Доклады Академии наук СССР
1966. Том 166, № 1

УДК 517.941.92 *МАТЕМАТИКА*

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 VII 1965)

А. М. Ляпунов (см. ([1]), стр. 184) ввел понятие характеристического показателя решения системы

$$dx/dt = A(t)x \quad \text{в} \quad E^n \quad \left(\|A(t)\| \leqslant a;\ t \geqslant t_0\right). \tag{1}$$

Совокупность характеристических показателей системы (1), как показал Перрон (см. ([1]), стр. 199), вообще говоря, неустойчива (и потому на самом деле не характеризует системы): существуют (для некоторых систем (1)) системы

$$dy/dt = A(t)y + \varphi(y,t); \quad \|\varphi(y,t)\| \leqslant g(t)\|y\| \tag{2}$$

со сколь угодно малой $\sup\limits_{t \geqslant t_0} g(t)$, у которых совокупность характеристических показателей сильно отличается от совокупности характеристических показателей системы (1). После появления этого результата Перрона началось развитие теории характеристических показателей в следующем направлении: стали искать класс систем (1), для которых совокупность характеристических показателей устойчива. После проверки гипотезы, возникшей из примера Перрона и казавшейся ошибочной (см. ([8])), в работах Б. Ф. Былова, Р. Э. Винограда, Д. М. Гробмана ([5,6,9,10,12]) были найдены эти системы — это системы с условием «интегральной разделенности». Окончательный результат см. в ([9,10]).

В настоящей работе делается попытка провести исследование в другом направлении: «подправить» понятие совокупности характеристических показателей так, чтобы оно давало устойчивую характеристику л ю б о й системы (1). При этом наиболее законченный результат получен для систем с медленно меняющимися коэффициентами (см. ниже теорему 4), к которым относится и система в примере Перрона (см. ([1]), стр. 199).

Мы существенно используем понятие предельного решения (определение предельного решения, которым мы пользуемся, см. в ([13])). Укажем на физический смысл предельных решений. Он состоит в следующем. Пусть система (1) описывает некоторую материальную (как говорят, «физическую») систему. При измерении величины x мы ограничены временем, и точность измерений ограничена снизу; поэтому траекторию предельного решения мы не отличим от траектории истинного решения, если t больше некоторого t_1 (система достаточно «старая»). Как этот физический смысл, так и результаты ([13]) показывают, что нецелесообразно рассматривать только истинные решения неавтономных систем, не включая в рассмотрение предельных решений. Истинные и предельные решения мы будем называть обобщенными решениями.

Из теоремы 1 работы ([14]) видно, что для совпадения асимптотик систем (1) и (2) иногда необходимо требовать экспоненциального убывания $g(t)$. Следующая теорема показывает, что совокупность предельных решений системы (1) является гораздо более устойчивой характеристикой системы.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, *причем*

$$g_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \int^{\infty} g_2(\tau)\,d\tau < \infty.$$

Тогда множество предельных решений системы (2) совпадает с множеством предельных решений системы (1).

Доказательство легко получается из известной формулы

$$y(t)-x(t)=\int_{t_1}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)\varphi(y(\tau),\tau)d\tau .$$

Пусть $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$ — произвольная фундаментальная система решений системы (1). По способу Перрона — Винограда ([7]) приведем систему (1) к треугольному виду

$$dz/dt = B(t)z, \quad \text{где } B(t)=\begin{pmatrix} b_{11}(t) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nn}(t)\end{pmatrix}.$$

При этом $\|e_1(t)\| = \exp\left[\int_{t_0}^{t} b_{11}(\tau)d\tau\right]$.

Рассмотрим теперь систему

$$du_i/dt = b_{ii}(t)u_i \quad (i=1,2,\dots,n). \qquad (1')$$

Обозначим

$$h_i(t)=\Bigl\{0\dots\underbrace{\exp\left[\int_{t_0}^{t} b_{ii}(\tau)d\tau\right]}_{\text{на } i\text{-м месте}}\dots 0\Bigr\}.$$

Пусть $t_k \geqslant t_0$ и пусть последовательность $\alpha_{i,k}\, h_i(t_k+t)$ при каждом $i=1,2,\dots,n$ сходится равномерно на отрезках к некоторой вектор-функции $h_i^*(t)$. Пусть система полученных таким образом (предельных в случае $t_n \to \infty$ и обычных в противном случае) решений системы (1') $h_1^*(t),\dots,h_n^*(t)$ удовлетворяет условию. (Обозначим $K_{i,1}(t,\tau) \equiv \|h_i^*(t)\|\cdot\|h_1^*(\tau)\| \div$ $\div \|h_i^*(\tau)\|\cdot\|h_1^*(t)\|$.) При каждом $i=2,\dots,n$:

либо

$$K_{i,1}(t,\tau) \geqslant Ce^{\varepsilon(t-\tau)} > 0$$

при всех $t \geqslant \tau \geqslant t_0$ и некотором $\varepsilon > 0$;

либо

$$K_{i,1}(t,\tau) \leqslant Ce^{-\varepsilon(t-\tau)} \qquad (*)$$

при всех $t \geqslant \tau \geqslant t_0$ и некотором $\varepsilon > 0$;

либо

$$C_\varepsilon e^{-\varepsilon(t-\tau)} \leqslant K_i(t-\tau) \leqslant C_\varepsilon' e^{\varepsilon(t-\tau)}$$

при всех $t \geqslant \tau \geqslant t_0$ и всяком $\varepsilon > 0$.

Тогда характеристический показатель обобщенного решения системы (1) $e_1^*(t)=\lim_{k\to\infty}\alpha_{1,k^{e}1}(t_k+t)$, т.е. $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\dfrac{\ln\|e_1^*(t)\|}{t}$ назовем грубым показателем системы (1).

Определение 1. Множество характеристических показателей всех обобщенных решений системы (1) назовем спектром системы (1).

Определение 2. Множество грубых показателей системы (1) назовем грубым спектром системы (1).

Это название оправдывается следующей теоремой.

Теорема 2. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если

$$g(t)=g_1(t)+g_2(t) \quad g_1(t)<\delta, \quad \int_t^\infty g_2(\tau)d\tau < \delta (t \geqslant t_0)$$

и λ принадлежит грубому спектру системы (1), то существует обобщенное решение системы (2) с характеристическим показателем $\mu \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$.

Доказательство. Известным способом (см. ([9], [10])) сводим теорему к случаю диагональной матрицы $A(t)$. Если наложить некоторые дополнительные ограничения, то утверждение теоремы следует из теоремы Р. Э. Винограда (см. ([9])). В общем случае доказательство этого утверждения проводится с использованием методики работы ([14]).

Следующая теорема показывает, в частности, что грубый спектр никогда не пуст.

Теорема 3. Особый характеристический показатель (см. ([2])) принадлежит грубому спектру Λ системы и совпадает с $\sup\Lambda$.

Заметим, что аналогично особому характеристическому показателю Персидского — Крейна можно определить величину $\inf\Lambda$.

Доказательство проводится с помощью следующей леммы.

Лемма. Пусть $p_n(t)$ $(t \geqslant t_0)$ непрерывные функции, $|p_n(t)| \leqslant P < \infty$.

Пусть $t_n \geqslant \tau_n \geqslant t_0$, $t_n - \tau_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ и

$$\lambda_n \frac{1}{t_n - \tau_n} \int_{\tau_n}^{t_n} p_n(\tau)d\tau \underset{n\to\infty}{\to} \lambda .$$

Тогда существует последовательность θ_{n_k} такая, что

$$\int_{\theta_{n_k}}^{\theta_{n_k}+t} p_n(\tau)d\tau \underset{n_k\to\infty}{\to} q(t) \geqslant \lambda t$$

равномерно на каждом отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для доказательства леммы надо взять $\delta_n \to 0$, но так, чтобы $\delta_n(t_n - \tau_n) \to \infty$, а затем положить $\theta_n = \sup$ tex $t \in [\tau_n, t_n]$, для которых

$$\int_{\tau_n}^{t} p_n(\tau)d\tau \leqslant (\lambda_n - \delta_n)(t - \tau_n),$$

после чего выбрать подпоследовательность n_k, пользуясь теоремой Асколя (см. ([3]), Ch X, § 4, theoreme 1).

Рассмотрим системы с медленно меняющимися коэффициентами. Так называется (определение принадлежит К. П. Персидскому, см., например, ([2]), стр. 105) система (1), если для всяких $\varepsilon > 0$ и T существует θ такое, что $\|A(t) - A(t_1)\| < \varepsilon$ при $t_1 > 0$, $|t - t_1| < T$.

Теорема 4. У системы с медленно меняющимися коэффициентами спектр совпадает с грубым спектром и совпадает с множеством частичных пределов $\lambda(t)$ при $t \to +\infty$, где $\lambda(t)$ — собственное значение матрицы $A(t)$.

Доказательство. Если $\lambda_1 = \lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t)$, то легко найти $h_1^*(t), \ldots, h_n^*(t)$ такие, что λ_1 — характеристический показатель $h_1^*(t)$ и выполнено условие $(*)$. С другой стороны, легко показать, что спектр системы с медленно меняющимися коэффициентами входит в множество $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t)$. *ч.т.д. У М. Г. Крейна (см. ([2]), стр. 104—109) фактически доказано, что для системы с медленно меняющимися коэффициентами спектр (см. выше определение 1) лежит левее точки* $\sup \lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t)$.

Пример *Перрона (см. ([4]); (*) стр. 199)*

$$dx/dt = (\sin\ln t + \cos\ln t)x,$$
$$dy/dt = (-\sin\ln t + \cos\ln t)y$$

дает систему с медленно меняющимися коэффициентами $\left(\|A'(t)\| \underset{t\to\infty}{\to} 0\right)$.

Пользуясь *теоремой 4, грубый спектр легко вычислить — это отрезок* $\left[-\sqrt{2},+\sqrt{2}\right]$.

Выражаю благодарность В. В. Немыцкому за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 VII 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 2-е изд., М.— Л., 1949. [2]М. Г. Крейн, Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, АН УССР, 1964. [3] N. Bourbaki, Topologie generale (Fascicule de resultats), Paris, 1953. [4] O. Perron, Math. Zs., 32 (1930). [6] Б. Ф. Былов, Прикл. матем. и мех., 14, в. 4 (1950). [6] Б. Ф. Былов, Диссертация, **МГУ,** 1953. [7] Р. Э. Виноград, УМН, 9, в. 2 (60) (1954). [8] Р. Э. Виноград, Прикл. матем. и мех., 17, в. 5 (1953). [9] Р. Э. Виноград, ДАН, **119,** № 4 (1958). [10] Р. Э. Виноград, Докторская диссертация, МГУ, 1958. [11] Р. Э. Виноград, Матем. сборн., 42, в. 2 -(1957). [12] Д. М. Гробман, Матем. сборн., 30 (72), в. 1 (1952). [13] В. М. Миллионщиков, ДАН, **161,** № 1 (1965). [14]В. М. Миллионщиков, ДАН, **162,** № 2 (1965).