УДК 517.926.4

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. XII

Эта, заключительная, статья цикла представляет собой сводку основных результатов статей [1—11].

ГЛАВА 1

Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие*). Через S обозначается множество всех векторных полей F класса C^1 на V^n, удовлетворяющих условию**) $\sup\limits_{x\in V^n}\|\nabla F(x)\|<+\infty$.

В множестве S определяется расстояние

$$d\,(F,\ G)\underset{\text{def}}{=}|F(x_0)-G(x_0)|+\sup_{x\in V^n}\|\nabla F(x)-\nabla G(x)\|,$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n.

Всякое векторное поле $F\in S$ индуцирует гладкое (класса C^1) действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n.

Для всяких $F\in S$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ определяется *показатель Ляпунова****)*:

$$\lambda_{n-k+1}((F,\ x))\underset{\text{def}}{=}\min_{\mathbf{R}^k\in G_k(T_xV^n)}\ \max_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^k_*}\ \varlimsup_{\substack{t\to+\infty\\(t\in\mathbf{R})}}\frac{1}{t}\ln|df^t\mathfrak{x}|,\qquad(1)$$

где $G_k(T_xV^n)$ — множество всех k-мерных векторных подпространств касательного пространства T_xV^n многообразия V^n в точке x, $\mathbf{R}^k_*=\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$.

Через $S\times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $d\,(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n.

Т е о р е м а 1. *При всяком $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_i(\cdot):S\times V^n\to\mathbf{R}$ есть бэровская функция второго класса.*

Т е о р е м а 2. *В пространстве $S\times V^n$ найдется всюду плотное множество D типа G_δ такое, что при всяком $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция****) $\lambda_i|_D(\cdot):D\to\mathbf{R}$ непрерывна.*

Т е о р е м а 3. *В пространстве $S\times V^n$ найдется всюду плотное множество C типа G_δ такое, что при всяком $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_i(\cdot):S\times V^n\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в каждой точке $(F,\ x)\in C$.*

Для всякого $J\in S$ через S_J обозначается подмножество множества S, состоящее из векторных полей, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in V^n}|F(x)-J(x)|<+\infty$ (если V^n компактно

---

*) Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^2, риманова метрика — классу C^1.

**) Через $\nabla F(x)$ обозначается ковариантный дифференциал векторного поля F в точке x. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

***) Многие авторы вместо λ_{n-k+1} пишут λ_k.

****) Через $\lambda_i|_D(\cdot)$ обозначается сужение функции $\lambda_i(\cdot)$ на множество D.

(т. е. — замкнутое многообразие), то $S_J = S$ для всякого $J \in S$).

Через $d_1(\cdot,\ \cdot)$ обозначается расстояние в S_J, определяемое формулой

$$d_1(F,\ G) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x\in V^n} |F(x) - G(x)| + \sup_{x\in V^n} \|\nabla(F-G)(x)\|.$$

Через $S_J \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_J (с топологией, индуцированной метрикой $d_1(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n.

Для всякого $J \in S$ для всяких $F \in S_J$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *показатель Ляпунова* $\lambda_{n-k+1}((F,\ x))$ определяется формулой (1).

Для всякого $J \in S$ имеют место следующие три теоремы.

Т е о р е м а 1_J. *При всяком $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_i(\cdot) : S_J \times V^n \to \mathbf{R}$ есть бэровская функция второго класса.*

Т е о р е м а 2_J. *В пространстве $S_J \times V^n$ найдется всюду плотное множество D_J типа G_δ такое, что при всяком $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_i|_{D_J}(\cdot) : D_J \to \mathbf{R}$ непрерывна.*

Т е о р е м а 3_J. *В пространстве $S_J \times V^n$ найдется всюду плотное множество C_J типа G_δ такое, что при всяком $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_i(\cdot) : S_J \times V^n \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в каждой точке $(F,\ x) \in C_J$.*

ГЛАВА 2

Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие*). Пусть на $\mathfrak{B} \times V^n$, где $\mathfrak{B}$ — некоторое полное метрическое пространство, задана некоторая динамическая система g^t (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$), удовлетворяющая тождеству

$$pr_2 g^t(\beta,\ x) = x \quad (\forall t \in \mathbf{R},\ \forall \beta \in \mathfrak{B},\ \forall x \in V^n)$$

(где pr_2 — проекция произведения $\mathfrak{B} \times V^n n$ на второй сомножитель).

Множество S всех отображений $F(\cdot)$ пространства $\mathfrak{B}$ (в множество векторных полей F на V^n) таких, что

1) отображения**) $\varphi_F : \mathfrak{B} \times V^n \to TV^n$, $\psi_F : \mathfrak{B} \times V^n \to T_1^1 V^n$, определенные формулами***) $\varphi_F(\beta,\ x) \underset{\mathrm{def}}{=} F(\beta)(x)$, $\psi_F(\beta,\ x) \underset{\mathrm{def}}{=} \nabla F(\beta)(x)$ непрерывны;

2) $\sup\limits_{\substack{x\in V^n \\ \beta\in\mathfrak{B}}} \|\nabla F(\beta)(x)\| < +\infty$, наделим структурой метрического пространства, зафиксировав произвольную точку $x_0 \in V^n$ и определив расстояние формулой

$$d_1(F(\cdot),\ G(\cdot)) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\beta\in\mathfrak{B}} |F(\beta)(x_0) - G(\beta)(x_0)| + \sup_{\substack{x\in V^n \\ \beta\in\mathfrak{B}}} \|\nabla F(\beta)(x) - \nabla G(\beta)(x)\|.$$

Обозначим через $f(\theta,\ \tau,\ F(\cdot);\ \beta)$ оператор Коши дифференциального уравнения $\dot{x} = F(pr_1 g^t(\beta,\ x))(x)$, где pr_1 — проекция произведения $\mathfrak{B} \times V^n$ на первый сомножитель (напомним, что оператор Коши $f(\theta,\ \tau)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = F(t)(x)$)

---

*) Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^2, риманова метрика — классу C^1.

**) Через $T_1^1 V^n$ обозначаем тензорное расслоение (пучок) типа (1.1) над многообразием V^n (1 раз ковариантный, 1 раз контравариантный тензор в пространстве $\mathbf{R}^n$ стандартным образом отождествляется с линейным отображением $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$).

***) Через $F(\beta)(x)$ обозначается значение векторного поля $F(\beta)$ в точке $x \in V^n$, через $\nabla F(\beta)(x)$ — ковариантный дифференциал векторного поля $F(\beta)$ в точке $x \in V^n$.

определяется формулой $f(\theta,\ \tau)\,x(\tau)=x(\theta)$, где $x(\cdot)$ пробегает множество всех решений уравнения $\dot{x}=F(t)\,(x)$).

Для всяких $F(\cdot)\in S$, $\beta\in\mathfrak{B}$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ определяется *показатель Ляпунова*

$$\lambda_{n-k+1}(F(\cdot),\ \beta,\ x)\underset{\text{def}}{=}$$

$$\underset{\text{def}}{=}\min_{\mathbf{R}^k\in G_k(T_xV^n)}\ \max_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^k_*}\ \overline{\lim_{\substack{\theta\to+\infty\\(\theta\in\mathbf{R})}}}\frac{1}{\theta}\ln|\,df(\theta,\ 0;\ F(\cdot);\ \beta)\,\mathfrak{x}\,|,$$

где $G_k(T_xV^n)$ — множество всех k-мерных векторных подпространств касательного пространства T_xV^n многообразия V^n в точке x, $\mathbf{R}^k_*=\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$.

Через $S\times\mathfrak{B}\times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $d\,(\cdot,\ \cdot)$), $\mathfrak{B}$ и V^n (как топологических пространств).

Т е о р е м а 1. *При всяком $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_i(\cdot):S\times\mathfrak{B}\times V^n\to\mathbf{R}$ есть бэровская функция второго класса*:

Т е о р е м а 2. *В пространстве $S\times\mathfrak{B}\times V^n$ найдется всюду плотное множество D типа G_δ такое, что при всяком $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_i|_D(\cdot):D\to\mathbf{R}$ непрерывна*.

Т е о р е м а 3. *В пространстве $S\times\mathfrak{B}\times V^n$ найдется всюду плотное множество C типа G_δ такое, что при всяком $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_i(\cdot):S\times\mathfrak{B}\times V^n\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в каждой точке $(F(\cdot),\ \beta,\ x)\in C$*.

В рассмотренной в этой главе ситуации имеют место также аналоги (обобщения) теорем 1_J—3_J главы 1.

ГЛАВА 3

§ 1. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие*). Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f:V^n\to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию**)

$$\sup_{x\in V^n}\max\{\|\,df_x\,\|,\ \|\,(df_x)^{-1}\,\|\}<+\infty.$$

В множестве S определяется расстояние

$$\tilde{d}(f,\ g)\underset{\text{def}}{=}\sup_{x\in V^n}\ \inf_{u\in G(fx,\ gx)}\{\min\{s\,(u);\ [1+\rho\,(x,\ x_0)]^{-1}+\|\,\varphi_u dg_x-df_x\,\|\};$$

здесь: x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n; $G(y,\ z)$ — множество всех кусочно-гладких кривых (путей) u, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; $s(u)$ —длина кривой (пути) u; $\rho\,(\cdot,\ \cdot)$ — расстояние между точками многообразия V^n; φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль кривой (пути) u.

З а м е ч а н и е 1. Если V^n компактно (т. е. V^n — замкнутое многообразие), то метрика $\tilde{d}\,(\cdot,\ \cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$, определяемая формулой

$$\tilde{d}_1(f,\ g)\underset{\text{def}}{=}\sup_{x\in V^n}\ \inf_{u\in G(fx,\ gx)}\{s\,(u)+\|\,\varphi_u dg_x-df_x\,\|\}.$$

---

*) Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^2, риманова метрика — классу C^1.

**) Через df_x обозначается производная отображения f в точке x. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $V^n = E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\tilde{d}(\cdot,\ \cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$, определяемая формулой[***]:

$$\tilde{\tilde{d}}(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} |\,fx_0 - gx_0\,| + \sup_{x\in E^n} \|\, df_x - dg_x \,\|\}.$$

Для всяких $f\in S$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ определяется *показатель Ляпунова*:

$$\lambda_{n-k+1}(f,x) \underset{\text{def}}{=} \min_{R^k\in G_k(T_xV^n)} \max_{\mathfrak{X}\in R^k_*} \overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}} \frac{1}{m}\ln\left|df^m\mathfrak{X}\right|, \tag{2}$$

где $G_k(T_xV^n)$ — м н о ж е с т в о всех k-мерных векторных подпространств касательного пространства T_xV^n многообразия V^n в точке x, $R^k_* = R^k\setminus\{0\}$.

Через $S\times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $\tilde{d}(\cdot,\cdot)$) и топологического пространства V^n.

Т е о р е м а 1. *При всяком $i\in\{1,\dots,n\}$ функция $\lambda_i(\cdot): S\times V^n \to R$ есть бэровская функция второго класса.*

Т е о р е м а 2. *В пространстве $S\times V^n$ найдется всюду плотное множество D типа G_δ такое, что при всяком $i\in\{1,\dots,n\}$ функция*[*] $\lambda_i\big|_D(\cdot): D\to R$ *непрерывна.*

Т е о р е м а 3. *В пространстве $S\times V^n$ найдется всюду плотное множество C типа G_δ такое, что при всяком $i\in\{1,\dots,n\}$ функция $\lambda_i\big|_D(\cdot): S\times V^n\to R$ полунепрерывна сверху в каждой точке $(f,x)\in C$.*

Для всякого $j\in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих условию $\sup_{x\in V^n}\rho(fx,jx) < +\infty$ (если V^n компактно (т. е. замкнутое многообразие), то $S_j = S$ для всякого $j\in S$).

Через $\tilde{d}(\cdot,\cdot)$ обозначается расстояние в S_j, определяемое формулой

$$\tilde{d}_1(f,g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,gx)} \left\{s(u) + \left\|\varphi_u dg_x - df_x\right\|\right\}.$$

(Если $V^n = E^n$, то $\tilde{d}_1(f,g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in E^n}(\left|fx-gx\right| + \left\|df_x - dg_x\right\|)$).

Через $S\times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_j (с топологией, индуцированной метрикой $\tilde{d}(\cdot,\cdot)$ и топологического пространства V^n.

Для всякого $j\in S$ для всяких $f\in S_j$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\dots,n\}$ *показатель Ляпунова* $\lambda_{n-k+1}((f,x))$ определяется формулой (2).

Для всякого $j\in S$ имеют место следующие три теоремы.

Т е о р е м а 1_j. При *всяком $i\in\{1,\dots,n\}$ функция $\lambda_i(\cdot): S_j\times V^n\to R$ есть бэровская функция второго класса.*

Т е о р е м а 2_j. *В пространстве $S_j\times V^n$ найдется всюду плотное множество D_j типа G_δ такое, что при всяком $i\in\{1,\dots,n\}$ функция $\lambda_i\big|_{D_j}(\cdot): D_j\to R$ непрерывна.*

[***] В случае $V^n = E^n$ касательные пространства стандартным образом отождествляются с E^n; после этого отождествления разность $df_x - dg_x$ (и норма этой разности) приобретает смысл.

[*] Через $\lambda_i\big|_D(\cdot)$ обозначается сужение функции $\lambda_i(\cdot)$ на множество D.

Т е о р е м а 3_j. *В пространстве* $S_j \times V^n$ *найдется всюду плотное множество* C_j *типа* G_δ *такое, что при всяком* $i \in \{1,...,n\}$ *функция* $\lambda_i(\cdot): S_j \times V^n \to R$ *полунепрерывна сверху в каждой* точке $(f,x) \in C_j$.

§ 2. Увеличим на 1 класс гладкости риманова многообразия V^n, т. е. потребуем, чтобы многообразие V^n принадлежало классу C^3, а риманова метрика — классу C^2.

Т е о р е м а 4. *В пространстве* $S_j \times V^n$ *найдется всюду плотное множество* M *типа* G_δ *такое, что для всяких* $(f,x) \in M$, $k \in \{1,...,n-1\}$ *имеет место альтернатива:*

либо $\lambda_{n-k}(f,x) = \lambda_{n-k+1}(f,x)$,

либо подпространство

$$l^k(f,x) \underset{\text{def}}{=} \left\{ \mathfrak{x} \in T_x V^n : \varlimsup_{\substack{m \to +\infty \\ (m \in N)}} \frac{1}{m} \ln \left| df^m \mathfrak{x} \right| \leqslant \lambda_{n-k+1}(f,x) \right\}$$

экспоненциально отделено от своего алгебраического дополнения l^{n-k} *в пространстве* $T_x \times V^n$, т. е. существуют числа $\alpha > 0, \beta > 0$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in l^k(f,x)$ и всяких целых чисел $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\left| df^t \mathfrak{x} \right| \cdot \left| df^s \mathfrak{y} \right| \geqslant \alpha \left| df^s \mathfrak{x} \right| \cdot \left| df^t \mathfrak{y} \right| \exp(\beta(t-s)).$$

Для всякого $j \in S$ имеет место следующая

Т е о р е м а 4_j. *В пространстве* $S_j \times V^n$ *найдется всюду плотное множество* M_j *типа* G_δ *такое, что для всяких* $(f,x) \in M$, $k \in \{1,...,n-1\}$ *имеет место альтернатива:*

либо $\lambda_{n-k}(f,x) = \lambda_{n-k+1}(f,x)$

либо подпространство

$$l^k(f,x) \underset{\text{def}}{=} \left\{ \mathfrak{x} \in T_x V^n \div \varlimsup_{\substack{m \to +\infty \\ (m \in N)}} \frac{1}{m} \ln \left| df^m \mathfrak{x} \right| \leqslant \lambda_{n-k+1}(f,x) \right\}$$

экспоненциально отделено от своего алгебраического дополнения l^{n-k} *в пространстве* $T_x \times V^n$, т. е. существуют числа $\alpha > 0, \beta > 0$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in l^k(f,x)$ и всяких целых чисел $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\left| df^t \mathfrak{x} \right| \cdot \left| df^s \mathfrak{y} \right| \geqslant \alpha \left| df^s \mathfrak{x} \right| \cdot \left| df^t \mathfrak{y} \right| \exp(\beta(t-s)).$$

ГЛАВА 4

§ 1. Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система (т. е. непрерывное действие группы **R**) f^t. Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру. Рассмотрим непрерывное отображение $A(\cdot): \mathfrak{B} \to \mathrm{Hom}(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$, удовлетворяющее условию[*)] $\sup_{x \in \mathfrak{B}} \|A(x)\| < +\infty$. Множество всех таких отображений $A(\cdot)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также *A)* наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой

$$d(A_1, A_2) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathfrak{B}} \|A_1(x) - A_2(x)\|.$$

[*)] Если $\mathfrak{B}$ –компакт, то это условие выполняется автоматически.

Так определенное полное метрическое пространство обозначим через S. При всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(f'x)\mathfrak{x} \quad (\mathfrak{x} \in R^n). \tag{3}$$

Обозначим через $\lambda_1(A,x) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A,x)$ *показатели Ляпунова этой* системы.

Теорема 1. При *всяком* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *функция* $\lambda_i(\cdot): S \times \mathfrak{B} \to R$ *есть бэровская функция второго класса.*

Теорема 2. *В пространстве* $S \in \mathfrak{B}$ *найдется всюду плотное множество* D *типа* G_δ *такое, что при всяком* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *функция* $\lambda_i\big|_D(\cdot): D \to R$ *непрерывна.*

Теорема 3. *В пространстве* $S \in \mathfrak{B}$ *найдется всюду плотное множество* C *типа* G_δ *такое, что при всяком* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *функция* $\lambda_i(\cdot): S \times \mathfrak{B} \to R$ *полунепрерывна сверху в каждой точке* $(A,x) \in C$.

§ 2. Теорема 4. *В пространстве* $S \in \mathfrak{B}$ *найдется всюду плотное множество* M *типа* G_δ *такое, что для всяких* $(A,x) \in M$, $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ *имеет место альтернатива:*

либо $\lambda_{n-k}(A,x) = \lambda_{n-k+1}(A,x)$,

либо подпространство $L^k(A,x)$ *векторного пространства* $L(A,x)$ *всех решений системы (3), состоящее из решений, показатели Ляпунова которых* $\leqslant \lambda_{n-k+1}(A,x)$, *экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения* (в векторном пространстве $L(A,x)$), т. е. для всякого алгебраического дополнения L^{n-k} подпространства $L^k(A,x)$ (в векторном пространстве $L(A,x)$) существуют числа $\alpha > 0, \beta > 0$ так*ие, что для всяких решений* $\mathfrak{x}(\cdot) \in L^{n-k}, \mathfrak{y}(\cdot) \in L^k(A,x)$ *для всяких вещественных чисел* $t \geqslant s \geqslant 0$ *имеет место неравенство*

$$|\mathfrak{x}(t)| \cdot |\mathfrak{y}(s)| \geqslant \alpha |\mathfrak{x}(s)| \cdot |\mathfrak{y}(t)| \exp(\beta(t-s)).$$

Литература

1. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408-1416.
2. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1587-1598.
3. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 10, 1766—1785.
4. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 3, 431—468.
5. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1981, т.-17, № 8, с. 1394-1410.
6. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 804-821.
7. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, Лз 6, с. 957-978.
8. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 8, 1330—1345.
9. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1982, т, 18, № 9, 1507—1548.
10. Миллионщиков В. М.—Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, №12, с. 2132-2148.
11. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 2, с. 196-214.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 2 июля 1982 г.