\wp,b)\right\} \tag{7}$$

В [1, § 1]*) доказано, что $E_{n-k+1}(\wp, b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$.

Для всяких $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$ определяется число

$$\Omega^{(k)}(\wp,b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\| \tag{8}$$

7. Пусть $b\in B$, $\theta\in\mathbf{G}_*^+$ таковы, что $\chi^{\theta}b = b$. Рассмотрим гомоморфизм $\wp\in\mathrm{Hom}\ (\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}\ (E, p, B))$. Так как $\chi^{\theta}b = b$, то $p^{-1}(\chi^{\theta}b) = p^{-1}(b)$.

Оператором монодромии гомоморфизма $\wp\in\mathrm{Hom}\ (\mathrm{Z}, \mathrm{Aut}\ (E, p, B))$ в точке b называется отображение

$$M(\wp_{\theta},b) \underset{\text{def}}{=} X^{\theta}[b] : p^{-1}(b)\to p^{-1}(b). \tag{9}$$

Оператор монодромии $M(\wp_{\theta}, b)$ —автоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$, так как $(X^{\vartheta}, \chi^{\theta}) \in \mathrm{Aut}\ (E, p, B)$.

*) В [1] для множества $\left\{\xi\in p^{-1}(b) : \lambda(\wp,\xi)\le\lambda_k(\wp,b)\right\}$ применено обозначение $E\left\{\xi\in p^{-1}(b) : \lambda(\wp,\xi)\le\lambda_k(\wp,b)\right\}$.

Сравнивая это определение с определением 1 [3], видим, что оператор монодромии гомоморфизма $\wp \in \mathrm{Hom}$ (Z, Aut *(E, p, B)*) в точке *b*, как он здесь определен, есть оператор монодромии автоморфизма *(X^{ϑ},* χ^{θ}) векторного расслоения *(E, p, B)* в неподвижной точке *b* гомеоморфизма χ^{θ}, определенный в [3, определение 1].

Напомним, что собственные значения оператора монодромии *M*($\wp_\theta$, *b*) называются мультипликаторами автоморфизма (X^{ϑ}, χ^{θ}) в точке *b.* Условимся нумеровать мультипликаторы автоморфизма (X^{ϑ}, χ^{θ}) в точке *b* (каждое собственное значение оператора монодромии *M*($\wp_\theta$, *b*) берется при этом столько раз, какова его кратность) в порядке невозрастания их модулей: при этом соглашении *k*-й мультипликатор автоморфизма (X^{ϑ}, χ^{θ}) в точке *b* будем обозначать через $\mu_k[\wp_\theta, b]$, а само это соглашение запишется тогда в виде цепочки неравенств:

$$\left|\mu_1\left[\wp_\theta, b\right]\right| \geq \ldots \geq \left|\mu_n\left[\wp_\theta, b\right]\right| \tag{10}$$

§ 1. Пусть гомоморфизм $\wp \in \mathrm{Hom}$ (G, Aut (*E, p, B*)), где **G** есть группа **R** или группа **Z**, удовлетворяет условию п. 2 введения (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)).

Лемма. *Пусть* $b \in B$, $\theta \in \mathbf{G}_*^+$ *таковы, что* $\chi^{\theta} b = b$. *Тогда* $\lambda_k(\wp_\theta, b) = \Omega_k(\wp_\theta, b) = \Omega^{(k)}(\wp_\theta, b)$ *при всяком* $k \in \{1, \ldots, n\}$**).

Доказательство. Пусть даны $b \in B$, $\theta \in \mathbf{G}_*^+$ такие, что $\chi^{\theta} b = b$. Пусть дано любое $k \in \{1, \ldots, n\}$.

1. В силу предложений 2, 5 [2] имеет место цепочка неравенств

$$\lambda_k(\wp_\theta, b) \leq \Omega_k(\wp_\theta, b) \leq \Omega^{(k)}(\wp_\theta, b). \tag{11}$$

2. Слой $p^{-1}(b)$, а вместе с ним и его векторное подпространство $E_{n-k+1}(\wp_\theta, b)$ наделены евклидовой структурой, поскольку на векторном расслоении (*E, p, B*) задана риманова метрика; скалярное произведение в $p^{-1}(b)$ обозначаем здесь через $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Возьмем какой-нибудь ортонормированный базис $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_q\}$ евклидова пространства $E_{n-k+1}(\wp_\theta, b)$. Разложив произвольный вектор $\zeta \in E_{n-k+1}(\wp_\theta, b)$ по этому базису, получим при всяком $m \in \mathbf{N}$:

$$\left|X^{m\theta}\zeta\right| = \left|X^{m\theta}\left(\sum_{j=1}^{q}\left\langle\zeta, \zeta_j\right\rangle\zeta_j\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{q}\left\langle\zeta, \zeta_j\right\rangle X^{m\theta}\zeta_j\right| \leq \sum_{j=1}^{q}\left|\left\langle\zeta, \zeta_j\right\rangle\right| \cdot \left|X^{m\theta}\zeta_j\right| \leq |\zeta|\sum_{j=1}^{q}\left|X^{m\theta}\zeta_j\right|$$

(при выводе последнего равенства этой цепочки использовано неравенство $\left|\left\langle\zeta, \zeta_j\right\rangle\right| \leq |\zeta|$).
Отсюда при всяком $m \in \mathbf{N}$ следует неравенство

$$\left\|X^{m\theta}_{E_{n-k+1}(\wp_\theta, b)}\right\| \leq \sum_{j=1}^{q}\left|X^{m\theta}\zeta_j\right| . \tag{12}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{\substack{m\to+\infty \\ (m\in N)}}\frac{1}{m}\ln\left\|X^{m\theta}_{E_{n-k+1}(\wp_\theta, b)}\right\| \underset{(12)}{\leq} \varlimsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\ln\sum_{j-1}^{q}\left|X^{m\theta}\zeta_j\right| \leq \varlimsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\ln\left(q\max_{j\in\langle 1,\ldots,q\rangle}\left|X^{m\theta}\zeta_j\right|\right) = \\
&= \varlimsup_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{m}\ln q + \frac{1}{m}\ln\max_{j\in\langle 1,\ldots,q\rangle}\left|X^{m\theta}\zeta_j\right|\right) = \varlimsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\ln\max_{j\in\langle 1,\ldots,q\rangle}\left|X^{m\theta}\zeta_j\right| = \qquad (13) \\
&= \varlimsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\max_{j\in\langle 1,\ldots,q\rangle}\left|X^{m\theta}\zeta_j\right|\frac{1}{m}\ln\left|X^{m\theta}\zeta_j\right| = \max_{j\in\langle 1,\ldots,q\rangle}\varlimsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\ln\left|X^{m\theta}\zeta_j\right| = \max_{j\in\langle 1,\ldots,q\rangle}\lambda\left(\wp_\theta, \zeta_j\right) \leq \lambda_k\left(\wp_\theta, b\right).
\end{aligned}$$

**) Для $k = 1$ эта лемма является вариантом предложения, составляющего содержание примера 8.1.3 [4, с. 118—119].

Последнее неравенство следует из формулы (7) (для $\wp_\theta$ вместо $\wp$), так как $\zeta_j \in E_{n-k+1}(\wp_\theta, b)$ (j∈(1, ..., q}), а предпоследнее равенство — из формулы $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \max\limits_{j\in\langle 1,\dots,q\rangle} a_m^{(j)} = \max\limits_{j\in\langle 1,\dots,q\rangle} \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} a_m^{(j)}$, верной для всяких числовых последовательностей $\left\{a_m^{(j)}\right\}_{m\in N}\left(j \in \{1,\dots,r\}\right)$, где r — произвольное натуральное число).

Итак, доказано неравенство

$$\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}} \frac{1}{m}\ln\left\|X^{m\theta}_{E_{n-k+1}(\wp_\theta,b)}\right\| \le \lambda(\wp_\theta, b). \tag{14}$$

2. Докажем, что для всякого $k\in$ (1, ..., n} имеет место формула

$$M(\wp_\theta, b)E_{n-k+1}(\wp_\theta, b) = E_{n-k+1}(\wp_\theta, b). \tag{15}$$

Положим $l \underset{\text{def}}{=} \min\left\{s \in \{1,\dots,k\} : \lambda_s(\wp_\theta, b) = \lambda_k(\wp_\theta, b)\right\}$. Тогда в силу формулы (7) (примененной к гомоморфизму $\wp_\theta$ вместо $\wp$) имеет место равенство

$$E_{n-k+1}(\wp_\theta, b) = E_{n-l+1}(\wp_\theta, b). \tag{16}$$

а) Если окажется, что l = 1, то $E_{n-k+1}(\wp_\theta, b) \underset{(16)}{=} E_n(\wp_\theta, b) = p^{-1}(b)$ (последнее равенство следует из формулы (20) статьи [2]), и тогда формула (15) следует из того, что $M(\wp_\theta, b)$ — автоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$.

б) Пусть оказалось, что l > 1. Тогда $\lambda_{i-1}(\wp_\theta, b) > \lambda_i(\wp_\theta, b)$, следовательно, dim $E_{n-k+1}(\wp_\theta, b) = n - l + 1$ (см. [1], предложение 8) и тогда $E_{n-k+1}(\wp_\theta, b)$ обозначается через $\mathbf{R}_0^{n-i+1}(\wp_\theta, b)$ (см. [1], формулы (12), (13)). Формула (15) эквивалентна поэтому (в силу формулы (16)) формуле $M(\wp_\theta, b)\mathbf{R}_0^{n-i+1}(\wp_\theta, b) = \mathbf{R}_0^{n-i+1}(\wp_\theta, b)$, которая доказана в п. 9 доказательства предложения 2 [3] (в цитируемом месте эта формула имеет вид $M[b]\mathbf{R}_0^k(X, \chi; b) = \mathbf{R}_0^k(X, \chi; b)$; теперь в ней надо взять n—l+1 вместо k и (X^ϑ, χ^θ) вместо (X, χ); напомним, что соответствие между обозначениями, принятыми здесь, и обозначениями, принятыми в цитируемой статье, устанавливается формулами: $M(\wp_\theta, b) = M[b]$, $\mathbf{R}_0^k(\wp_\theta, b) = \mathbf{R}_0^k\left(X^\theta, \chi^\theta; b\right)$. Формула (15) доказана.

4. Пусть дано произвольное $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$. Возьмем $m_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такое, что

$$\frac{1}{m_\varepsilon}\ln\left\|X^{m_\varepsilon\theta}_{E_{n-k+1}(\wp_\theta,b)}\right\| < \lambda_k(\wp_\theta, b) + \varepsilon \tag{17}$$

(существование такого $m_\varepsilon \in \mathbf{N}$ следует из формулы (14)). Для всякого*) $s\in\mathbf{Z}^+$ имеем: $X^{s\theta}E_{n-k+1}(\wp_\theta, b) \underset{(9)}{=} (M(\wp_\theta, b))^s E_{n-k+1}(\wp_\theta, b) \underset{(15)}{=} E_{n-k+1}(\wp_\theta, b)$, поэтому из неравенства (17) следует, что при всяком $j\in\mathbf{Z}^+$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{m_\varepsilon}\ln\left\|X^{m_\varepsilon\theta}_{X^{jm_\varepsilon\theta}E_{n-k+1}(\wp_\theta,b)}\right\| < \lambda_k(\wp_\theta, b) + \varepsilon \tag{18}$$

Следовательно, при всяком $m\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{mm_\varepsilon}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{m_\varepsilon\theta}_{X^{jm_\varepsilon\theta}E_{n-k+1}(\wp_\theta,b)}\right\| < \lambda_k(\wp_\theta, b) + \varepsilon$$

Поэтому имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{mm_\varepsilon}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{m_\varepsilon\theta}_{X^{jm_\varepsilon\theta}E_{n-k+1}(\wp_\theta,b)}\right\| \le \lambda_k(\wp_\theta, b) + \varepsilon \tag{19}$$

---

*) $\mathbf{Z}^+ \underset{\text{def}}{=} \{s \in \mathbf{Z} : s \ge 0\}$

Учитывая, что $m_\varepsilon \in \mathbf{N}$, имеем

$$\Omega^{(k)}(\wp_\theta, b) \overset{(3)}{\underset{(8)}{=}} \inf_{\tau\in N} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau\theta}_{X^{j\tau\theta}E_{n-k+1}(\wp_\theta, b)} \right\| \underset{(19)}{\leq} \lambda_k(\wp_\theta, b) + \varepsilon \tag{20}$$

Так как $\varepsilon \in \mathbf{R}^+_*$ произвольно (см. начало п. 4), то $\Omega^{(k)}(\wp_\theta, b) \leq \lambda_k(\wp_\theta, b)$.

Сопоставлением этого неравенства с цепочкой неравенств (11) заканчивается доказательство леммы. Лемма доказана.

Предложение. *Пусть точка $b \in B$ такова, что для некоторого $\varepsilon \in \mathbf{G}^+_*$ выполнено равенство $\chi^\vartheta b=b$. Тогда $\lambda_k(\wp, b) = \Omega_k(\wp, b) = \Omega^{(k)}(\wp, b)$ при всяком $k \in$* {l, ..., *n*}.

Доказательство. Предложение следует из леммы в силу имеющих место при всяких $\theta \in \mathbf{G}^+_*$, *b*∈*B*, *k*∈{l, ..., *n*} равенств $\lambda_k(\wp_\theta, b) = \theta\lambda_k(\wp, b)$ (лемма 3 [1]), $\Omega_k(\wp_\theta, b) = \theta\Omega_k(\wp, b)$ (предложение 7 [2]), $\Omega^{(k)}(\wp_\theta, b) = \theta\Omega^{(k)}(\wp, b)$ (предложение 6 [2]). Предложение доказано.

Литература

1. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. X.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2132—2148.

2. Миллионщиков В. М. О типичных свойствах условной экспоненциальной устойчивости. I. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1344—1356.

3. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. XI.— Дифферент уравнения, 1983, т. 19, № 2, с. 196—214.

4. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Земыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 30 декабря 1982 г.