ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. XI

Статья продолжает цикл [1 —10] и служит дополнением к статьям [4, 5].

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть $(E,\ p,\ B)$—векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B— полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot,\ \cdot)$). На векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ фиксируем некоторую риманову метрику (см. [11], с. 58—59).

2. В этой статье рассматривается семейство морфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, удовлетворяющее требованиям а)—в), сформулированным в начале § 3 статьи [4]. Рассмотрение такого семейства эквивалентно рассмотрению множества натуральных степеней автоморфизма этого векторного расслоения, удовлетворяющего требованиям, сформулированным в п. 1.2 введения статьи [8].

В пп. 3—5 воспроизводятся все эти требования и доказывается их эквивалентность.

3. Пусть при каждом $m \in N$ задан морфизм $(X(m),\ \chi(m))$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, причем выполнены следующие требования (это и есть требования а) —в) из § 3 статьи [4]) :

а) $$(X,\ \chi) \underset{\text{def}}{=} (X(1), \chi(1)) \tag{В.1}$$

— автоморфизм векторного расслоения*) $(E,\ p,\ B)$;

б) при всяком $m \in N$ имеют место равенства

$$X(m) = X^m, \quad \chi(m) = \chi^m; \tag{В.2}$$

в) существует функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ такая, что

$$a(\chi^m b) = a(b) \tag{В.3}$$

при всяких $b \in B$, $m \in Z$ и такая, что при всяком $b \in B$ имеет место неравенство**):

---

*) Напомним, что это означает следующее: X — гомеоморфизм E на E, χ — гомеоморфизм B на B, выполнено равенство $pX = \chi p$ и при всяком $b \in B$ сужение $X[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $p^{-1}(\chi b)$.

**) Обозначение $X[b]$ разъяснено в предыдущей сноске;

$$X[b] \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} \left(\left| X[b]\xi \right| \cdot \left|\xi\right|^{-1} \right),$$

$$\left\| [X[b]]^{-1} \right\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in p_*^{-1}(\chi b)} \left(\left| [X[b]]^{-1} \xi \right| \cdot \left|\xi\right|^{-1} \right),$$

где норма $|\cdot|$ индуцирована фиксированной выше римановой метрикой. Через $\overset{-1}{p_*}(\bar b)$ обозначается множество всех ненулевых векторов векторного пространства $\overset{-1}{p}(\bar b)$ (для всякого $\bar b \in B$).

$$\max\left\{\left\|X[b]\right\|,\ \left\|\left[X[b]\right]^{-1}\right\|\right\}\leqslant\exp(a(b)). \qquad (B.4)$$

Тогда: пара $(X,\ \chi)$, определенная формулой (B.1), является, согласно требованию а), автоморфизмом векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$; согласно требованию б), существует функция $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^{+}$, удовлетворяющая равенству (B.3) при всяких $b\in B$, $m\in Z$ следовательно, удовлетворяющая равенству*):

$$a(\chi b)=a(b) \qquad (B.5)$$

при всяком $b\in B$, и такая, что при всяком $b\in B$ имеет место неравенство (B.4). Иными словами, автоморфизм $(X,\ \chi)$ удовлетворяет всем условиям п. 1.2 введения статьи [8].

4. Наоборот, пусть задан автоморфизм $(X,\ \chi)$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, для которого существует функция $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^{+}$ такая, что для всякого $b\in B$ выполнены соотношения (B.4) и (B.5).

Положим при всяком $m\in N$ $X(m)\underset{\text{def}}{=}X^{m}$, $\chi(m)\underset{\text{def}}{=}\chi^{m}$. Полученное таким образом семейство морфизмов $\left(X(m),\chi(m)\right)=\left(X^{m},\chi^{m}\right)$ $\left(m\in N\right)$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ удовлетворяет условиям а)—в), воспроизведенным выше в п. 3. Доказательство этого утверждения приведено в статье [8] (в п. 1.4 введения).

5. Всюду далее в статье рассматривается семейство автоморфизмов $\left(X(m),\chi(m)\right)\underset{\text{def}}{=}\left(X^{m},\chi^{m}\right)$ $\left(m\in N\right)$, где $\left(X,\chi\right)$— автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, для которого существует функция $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^{+}$, такая, что для всякого $b\in B$ выполнены соотношения (B.4) и (B.5).

Эти требования всюду предполагаются выполненными и не напоминаются в формулировках предложений. В статье [8] (формулы (B.1.7), (B.1.8)) доказано, что из условий (B.4), (B.5) настоящей статьи следует, что при всяком $m\in N$ имеет место неравенство

$$\max\left\{\left\|X^{m}[b]\right\|,\ \left\|\left[X^{m}[b]\right]^{-1}\right\|\right\}\leqslant\exp(ma(b)), \qquad (B.6)$$

где через $X^{m}\left[b\right]$ обозначается сужение отображения $X^{m}:E\to E$ на слой $p^{-1}(b)$; нормы линейных отображений $X^{m}\left[b\right],\left[X^{m}\left[b\right]\right]^{-1}$ определяются стандартным образом через нормы в слоях $p^{-1}(b)$, $p^{-1}\chi^{m}(b)$, индуцированные зафиксированной в самом начале римановой метрикой векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, а именно:

$$X^{m}[b]\underset{\text{def}}{=}\sup_{\xi\in p_{*}^{-1}(b)}\left(\left|X^{m}\left[b\right]\xi\right|\cdot\left|\xi\right|^{-1}\right),$$

$$\left\|\left[X^{m}[b]\right]^{-1}\right\|\underset{\text{def}}{=}\sup_{\xi\in p_{*}^{-1}(\chi^{m}b)}\left(\left|\left[X^{m}\left[b\right]\right]^{-1}\xi\right|\cdot\left|\xi\right|^{-1}\right);$$

иными словами, гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\ (\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\ (E,\ p,\ B))$, определенный формулой $\mathfrak{H}m\underset{\text{def}}{=}\left(X^{m},\chi^{m}\right)$ $(m\in Z)$, удовлетворяет условиям п. 2 введения [10].

6. Напомним, что *показатели Ляпунова* семейства морфизмов $\left(X(m),\chi(m)\right)$

---

*) Верно и обратное: функция $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^{+}$, удовлетворяющая равенству (B.5) при всяком $b\in B$, удовлетворяет равенству (B.3) при всяких $b\in B$, $m\in Z$ (доказательство тривиально; впрочем, оно приведено в [8], в п. 1.4 введения).

$(m \in N)$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ определяются при всяких $b \in B,\ k \in \{1,...,n\}$ формулой

$$\lambda_k[b] \underset{\text{def}}{=} \min_{\xi \in R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in R_*^{n-k+1}} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln \left| X(m)\xi \right|, \tag{B.7}$$

где $G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие $(n-k+1)$-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, R_*^{n-k+1} — множество всех ненулевых векторов пространства R^{n-k+1}, $|\cdot|$ — норма, индуцированная фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

Эта же формула выписана в [1] на с. 1408 и подробно обсуждена в [4, §1] (безразлично, как писать: $X(m,b)\xi$ или $X(m)\xi$, так как $\xi \in p^{-1}(b)$).

Формула (B.7) для семейства морфизмов $\left(X(m), \chi(m)\right) \underset{\text{def}}{=} \left(X^m, \chi^m\right)$ $m \in N$ записывается в виде

$$\lambda_k[b] \underset{\text{def}}{=} \min_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in R_*^{n-k+1}} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln \left| X(m)\xi \right|. \tag{B.8}$$

§ 1.[*)] Пусть $b \in B$ — периодическая точка гомеоморфизма $\chi : B \to B$, т. е. множество P_b тех $m \in N$, для которых $\chi^m b = b$, непусто. Число

$$\overline{m}_b \underset{\text{def}}{=} \min P_b \tag{1}$$

называется периодом точки b. Периодические точки периода 1 и называются также неподвижными точками.

Так как $\overline{m}_b \underset{(1)}{\in} P_b$, то

$$\chi^{\overline{m}_b} b = b \tag{2}$$

и, следовательно,

$$p^{-1}\left(\chi^{\overline{m}_b} b\right) = p^{-1} b. \tag{3}$$

О п р е д е л е н и е 1. Отображение

$$M\left[b\right] \underset{\text{def}}{=} X^{\overline{m}_b}\left[b\right] : p^{-1}(b) \to p^{-1}\left(\chi^{\overline{m}_b} b\right) \underset{(3)}{=} p^{-1} b \tag{4}$$

называется *оператором монодромии* автоморфизма $\left(X, \chi\right)$ в точке b.

Заметим, что $M\left[b\right]$ — автоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ (это следует из того, что $\left(X, \chi\right)$ — автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$).

Рассмотрим комплексификацию $C \otimes p^{-1}(b) \cong C \otimes R^n \cong C^n$ слоя $p^{-1}(b)$. Через $M_c\left[b\right]$ обозначим комплексификацию оператора монодромии $M\left[b\right]$. Так как $M\left[b\right]$ — автоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b) \cong R^n$, то $M_c\left[b\right]$ — автоморфизм векторного пространства $C \otimes p^{-1}(b) \cong C^n$, следовательно, все собственные значения оператора $M_c\left[b\right]$ отличны от нуля.

[*)] В этом параграфе в форме, удобной для принятой в этом цикле статей системы изложения, напоминаются классические результаты Флоке—Ляпунова (см. [12], [13, пп. 46—47]).

Определение 2. Собственные значения оператора $M_c[b]$ называются *мультипликаторами* автоморфизма (X,χ) в точке b.

Условимся нумеровать мультипликаторы автоморфизма (X,χ) в точке b (каждое собственное значение оператора $M_c[b]$ берется при этом столько раз, какова его кратность) в порядке невозрастания их модулей; при этом соглашении k-й мультипликатор автоморфизма (X,χ) в точке b будем обозначать через $\mu_k[b]$, а само это соглашение запишется тогда в виде цепочки неравенств:

$$|\mu_1[b]| \geqslant \ldots \geqslant |\mu_n[b]|. \tag{5}$$

Предложение 1. *Пусть $b \in B$ -периодическая точка гомеоморфизма χ. Тогда при всяком $k \in \{1,\ldots,n\}$ имеет место формула*

$$\lambda_k(b) = \left(\overline{m_b}\right)^{-1} \ln|\mu_k[b]|. \tag{6}$$

Доказательство. 1. Пусть дана периодическая точка $b \in B$ гомеоморфизма χ.

В пространстве $C^n = C \otimes p^{-1}(b)$ введем эрмитову структуру, связанную с евклидовой структурой слоя $p^{-1}(b)$ (индуцированной введенной в самом начале римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B)) следующим образом: $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ по определению есть эрмитова (полуторалинейная) форма $\left(C \otimes R^n\right) \times \left(C \otimes R^n\right) \to C,$ сужение которой на $\left(1 \otimes R^n\right) \times \left(1 \otimes R^n\right)$ (напомним, что $R^n = p^{-1}(b)$ вкладывается в $C^n = C \otimes p^{-1}(b)$ с помощью отображения, переводящего всякий вектор $\xi \in R^n = p^{-1}(b)$ в символ $1 \otimes \xi \in C \otimes p^{-1}(b)$) совпадает со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle : R^n \times R^n \to R,$ индуцированным на $R^n = p^{-1}(b),$ фиксированной выше римановой метрикой. Из этого определения непосредственно следует, что для всяких $\xi \in R^n = p^{-1}(b),$ $\eta \in R^n = p^{-1}(b)$ имеет место формула

$$\left|1 \otimes \xi + i \otimes \eta\right|_C^{\,2} = |\xi|^2 + |\eta|^2, \tag{7}$$

где $|\xi| c \underset{\text{def}}{=} \left(\langle\zeta,\zeta\rangle c\right)^{1/2}$.

2. Будем считать периодическую точку $b \in B$ гомеоморфизма χ фиксированной до конца доказательства предложения 1. Для сокращения будем далее в доказательстве предложения 1 опускать букву b в обозначениях большинства объектов. Точнее, под R^n будем понимать $p^{-1}(b),$ под C^n — комплексификацию слоя $p^{-1}(b),$ т. е. $C \otimes p^{-1}(b);$ оператор монодромии $M[b]$ будем обозначать короче через $M,$ его комплексификацию — через M_c. В соответствии с этими соглашениями ($M \in \mathrm{Aut}\,(\mathbf{R}^n),$ $M_C \in \mathrm{Aut}\,(C^n)$ (через $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{R}^n)$ (через $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^n)$) обозначается множество всех автоморфизмов векторного пространства $\mathbf{R}^n$ (соответственно $\mathbf{C}^n$))) будем писать $\overline{m}$ вместо $\overline{m_b},$ λ_k вместо $\lambda_k(b),$ μ_k вместо $\mu_k[b]$.

3. Согласно теореме о жордановой нормальной форме, найдется базис векторного пространства $\mathbf{C}^n$, состоящий из собственных и присоединенных векторов оператора M_C. Иными словами, найдется базис векторного пространства $\mathbf{C}^n$, состоящий из векторов $\eta_{k,j}$ ($k \in \{1,\ldots,q\}, j \in \{0,\ldots,m_k - 1\}$, где q и m_k $\left(k \in \{1,\ldots,q\}\right)$— некоторые натуральные числа такие, что $\sum_{k=1}^{q} m_k = n$), причем:

а) имеют место равенства

$$\mu_1 = \ldots = \mu_{m_1},$$
$$\mu_{m_1+1} = \ldots = \mu_{m_1+m_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_{m_1+\ldots+m_{q-1}+1} = \ldots = \mu_n;$$

б) образы векторов $\eta_{k,j}$ при отображении M_C задаются формулами:

$$M_C\eta_{k,0} = \tilde{\mu}_k\eta_{k,0} \quad \left(k \in \{1,\ldots,q\}\right), \tag{8}$$

$$M_C\eta_{k,j} = \tilde{\mu}_k\eta_{k,j} + \eta_{k,j-1} \quad \left(k \in \{1,\ldots,q\},\, j \in \{1,\ldots,m_k-1\}\right), \tag{9}$$

где

$$\tilde{\mu}_1 \underset{\text{def}}{=} \mu_1 = \ldots = \mu_{m1}\ , \tag{10}$$

$$\tilde{\mu}_k \underset{\text{def}}{=} \mu_{m_1} + \ldots_{m_{k-1}+1} = \ldots = \mu_{m_1+\ldots+m_k}$$
$$\left(k \in \{2,\ldots,q\}\right).$$

4. Имеют место формулы:

$$M_C^s\eta_{k,0} \underset{(8)}{=} \tilde{\mu}_k^s\eta_{k,0} \quad \left(s \in N,\ k \in \{1,\ldots,q\}\right), \tag{11}$$

$$M_C^s\eta_{k,j} = \sum_{l=0}^{\min\langle j,s\rangle} C_s^l\tilde{\mu}_k^{s-l}\eta_{k,j-l} \tag{12}$$
$$\left(s \in N,\ k \in \{1,\ldots,q\},\, j \in \{1,\ldots,m_k-1\}\right).$$

Докажем формулу (12). При $s=1$ она совпадает с формулой (9). Пусть формула (12) верна при $s = r \in N$, т. е. пусть

$$M_C^r\eta_{k,j} = \sum_{l=0}^{\min\langle j,r\rangle} C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}\eta_{k,j-l} \tag{13}$$
$$\left(k \in \{1,\ldots,q\},\, j \in \{1,\ldots,m_k-1\}\right).$$

Тогда

$$M_C^{r+1}\eta_{k,j} = M_C M_C^r\eta_{k,j} \underset{(13)}{=} M_C\sum_{l=0}^{\min\langle j,r\rangle} C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}\eta_{k,j-l} = \sum_{l=0}^{\min\langle j,r\rangle} C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}M_C\eta_{k,j-l} \tag{14}$$
$$\left(k \in \{1,\ldots,q\},\, j \in \{1,\ldots,m_k-1\}\right).$$

Если $r < j$, то

$$\begin{aligned} M_C^{r+1}\eta_{k,j} &\underset{(14)}{=} \sum_{l=0}^{r} C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}M_C\eta_{k,j-l} \underset{(9)}{=} \sum_{l=0}^{r} C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}(\tilde{\mu}_k\eta_{k,j-l} + \eta_{k,j-l-1}) = \\ &= \sum_{l=0}^{r} C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l+1}\eta_{k,j-l} + \sum_{l=0}^{r} C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}\eta_{k,j-l-1} \end{aligned} \tag{15}$$
$$\left(k \in \{1,\ldots,q\},\, j \in \{1,\ldots,m_k-1\}\right).$$

Из формулы (15) в силу равенств

$$\sum_{l=0}^{t} C_v^l\tilde{\mu}_k^{v-l}\eta_{k,j-l-1} = \sum_{q=1}^{t+1} C_v^{u-1}\tilde{\mu}_k^{v-u+1}\eta_{k,j-u} = \sum_{l=1}^{t+1} C_v^{l-1}\tilde{\mu}_k^{v-l+1}\eta_{k,j-l} \tag{16}$$
$$\left(v \in N, k \in \{1,\ldots,q\},\, j \in \{1,\ldots,m_k-1\}, t \in \{0,\ldots,\min\{v,j\}\}\right) \setminus \{j\},$$

(из которых первое соответствует замене $l = u-1$, а второе — замене $u = l$ в индексе суммирования), взятых при $v=t=r<j$, следует формула[*]:

$$M_C^{r+1}\eta_{k,j}=\sum_{l=0}^{r}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l+1}\eta_{k,j-l}+\sum_{l=1}^{r+1}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l+1}\eta_{k,j-l}=\tilde{\mu}_k^{r+1}\eta_{k,j}+\eta_{k,j-r-1})+$$
$$+\sum_{l=1}^{r}\left(C_r^l+C_r^{l-1}\right)\tilde{\mu}_k^{r-l+1}\eta_{k,j-l}=\tilde{\mu}_k^{r+1}\eta_{k,j}+\eta_{k,j-r-1}+\sum_{l=1}^{r}C_{r+1}^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}= \tag{17}$$
$$=\sum_{l=0}^{r+1}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}=\sum_{l=0}^{\min\langle j,r+1\rangle}C_{r+1}^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}$$

$$\left(k\in\{1,...,q\},\, j\in\{1,...,m_k-1\}\right),\quad \text{если } r<j.$$

Если $r\geqslant j$, то

$$M_C^{r+1}\eta_{k,j}\underset{(14)}{=}\sum_{l=0}^{j}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}M_C\eta_{k,j-l}=C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-j}M_C\eta_{k,o}+\sum_{l=1}^{j-1}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}M_C\eta_{k,j-l}\overset{(8)}{\underset{(9)}{=}}$$
$$\overset{(8)}{\underset{(9)}{=}}C_r^j\tilde{\mu}_k^{r+1-j}\eta_{k,o}+\sum_{l=0}^{j-1}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}\left(\tilde{\mu}_k\eta_{k,j-l}+\eta_{k,j-l-1}\right)=C_r^j\tilde{\mu}_k^{r+1-j}\eta_{k,o}+$$
$$+\sum_{l=0}^{j-1}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}+\sum_{l=0}^{j-1}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}\eta_{k,j-l-1}= \tag{18}$$
$$=\sum_{l=0}^{j}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}+\sum_{l=0}^{j-1}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r-l}\eta_{k,j-l-1}$$
$$\left(k\in\{1,...,q\},\, j\in\{1,...,m_k-1\}\right),$$

Из формулы (18) при $r\geqslant j$ в силу равенств (16) (взятых при $v=r$, $t=j-1$) следует[*]:

$$M_C^{r+1}\eta_{k,j}=\sum_{l=0}^{j}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}+\sum_{l=1}^{j}C_r^{l-1}\tilde{\mu}_k^{r-l+1}\eta_{k,j-l}=\tilde{\mu}_k^{r+1}\eta_{k,j}+$$
$$+\sum_{l=1}^{j}\left(C_r^l+C_r^{l-1}\right)\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}=\tilde{\mu}_k^{r+1}\eta_{k,j}+\sum_{l=1}^{j}C_{r+1}^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}= \tag{19}$$
$$=\sum_{l=0}^{j}C_{r+1}^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}=\sum_{l=0}^{\min\langle j,r+1\rangle}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}$$
$$\left(k\in\{1,...,q\},\, j\in\{1,...,m_k-1\}\right).$$

Итак, из формулы (13) при всяком натуральном $r<j$ следует формула (17), а при всяком натуральном $r\geqslant j$ следует формула (19). Следовательно, если при некотором $r\in N$ имеет место формула (13), то имеет место формула

$$M_C^{r+1}\eta_{k,j}=\sum_{l=0}^{\min\langle j,r+1\rangle}C_r^l\tilde{\mu}_k^{r+1-l}\eta_{k,j-l}$$
$$\left(k\in\{1,...,q\},\, j\in\{1,...,m_k-1\}\right).$$

В силу принципа математической индукции формула (12) доказана.

---

[*] Третье от конца равенство этой цепочки следует из формулы $C_{r+1}^l=C_r^l+C_r^{l-1}$, а предпоследнее — из равенств $C_{r+1}^0=C_{r+1}^{r+1}=1$.

[*] См. предыдущую сноску.

5. В этом пункте будут вычислены величины**):

$$\hat{\lambda}\eta_{k,j} \underset{\text{def}}{=} \left(\overline{m}\right)^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M_C^s \eta_{k,j}\right|_C \tag{20}$$

$$\left(k\in\{1,...,q\},\ j\in\{0,...,m_k-1\}\right),$$

причем будет доказано, что в формуле (20) вместо $\overline{\lim}$ можно написать $\lim$ (т. е. что соответствующие пределы существуют).

Имеем

$$\begin{gathered}\left(\overline{m}\right)^{-1} \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s}\ln\left|M_C^s\eta_{k,0}\right|_C \underset{(11)}{=} \left(\overline{m}\right)^{-1} \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\ln\left|\tilde{\mu}_k^s\eta_{k,0}\right|_C = \\ = \left(\overline{m}\right)^{-1}\lim_{s\to+\infty}\left(\ln\left|\tilde{\mu}_k\right| + \frac{1}{s}\ln\left|\eta_{k,0}\right|_C\right) = \left(\overline{m}\right)^{-1}\ln\left|\tilde{\mu}_k\right|\left(k\in\{1,...,q\}\right).\end{gathered} \tag{21}$$

Таким образом, доказана формула

$$\hat{\lambda}\left(\eta_{k,0}\right) \underset{(20),(21)}{\overset{(10)}{=}} \begin{cases}\left(\overline{m}\right)^{-1}\ln\left|\mu_1\right| & при \quad r=1, \\ \left(\overline{m}\right)^{-1}\ln\left|\mu_{m_1+...+m_{k-1}+1}\right| & при \quad r\in\{2,...,q\}.\end{cases} \tag{22}$$

При всяких $k\in\{1,...,q\}$, $j\in\{0,...,m_k-1\}$ имеем

$$\begin{gathered}\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\ln\left|M_C^s\eta_{k,j}\right|_C \underset{(12)}{=} \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\ln\left|\sum_{l=0}^{\min\langle j,s\rangle} C_r^l \tilde{\mu}_k^{s-l}\eta_{k,j-l}\right|_C = \\ = \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\ln\left|\tilde{\mu}_k^s\sum_{l=0}^{\min\langle j,s\rangle} C_r^l\tilde{\mu}_k^{-l}\eta_{k,j-l}\right|_C = \lim_{s\to+\infty}\left(\ln\left|\tilde{\mu}_k\right| + s^{-1}\ln\sigma_s^{(k,j)}\right),\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$\sigma_s^{(k,j)} \underset{\text{def}}{=} \left|\sum_{l=0}^{\min\langle j,s\rangle} C_r^l\tilde{\mu}_k^{-l}\eta_{k,j-l}\right|_C. \tag{24}$$

Имеем $c_{k,j} \underset{\text{def}}{=} \inf_{s\in N}\sigma_s^{(k,j)} > 0$ $\left(k\in\{1,...,q\},\ j\in\{1,...,m_k-1\}\right)$ это следует из эквивалентности всяких двух норм в C^n, поскольку $\left(\sum_{l=0}^{\min\langle j,s\rangle}\left|C_r^l\tilde{\mu}_k^{-l}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left|C_s^0\tilde{\mu}_k^0\right| = 1$).

При всяких $k\in\{1,...,q\}$, $j\in\{1,...,m_k-1\}\subset\{1,...,n\}$ при всяком натуральном $s\geqslant 2n$ имеем

$$0 < c_{k,j} \leqslant \sigma_s^{(k,j)} \underset{(24)}{\leqslant} \sum_{l=0}^{\min\langle j,s\rangle} C_r^l\left|\tilde{\mu}_k\right|^{-l}\left|\eta_{k,j-l}\right|_c \leqslant \sigma^{(k)}C_s^n \leqslant \sigma^{(k)}s^n, \tag{25}$$

где

$$\sigma^{(k)} \underset{\text{def}}{=} \left(\max_{l\in\langle 0,...n\rangle}\left|\tilde{\mu}_k\right|^{-l}\right)\sum_{u=0}^{m_k-1}\left|\eta_{k,u}\right|_c$$

не зависит от $s\geqslant 2n$ (при выводе последнего неравенства цепочки (25) использованы неравенства $C_s^0 < C_s^1 < ... < C_s^n \leqslant s^n$, верные при всяких натуральных $n,s\geqslant 2n$). Так как $\sigma^{(k)}$ и

**) При чтении нижеследующих формул (20) — (28) необходимо иметь в виду соглашение об упрощении обозначений, принятое в п. 2 доказательства.

n не зависят от s, то вследствие известной формулы $\lim\limits_{s\to+\infty} s^{-1}\ln s = 0$ из формулы (25) следует формула

$$\lim_{s\to+\infty} s^{-1}\ln\sigma_s^{(k,j)} = 0 \tag{26}$$

$$\left(k\in\{1,...,q\},\, j\in\{1,...,m_k-1\}\right).$$

Из формул (23), (26) следует формула

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\ln\left|M_{sc}\eta_{k,j}\right|_C = \ln\left|\tilde{\mu}_k\right|$$

$$\left(k\in\{1,...,q\},\, j\in\{1,...,m_k-1\}\right),$$

из которой следует формула

$$\hat{\lambda}\left(\eta_{k,j}\right) \underset{(20)}{\overset{(10)}{=}} \begin{cases} \left(\overline{m}\right)^{-1}\ln\left|\mu_1\right| & при \quad r=1, \\ \left(\overline{m}\right)^{-1}\ln\left|\mu_{m_1+...+m_{k-1}+1}\right| & при \quad r\in\{2,...,q\} \end{cases} \tag{27}$$

$$\left(j\in\{1,...,m_k-1\}\right).$$

Доказанная выше формула (22) совпадает с формулой (27) при $j=0$; следовательно, формула (27) доказана при всяких $k\in\{1,...,q\},\, j\in\{0,...,m_k-1\}$. Положив по определению $m=0$, можно записать формулу (27) короче:

$$\hat{\lambda}\left(\eta_{k,j}\right) = \left(\overline{m}\right)^{-1}\ln\left|\mu_{(\sum\limits_{s<k} m_s)+1}\right| \tag{28}$$

$$\left(k\in\{1,...,q\},\, j\in\{0,...,m_k-1\}\right).$$

Вычисление величин (20) закончено, причем доказано, что в формуле (20) вместо $\overline{\lim}$ можно написать $\lim$ (т. е. доказано, что соответствующие пределы существуют).

6. Напомним некоторые хорошо известные сведения, которые будут использованы в следующем пункте доказательства.

Операции $\mathrm{Re}: C^n\to R^n$, $\mathrm{Im}: C^n\to R^n$ определяются как гомоморфизмы абелевой группы $C^n = C\otimes R^n$ в R^n (a posteriori, как легко видеть, это — эпиморфизмы C^n на R^n), значения которых на элементах вида $c\otimes\xi$ (где $c\in C, \xi\in R^n$) определяются[*] формулами

$$\mathrm{Re}(c\otimes\xi) = (\mathrm{Re}\,c)\xi,\quad \mathrm{Im}(c\otimes\xi) = (\mathrm{Im}\,c)\xi\,.$$

Поскольку $M_C: C\otimes R^n\to C\otimes R^n$ есть комплексификация линейного оператора $M: R^n\to R^n$, то собственные значения, собственные и присоединенные векторы линейного оператора M_C попарно комплексно сопряжены: для всякого собственного значения оператора M_C (обозначим временно это собственное значение через μ, а соответствующие ему цепочки собственных и присоединенных векторов через $\eta_0^{(s)},\eta_1^{(s)},...,\eta_{l_s-1}^{(s)}(s\in\{1,...,r\})$; сумма $\sum\limits_{s=1} l_s$ равна кратности собственного значения μ) имеем

$$M_C\eta_0^{(s)} = \mu\eta_0^{(s)},\quad M_C\eta_l^{(s)} = \mu\eta_l^{(s)} + \eta_{l-1}^{(s)} \tag{29}$$

---

[*] Можно было бы дать другое определение: написать в правых частях этих равенств соответственно $(\mathrm{Re}\,c)\otimes\xi, (\mathrm{Im}\,c)\otimes\xi$. При выбранном нами варианте приходится, конечно, отказаться от формулы $\eta = \mathrm{Re}\,\eta + i\,\mathrm{Im}\,\eta$, которая заменяется формулой $\eta = 1\otimes\mathrm{Re}\,\eta + i\otimes\mathrm{Im}\,\eta$. Операция комплексного сопряжения определяется формулой $\overline{\eta} \underset{\mathrm{def}}{=} 1\otimes\mathrm{Re}\,\eta + (-i)\otimes\mathrm{Im}\,\eta$ (для всякого $\eta\in C\otimes R^n$).

$$(s\in\{1,...,r\},l\in\{1,...,l_s-1\});$$

тогда $\bar{\mu}$ — тоже собственное значение линейного оператора M_C, а $\overline{\eta_0^{(s)}},\overline{\eta_1^{(s)}},...,\overline{\eta_{l_s-1}^{(s)}}(s\in\{1,...,r\})$ — соответствующие ему цепочки собственных и присоединенных векторов:

$$M_C\overline{\eta_0^{(s)}}=\bar{\mu}\overline{\eta_0^{(s)}},\ \ M_C\overline{\eta_l^{(s)}}=\bar{\mu}\overline{\eta_l^{(s)}}+\overline{\eta_{l-1}^{(s)}} \tag{30}$$

$$(s\in\{1,...,r\},l\in\{1,...,l_s-1\});$$

(в самом деле, формула (30) следует из формулы (29) в силу равенства $M_C\bar{\eta}=\overline{M_C\eta}$, верного для всякого $\eta\in C\otimes R^n$ вследствие воспроизведенного выше определения операции комплексного сопряжения в $C\otimes R^n$ и определения оператора M_C как линейного отображения векторного пространства $C\otimes R^n$ (над полем C) в себя, удовлетворяющего при всяких $c\in C,\xi\in R^n$ неравенству $M_C(c\otimes\xi)=c\otimes M\xi$).

Переобозначим множество всех собственных и присоединенных векторов оператора M_C следующим образом:

$$\{\eta_l,\overline{\eta_l},\xi_t\}_{l\in L,t\in T}, \tag{31}$$

где L — некоторое множество, число элементов которого $\operatorname{card}L\leqslant\frac{n}{2}$, T— множество, число элементов которого

$$\operatorname{card}T=n-2\operatorname{card}L. \tag{32}$$

При этом векторы ξ_t вещественные, т. е. могут быть представлены в виде

$$\xi_t=1\otimes\xi_t, \tag{33}$$

где $\xi_t\in R^n\ \ (t\in T)$, а векторы η_t все невещественные, т. е. ни при каком $l\in L$ не может иметь место равенство $\eta_t=1\otimes\xi_l$, где $\xi\in R^n$.

Множество

$$\{\operatorname{Re}\eta_l,\operatorname{Im}\eta_l,\xi_t\}_{l\in L,t\in T} \tag{34}$$

(см. формулы (31), (33)) есть базис в R^n (это хорошо известно; впрочем, вот доказательство: мощность множества

$$\{1\otimes(\operatorname{Re}\eta_l);\ 1\otimes(\operatorname{Im}\eta_l),\ 1\otimes\xi_t=\xi_t\}_{l\in L,t\in T} \tag{35}$$

равна $2\operatorname{card}L+\operatorname{card}T\underset{def}{=}n$ и всякий вектор базиса (31) есть линейная комбинация векторов множества (35):

$$\eta_l=1\otimes\operatorname{Re}\eta_l+i(1\otimes\operatorname{Im}\eta_l)\ \ (l\in L),$$

$$\overline{\eta}_l=1\otimes\operatorname{Re}\eta_l+(-i)(1\otimes\operatorname{Im}\eta_l)\ \ (l\in L),$$

$$\xi_t=\xi_t\quad(t\in T);$$

поэтому множество (35) есть базис в C^n; следовательно, множество (34) есть базис в R^n (в самом деле: 1) мощность множества (34) равна $2\operatorname{card}L+\operatorname{card}T=n$ 2) если бы векторы множества (34) были линейно зависимы над R, то векторы множества (35) были бы линейно зависимы над R, а следовательно, и над C)).

7. В этом пункте, как и в предыдущем, будем использовать обозначение (31), (33) для множества собственных и присоединенных векторов оператора M_C.

Вычислим величины $\lambda(\operatorname{Re}\eta_l)\ \ (l\in L)$, $\lambda(\operatorname{Im}\eta_l)\ \ (l\in L)$, $\lambda(\xi_t)\ \ (t\in T)$,

где

$$\lambda(\xi)\underset{\text{def}}{=}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|X^m\xi\right| \tag{36}$$

(для всякого $\xi \in R_*^n = \overset{-1}{p_*}(b)$).

При всяком $l \in L$ имеем

$$\lambda(\mathrm{Re}\eta_i) \underset{(36)}{=} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln\left|X^m \mathrm{Re}\eta_l\right| = (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|(X^{\overline{m}})^s \mathrm{Re}\eta_l\right| \underset{(4)}{=}$$

$$\underset{(4)}{=} (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M^s \mathrm{Re}\eta_l\right| = (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|\mathrm{Re}\, M_C^s \eta_l\right| \underset{(7)}{\leqslant}$$

$$\underset{(7)}{\leqslant} (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M_C^s \eta_i\right|_C$$

(второе равенство в написанной цепочке следует из леммы 3 статьи [10]); таким образом, при всяком $l \in L$ имеем

$$\lambda(\mathrm{Re}\eta_l) \leqslant (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M_C^s \eta_l\right|_C. \tag{37}$$

При всяком $l \in L$ имеем также:

$$\lambda(\mathrm{Im}\eta_l) \underset{(36)}{=} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln\left|X^m \mathrm{Im}\eta_l\right| = (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|X^{\overline{m}} \mathrm{Im}\eta_l\right| \underset{(4)}{=}$$

$$\underset{(4)}{=} (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M^s \mathrm{Im}\eta_l\right| = (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|\mathrm{Im}\, M_C^s \mathrm{Im}\eta_l\right| \underset{(7)}{\leqslant}$$

$$\underset{(7)}{\leqslant} (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M^s \eta_l\right|_C$$

(и в этой цепочке второе равенство следует из леммы 3 статьи [10]); таким образом, при всяком $l \in L$ имеем

$$\lambda(\mathrm{Im}\eta_l) \leqslant (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M_C^s \eta_l\right|_C.$$

При всяком $t \in T$ имеем

$$\lambda(\xi_t) \underset{(36)}{=} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln\left|X^m \xi_t\right| = (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|(X^{\overline{m}})^s \xi_t\right| \underset{(4)}{=}$$

$$\underset{(4)}{=} (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M^s \xi_t\right| = (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|1 \otimes M^s \xi_t\right|_C =$$

$$= (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M_C^s (1 \otimes \xi_t\right|_C \underset{(33)}{=} (\overline{m})^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln\left|M_C^s \xi_t\right|_C = \tag{39}$$

(и в этой цепочке второе равенство следует из леммы 3 статьи [10]).

Из формул (37) — (39) в силу формул (20), (28) (в формулах (20), (28) для собственных и присоединенных векторов оператора M_C приняты не обозначения (31), (33), которыми мы до сих пор в этом пункте пользовались, а обозначения $\eta_{k,j}$ разъясненные в п. 3 доказательства)

имеем

$$\begin{aligned} \lambda(\mathrm{Re}\eta_l) &\leqslant (\overline{m})^{-1} \ln\left|\mu_{\eta_l}\right| \quad (l \in L), \\ \lambda(\mathrm{Im}\eta_l) &\leqslant (\overline{m})^{-1} \ln\left|\mu_{\eta_l}\right| \quad (l \in L), \\ \lambda(\xi_t) &\leqslant (\overline{m})^{-1} \ln\left|\mu_{\xi_t}\right| \quad (t \in T), \end{aligned} \tag{40}$$

где через μ_ξ обозначено собственное значение оператора M_C которому соответствует собственный или присоединенный вектор $\xi \in \left\{\eta_l, \overline{\eta}_l, \xi_t\right\}_{l\in L, t\in T}$.

Просуммировав неравенства (40) по всем $l \in L$, $t \in T$ и воспользовавшись тем, что произведение собственных значений линейного оператора $C^n \to C^n$ равно детерминанту этого оператора, получаем неравенство

$$\sum_{l\in L}(\lambda(\operatorname{Re}\eta_l)+\lambda(\operatorname{Im}\eta_l))+\sum_{t\in T}\lambda(\xi_t)\leqslant(\overline{m})^{-1}\ln\left|\det M\right|. \qquad (41)$$

8. Пусть теперь $\{\xi'_1,...,\xi'_n\}$ — произвольный базис векторного пространства R^n (напомним, что всюду в доказательстве, начиная с п. 3, под R^n понимается $p^{-1}(b)$. Докажем неравенство

$$\varliminf_{s\to+\infty}(s\overline{m})^{-1}\ln\left|X^{s\overline{m}}\xi'_j\right|+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\varlimsup_{s\to+\infty}(s\overline{m})^{-1}\ln\left|X^{s\overline{m}}\xi'_k\right|\geqslant(\overline{m})^{-1}\ln\left|\det M\right|$$

$$\left(j\in\{1,...,n\}\right). \qquad (42)$$

Для доказательства неравенства (42) рассмотрим при всяком $s\in\{0\}\cup N$ параллелепипед, натянутый на векторы $M^s\xi'_1,...,M^s\xi'_n$, т. е. множество всех векторов $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k M^s\xi'_k$ $\left(\alpha_k\in[0,1]\quad(k\in\{1,...,n\}\right)$. Объем (меру; мера в R^n индуцирована евклидовой структурой в $R^n=p^{-1}(b)$ индуцированной фиксированной в (E,p,B) римановой метрикой) этого параллелепипеда обозначим через $\mathfrak{W}_s$. Воспользуемся хорошо известной формулой

$$\mathfrak{W}_s=\mathfrak{W}_0\left|\det M^s\right|=\mathfrak{W}_0\left|\det M\right|^s\quad(s\in N) \qquad (43)$$

и хорошо известным неравенством

$$\mathfrak{W}_s\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left|M^s\xi'_k\right|\quad(s\in N). \qquad (44)$$

Из (43), (44) при всяком $s\in N$ имеем: $\mathfrak{W}_0\left|\det M\right|^s\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left|M^s\xi'_k\right|$, откуда

$$\ln\mathfrak{W}_0+s\ln\left|\det M\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\ln\left|M^s\xi'_k\right|\quad(s\in N),$$

следовательно,

$$\varliminf_{s\to+\infty}(s\overline{m})^{-1}(\ln\mathfrak{W}_0+s\ln\left|\det M\right|)\leqslant\varliminf_{s\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(s\overline{m})^{-1}\ln\left|M^s\xi'_k\right|\quad(s\in N). \qquad (45)$$

Левая часть неравенства (45) равна $(\overline{m})^{-1}\ln\left|\det M\right|$, правая часть неравенства (45) не превосходит

$$\varliminf_{s\to+\infty}(s\overline{m})^{-1}\ln\left|M^s\xi'_j\right|+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\varlimsup_{s\to+\infty}(s\overline{m})^{-1}\ln\left|M^s\xi'_k\right|$$

$$\left(j\in\{1,...,n\}\right).$$

Следовательно (напоминаем о соглашении относительно обозначений, принятом в п. 2 доказательства):

$$(\overline{m})^{-1}\ln\left|\det M\right|\underset{(45)}{\overset{(4)}{\leqslant}}\varliminf_{s\to+\infty}(s\overline{m})^{-1}\ln\left|(X^{\overline{m}})^s\xi'_j\right|+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\varlimsup_{s\to+\infty}(s\overline{m})^{-1}\ln\left|(X^{\overline{m}})^s\xi'_k\right|$$

$$\left(j\in\{1,...,n\}\right).$$

Неравенство (42) доказано.

9. Базис (34) обозначим теперь по-другому: $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ при этом нумерацию векторов $\xi_1,...,\xi_n$ выберем такой, чтобы при всяком $k\in\{1,...,n\}$ вектор ξ_k был вещественной или мнимой частью (напомним, что, согласно принятому у нас определению операции Re, для $\xi_t=1\otimes\xi_t$ (где $\xi_t\in R^n$) имеет место равенство $\operatorname{Re}\xi_t=\xi_t$

собственного или присоединенного вектора, соответствующего собственному значению μ_k (см. формулу (5)).

От обозначений $\overline{m}, M, \mu_k$ вернемся к обозначениям $\overline{m}_b, M[b], \mu_k[b]$ (соответственно).

В этих обозначениях неравенства (40), доказанные в пункте 7, перепишутся в виде:

$$\lambda(\xi_k) \leqslant (\overline{m}_b)^{-1} \ln \left|\mu_k[b]\right| \quad \left(k \in \{1,...,n\}\right), \tag{46}$$

а неравенство (41), полученное путем суммирования неравенств (40), перепишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(\xi_k) \leqslant (\overline{m}_b)^{-1} \ln \left|\det M[b]\right|. \tag{47}$$

Для всякого базиса $\{\xi_1',...,\xi_n'\}$ векторного пространства $R^n = p^{-1}(b)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(\xi'_k) = \sum_{k=1}^{n} (\overline{m}_b)^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln \left|X^{s\overline{m}_b} \xi'_k\right| \geqslant$$

$$\geqslant (\overline{m}_b)^{-1} \underline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln \left|X^{s\overline{m}_b} \xi'_j\right| + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\overline{m}_b)^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln \left|X^{s\overline{m}_b} \xi'_k\right| \underset{(42)}{\geqslant}$$

$$\underset{(42)}{\geqslant} (\overline{m}_b)^{-1} \ln \left|\det M[b]\right| \quad \left(j \in \{1,...,n\}\right) \tag{48}$$

(равенство в цепочке (48) следует из леммы 3 статьи [10]).

Положив в формуле (48) $\xi'_k = \xi_k \quad (k \in \{1,...,n\})$, получаем из формул (47) и (48):

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(\xi_k) = (\overline{m}_b)^{-1} \underline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln \left|X^{s\overline{m}_b} \xi_j\right| +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\overline{m}_b)^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln \left|X^{s\overline{m}_b} \xi_k\right| = (\overline{m}_b)^{-1} \ln \left|M[b]\right| \quad \left(j \in \{1,...,n\}\right). \tag{49}$$

Так как

$$\underline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln \left|X^m \xi_k\right| = (\overline{m}_b)^{-1} \underline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln \left|X^{s\overline{m}_b} \xi_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant (\overline{m}_b)^{-1} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{s} \ln \left|X^{s\overline{m}_b} \xi_k\right| = \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln \left|X^m \xi_k\right| = \lambda(\xi_k)$$

при всяком $k \in \{1,...,n\}$ (первое равенство в этой цепочке следует из леммы 4, второе — из леммы 3 статьи {10]), то из (49) следуют равенства

$$\underline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln \left|X^m \xi_k\right| = \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln \left|X^m \xi_k\right| \quad \left(j \in \{1,...,n\}\right),$$

обозначающие, что существуют пределы $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \ln \left|X^m \xi_k\right| \quad \left(j \in \{1,...,n\}\right)$.

Если бы хоть одно из неравенств (46) было строгим, то и неравенство (47), полученное путем суммирования неравенств (46), было бы строгим, что противоречило бы равенству (49). Следовательно, имеют место равенства

$$\lambda(\xi_k) = (\overline{m}_b)^{-1} \frac{1}{m} \ln \left|\mu_k[b]\right| \quad \left(k \in \{1,...,n\}\right). \tag{50}$$

Из формул (50) и (5) следует, что

$$\lambda(\xi_1) \geqslant ... \geqslant \lambda(\xi_n). \tag{51}$$

Так как для всякого базиса $\{\xi'_1,...\xi'_n\} \in \Xi$ (где Ξ — множество всех базисов векторного пространства $R^n = p^{-1}(b)$ имеет место неравенство (48), а для базиса $\{\xi'_1,...\xi'_n\} \in \Xi$ имеет место равенство (49), то

$$\inf_{\langle \xi'_1,\dots,\xi'_n\rangle\in\Xi}\sum_{i=1}^{n}\lambda(\xi'_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(\xi_i)=(\overline{m}_b)^{-1}\ln\left|\det M\left[b\right]\right|. \qquad (52)$$

Из неравенств (52), (51), в силу определения Ляпунова (см. [10], 1еделение 2), следует, что $\{\xi_1,\dots\xi_n\}$ —*нормальный базис* и

$$\lambda_k^*(b)=\lambda(\xi_k) \quad \left(k\in\{1,..,n\}\right). \qquad (53)$$

В силу леммы 1 из [10] при всяком $k\in\{1,..,n\}$ имеем

$$\lambda_k(b)=\lambda_k^*(b)\underset{(53)}{=}\lambda(\xi_k)\underset{(50)}{=}(\overline{m}_b)^{-1}\ln\left|\mu_k\left[b\right]\right|. \qquad (54)$$

Предложение 1 доказано.

§ 2. П р е д л о ж е н и е 2*). *Пусть b - периодическая точка гомеоморфизма* χ. *Пусть при некотором* $k\in\{1,..,n-1\}$ *имеет место неравенство*

$$\lambda_{n-k}(b)\neq\lambda_{n-k+1}(b). \qquad (55)$$

Тогда автоморфизм (X,χ) *интегрально разделен с индексом k в точке* b **).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В п. 9 доказательства предложения 1 было доказано, в частности, следующее. Пусть дан (любой) базис пространства $C\otimes p^{-1}(b)$, состоящий из собственных и присоединенных векторов оператора $M_C\left[b\right]$; взяв вещественные части*) всех векторов этого базиса и все отличные от нуля мнимые части *) векторов этого базиса, получим *нормальный базис* $\{\xi_1,\dots\xi_n\}$ слоя $p^{-1}(b)$; при этом нумерацию векторов $\xi_1,\dots\xi_n$ выберем такой, чтобы при всяком $h\in\{1,\dots,n\}$ вектор ξ_h был вещественной или мнимой частью собственного или присоединенного вектора, соответствующего собственному значению $\mu_h\left[b\right]$ (см. формулу (5)), тогда**)

$$\lambda_h(X,\chi;b)\underset{(54)}{=}\lambda(X,\chi;\xi_h)\underset{(54)}{=}(\overline{m}_b)^{-1}\ln\left|\mu_h\left[b\right]\right| \quad \left(h\in\{1,\dots,n\}\right), \qquad (56)$$

откуда в силу соглашения (5) о нумерации мультипликаторов, следует цепочка неравенств: $\lambda_h(X,\chi;\xi_1)\geqslant\dots\geqslant\lambda(X,\chi;\xi_h)$.

2***) . Так как $\{\xi_1,\dots\xi_n\}$ - нормальный базис слоя $p^{-1}(b)$, занумерованный в порядке невозрастания показателей, то из условия (55) (перепишем это условие в более полных обозначениях: $\lambda_{n-k}(X,\chi;b)>\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b)$) следует равенство

$$R_0^k(X,\chi;b)=E_k(X,\chi;b)=EV\{\xi_{n-k+1},\dots,\xi_n\}. \qquad (57)$$

Напомним, что $E_k(X,\chi;b)$ определено, формулой

$$E_k(X,\chi;b)\underset{\text{def}}{=}E\left\{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(X,\chi;\xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b)\right\}$$

и что при условии выполнения строгого неравенства $\lambda_{n-k}(X,\chi;b)>\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b)$

---

*) Это предложение сформулировано в скобках в последней фразе п. 2 доказательства теоремы в [4]. Предложение 2 с его доказательством можно рассматривать как полное изложение цитируемого места из [4].

**) См. [10], определение 3.

*) От каждой лары комплексно-сопряженных векторов вещественная и мнимая части берутся по одному разу.

**) Здесь пользуемся более полными, чем в предложении 1, обозначениями, в которые введена в явной форме зависимость этих объектов от автоморфизма (X,χ) —см. [10], соглашение перед леммой 2. Напомним, в частности, что

$$\lambda(X,\lambda;\xi)\underset{\text{def}}{=}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|X^m\xi\right|,$$

***) В этом пункте периодичность точки b не используется.

векторное подпространство $E_k(X,\chi;b)$ слоя $p^{-1}(b)$ обозначается через $R_0^k(X,\chi;b)$; через $EV\{\xi_{n-k+1},...,\xi_n\}$ обозначается векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$, порожденное векторами $\xi_{n-k+1},...,\xi_n$. Доказательство утверждения, сформулированного в первой фразе этого пункта, содержится в доказательстве предложения 8 в статье [10] (это утверждение сформулировано в четвертой от конца фразе доказательства цитируемого предложения).

3. Слой $p^{-1}(b)$, а вместе с ним и его векторное подпространство $R_0^k(X,\chi;b)$ наделены евклидовой структурой, поскольку на векторном расслоении (E,p,B) задана риманова метрика; скалярное произведение в $p^{-1}(b)$ обозначаем здесь через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Возьмем какой-нибудь ортонормированный базис $\{\zeta_1,...,\zeta_k\}$ евклидова пространства $R_0^k(X,\chi;b)$.

Разложив произвольный вектор $\zeta\in R_0^k(X,\chi;b)$ по этому базису, получим при всяком $m\in N$:

$$\left|X^m\zeta\right|=\left|X^m\left(\sum_{j=1}^k\langle\zeta,\zeta_j\rangle\zeta_j\right)\right|=\left|\sum_{j=1}^k\langle\zeta,\zeta_j\rangle X^m\zeta_j\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^k\left|\langle\zeta,\zeta_j\rangle\right|\cdot\left|X^m\zeta_j\right|\leqslant|\zeta|\sum_{j=1}^k\left|X^m\zeta_j\right|$$

(при выводе последнего неравенства этой цепочки использовано неравенство $\left|\langle\zeta,\zeta_i\rangle\right|\leqslant|\zeta|$). Отсюда при всяком $m\in N$ следует неравенству

$$\left\|X^m_{R_0^k(X,\chi;b)}\right\|\leqslant\sum_{j=1}^k\left|X^m\zeta_j\right|. \tag{58}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left\|X^m_{R_0^k(X,\chi;b)}\right\|&\underset{(58)}{\leqslant}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\sum_{j=1}^k\left|X^m\zeta_j\right|\leqslant\\ &\leqslant\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln(k\max_{j\in\langle1,...,k\rangle}\left|X^m\zeta_j\right|)=\\ &=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\left(\frac{1}{m}\ln k+\frac{1}{m}\ln\max_{j\in\langle1,...,k\rangle}\left|X^m\zeta_j\right|\right)=\\ &=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\max_{j\in\langle1,...,k\rangle}\left|X^m\zeta_j\right|=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\max_{j\in\langle1,...,k\rangle}\frac{1}{m}\ln\left|X^m\zeta_j\right|=\\ &=\max_{j\in\langle1,...,k\rangle}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|X^m\zeta_j\right|=\max_{j\in\langle1,...,k\rangle}\lambda(X,\chi;\zeta_j)\leqslant\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b).\end{aligned} \tag{59}$$

Последнее неравенство следует из того, что $\zeta_j\in E_k(X,\chi;b)$ $(j\in\{1,...,k\})$, а предпоследнее равенство —из формулы

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\max_{j\in\langle1,...,k\rangle}a_m^{(j)}=\max_{j\in\langle1,...,k\rangle}\overline{\lim_{m\to+\infty}}a_m^{(j)},$$

верной для всяких числовых последовательностей $\{a_m^{(j)}\}_{m\in N}$ $(j\in\{1,...,k\}$, где k — произвольное натуральное число).

Итак, доказано неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left\|X^m_{R_0^k(X,\chi;b)}\right\|\leqslant\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b). \tag{60}$$

4. Так как автоморфизм (X,χ) удовлетворяет условиям (B.4) (B.5), то и обратный

автоморфизм (X^{-1},χ^{-1}) этим условиям удовлетворяет[*]. Так как точка $b\in B$ — периодическая точка гомеоморфизма χ, то эта точка — периодическая и для гомеоморфизма χ^{-1}, притом с тем же периодом $\overline{m_b}$ (в самом деле: при всяком $m\in N$ из равенства $\chi^m b=b$ следует равенство $b=\chi^{-m}\chi^m b=\chi^{-m}b$, и наоборот, при всяком $m\in N$ из равенства $\chi^{-m}b=b$ следует равенство $b=\chi^m\chi^{-m}b=\chi^m b$).

Оператор монодромии автоморфизма (X^{-1},χ^{-1}) в точке $b,$ согласно определению 1, есть отображение $(X^{-1})^{\overline{m_b}}\left[b\right]: p^{-1}(b)\to p^{-1}(b),$ а это отображение совпадает с отображением

$$(X^{\overline{m_b}}\left[b\right])^{-1}\underset{(4)}{=}(M\left[b\right])^{-1}.$$

Таким образом, оператор монодромии автоморфизма (X^{-1},χ^{-1}) в точке b является обратным оператором к оператору монодромии автоморфизма (X,χ) в точке b.

5. В этом пункте напомним, как связаны собственные значения, собственные и присоединенные векторы линейного оператора с собственными значениями, собственными и присоединенными векторами обратного оператора.

Рассмотрим снова собственные и присоединенные векторы оператора $M_C\underset{def}{=}M_C\left[b\right]$, т. е. векторы $\eta_{h,j}$ $(h\in\{1,...,q\},\ j\in\{0,...m_h-1\})$, для которых имеют место равенства (8), (9) (с h вместо k), где $\widetilde{\mu}_h$ $(\mathrm{h}\in\{1,...,q\})$ определены формулой (10) (с h вместо k). Применив к обеим частям равенства (8) (с h вместо k) оператор $\widetilde{\mu}_h^{-1}M_C^{-1}$, получаем

$$M_C^{-1}\eta_{h,0}=\widetilde{\mu}_h^{-1}\eta_{h,0}\quad\left(h\in\{1,...,q\}\right). \tag{61}$$

Применив к обеим частям равенства (9) (с h вместо k) оператор $-(-\widetilde{\mu}_h)^{j-1}M_C^{j-1}$, получаем

$$-(-\widetilde{\mu}_h)^{j-1}M_C^{j}\eta_{h,j}=(-\widetilde{\mu}_h)^{j}M_C^{j-1}\eta_{h,j}-(-\widetilde{\mu}_h)^{j-1}M_C^{j-1}\eta_{h,j-1} \tag{62}$$
$$\left(h\in\{1,...,q\},\quad j\in\{1,...,m_h-1\}\right).$$

Имеем, далее:

$$\begin{gathered}M_C^{-1}\left(\left(-\widetilde{\mu}_h\right)^{j}M_C^{j}\eta_{h,j}\right)=\left(-\widetilde{\mu}_h\right)^{j}M_C^{j-1}\eta_{h,j}\underset{(62)}{=}\\ \underset{(62)}{=}-(-\widetilde{\mu}_h)^{j-1}M_C^{j}\eta_{h,j}+(-\widetilde{\mu}_h)^{j-1}M_C^{j-1}\eta_{h,j-1}=\\ =\widetilde{\mu}_h^{-1}(-\widetilde{\mu}_h)^{j}M_C^{j}\eta_{h,j}+(-\widetilde{\mu}_h)^{j-1}M_C^{j-1}\eta_{h,j-1}\\ (h\in\{1,...,q\},j\in\{1,...,m_h-1\})\end{gathered} \tag{63}$$

Равенства (61) и (63) означают, что векторы

$$(-\widetilde{\mu}_h)^{j}M_C^{j}\eta_{h,j}\quad(h\in\{1,...,q\},\ j\in\{0,...,m_h-1\}) \tag{64}$$

являются собственными и присоединенными векторами оператора M_C^{-1}, соответствующими собственным значениям $\widetilde{\mu}_h^{-1}$, где $\widetilde{\mu}_h$ определены формулой (10).

Умножив левую и правую части равенства (12) (с h вместо k) на $(-\widetilde{\mu}_h)^{j}$ и положив в полученном так равенстве $s=j$ получаем формулу

$$(-\widetilde{\mu}_h)^{j}M_C^{j}\eta_{h,j}=\sum_{l=0}^{j}(-1)^{j}C_j^{l}\widetilde{\mu}^{2j-l}\eta_{h,i-l} \tag{65}$$

---

[*] Поскольку $X^{-1}\left[b\right]=\left(X\left[\chi^{-1}b\right]\right)^{-1}$.

$$\left(h \in \{1,...,q\}\right), \quad j \in \{1,...,m_h - 1\}.$$

Из формулы (65) следует, что при всяком $h \in \{1,...,q\}$ векторы $(-\widetilde{\mu}_h)^j M_C^j \eta_{h,j} \quad (j \in \{0,...,m_h - 1\})$ линейно выражаются через векторы $\eta_{h,j} \quad (j \in \{0,...,m_h - 1\})$ с помощью треугольной матрицы, диагональные элементы которой суть 1 и

$$(-1)^j C_j^0 \widetilde{\mu}_h^{2j} = (-1)^j C^j \widetilde{\mu}_h^{2j} \neq 0 \quad \left(j \in \{1,...,m_h - 1\}\right).$$

Следовательно, векторы (64) образуют базис пространства $C^n = C \otimes p^{-1}(b)$, поскольку векторы $\eta_{h,j} \quad (h \in \{1,...,q\},\ j \in \{0,...,m_h - 1\})$ образуют базис этого пространства; более того, при всяком $h \in \{1,...,q\}$ имеет место равенство*)

$$EV_C \left\{\eta_{h,0},...,\eta_{h,m_h-1}\right\} = EV_C \left\{\eta_{h,0},...,(-\widetilde{\mu}_h)^{m_h-1} M_C^{m_h-1} \eta_{h,m_h-1}\right\}.$$

Следовательно, для всякого $s \in \{1,...,n\}$ векторное подпространство в $C^n = C \otimes p^{-1}(b)$, порожденное всеми собственными и присоединенными векторами оператора M_C, соответствующими собственному значению μ_s, совпадает с векторным подпространством в $C^n = C \otimes p^{-1}(b)$, порожденным всеми собственными и присоединенными векторами оператора M_C^{-1}, соответствующими собственному значению μ_s^{-1}. Поэтому для всякого $s \in \{1,...,n\}$ векторное подпространство в $p^{-1}(b)$ порожденное вещественными и мнимыми частями всех собственных и присоединенных векторов оператора $M_C = M_C[b]$, соответствующих собственному значению $\mu_s = \mu_s[b]$, совпадает с векторным подпространством в $p^{-1}(b)$, порожденным вещественными и мнимыми частями всех собственных и присоединенных векторов оператора $M_C^{-1} = (M_C[b])^{-1}$, соответствующих собственному значению $\mu_s^{-1} = (\mu_s[b])^{-1}$.

6. Занумеровав вещественные части *) всех векторов (64) и все отличные от нуля мнимые части *) векторов (64) в порядке невозрастания модулей соответствующих им собственных значений оператора M_C^{-1}, получаем базис пространства $p^{-1}(b)$, который обозначим так: $\left\{\xi_1^{(-1)},...,\xi_n^{(-1)}\right\}$. Из этого соглашения о нумерации в силу формулы (5) следует, что при всяком $h \in \{1,...,n\}$ вектор $\xi_h^{(-1)}$ является вещественной или мнимой частью собственного или присоединенного вектора оператора M_C^{-1}, соответствующего собственному значению $(\mu_{n-h+1}[b])^{-1}$ (из (5) следует, что числа $\left|(\mu_{n-h+1}[b])^{-1}\right|$ занумерованы номерами $h \in \{1,...,n\}$ в порядке невозрастания.

7. Применив утверждения, доказанные в пп. 1—3 доказательства, к автоморфизму (X^{-1}, χ^{-1}) (вместо (X, χ) (используя сведения, изложенные в пп.4—6), получаем:

а) $\left\{\xi_1^{(-1)},...,\xi_n^{(-1)}\right\}$ — *нормальный базис* слоя $p^{-1}(b)$ (относительно автоморфизма (X^{-1}, χ^{-1}));

---

*) Через $EV_C \quad \{\xi_1,...,\xi_s\}$ обозначается векторное подпространство в C^n, порожденное векторами $\xi_1 \in C^n,...,\xi_s \in C^n$.

*) От каждой пары комплексно-сопряженных векторов вещественная и мнимая части берутся по одному разу.

б) $\lambda_h(X^{-1},\chi^{-1};b)=\lambda(X^{-1},\chi^{-1};\xi_h^{(-1)})=(\overline{m}_b)^{-1}\ln\left|(\mu_{n-k+1}[b])^{-1}\right|=$

$$=-(\overline{m}_b)^{-1}\ln\left|\mu_{n-k+1}[b]\right|\underset{(56)}{=}-\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b)\quad \left(h\in\{1,...,n\}\right) \tag{66}$$

(первые два равенства цепочки (66) суть равенства (56) для (X^{-1},χ^{-1}) вместо (X,χ).

Воспользуемся условием (55), в более полных обозначениях записываемым в виде:

$$\lambda_{n-k}(X,\chi;b)>\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b) \tag{67}$$

$$\lambda_k(X^{-1},\chi^{-1};b)\underset{(66)}{=}-\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b)\underset{(67)}{>}$$
$$\underset{(67)}{>}-\lambda_{n-k}(X,\chi;b)\underset{(66)}{=}-\lambda_{k+1}(X^{-1},\chi^{-1};b). \tag{67'}$$

Из формулы (67') в силу утверждения из п. 2, в котором надо теперь взять (X^{-1},χ^{-1}) вместо (X,χ) и $n-k$ вместо k следует

$$R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)=E_{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)=EV\left\{\xi_{k+1}^{(-1)},...,\xi_n^{(-1)}\right\}. \tag{68}$$

Из формулы (56) и строгого неравенства (67) следует строгое неравенство $\left|\mu_{n-k}[b]\right|>\left|\mu_{n-k+1}[b]\right|$, из которого, в силу утверждения п. 6, следует, что из векторов $\xi_1^{(-1)},...,\xi_n^{(-1)}$ векторы $\xi_{k+1}^{(-1)},...,\xi_n^{(-1)}$ и только они, являются вещественными или мнимыми частями собственных или присоединенных векторов, соответствующих собственным значениям, модули которых не превосходят $\left|\mu_{n-k}[b]\right|^{-1}$. Поэтому в силу утверждения, доказанного в п. 5 (оно сформулировано в последней фразе п. 5), имеет место равенство

$$EV\left\{\xi_{k+1}^{(-1)},...,\xi_n^{(-1)}\right\}=EV\left\{\xi_1,...,\xi_{n-k}\right\}. \tag{69}$$

Имеем

$$p^{-1}(b)=EV\left\{\xi_1,...,\xi_{n-k}\right\}\oplus EV\left\{\xi_{n-k+1},...,\xi_n\right\}\underset{(69)}{=}$$
$$\underset{(69)}{=}EV\left\{\xi_{k+1}^{(-1)},...,\xi_n^{(-1)}\right\}\oplus EV\left\{\xi_{n-k+1},...,\xi_n\right\}\overset{(57)}{\underset{(68)}{=}}$$
$$\overset{(57)}{\underset{(68)}{=}}R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)\oplus R_0^{n-k}(X,\chi;b). \tag{70}$$

В силу утверждения, доказанного в п. 3 (см. формулу (60)), где теперь надо взять (X^{-1},χ^{-1}) вместо (X,χ) и $n-k$ вместо k , имеем

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left\|X^{-m}_{R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)}\right\|\leqslant\lambda_{k+1}(X^{-1},\chi^{-1};b)\underset{(66)}{=}-\lambda_{n-k}(X,\chi;b) \tag{71}$$

Имеем:

$$\underline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln(\left\|X^{-m}_{R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)}\right\|^{-1})=$$
$$-\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left\|X^{-m}_{R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)}\right\|\underset{(71)}{\geqslant}\lambda_{n-k}(X,\chi;b). \tag{72}$$

8. Из неравенства (67) следует, что

$$\overline{\varepsilon}\underset{def}{=}\frac{1}{3}(\lambda_{n-k}(X,\chi;b)-\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b))>0 \tag{73}$$

Из неравенства (60) следует поэтому, что существует $m_1\in N$ такое, что

$$\frac{1}{m}\ln\left\|X^m_{R_0^k(X,\chi;b)}\right\|<(\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b)+\overline{\varepsilon}$$

при всяком натуральном $m>m_1$ т. е.

$$\left\| X^{m}_{R_0^k(X,\chi;b)} \right\| < \exp((\lambda_{n-k+1}(X,\chi;b)+\overline{\varepsilon})m) \qquad (74)$$

при всяком натуральном $m > m_1$.

Так как $\overline{\varepsilon} > 0$, то из неравенства (72) следует, что существует $m_2 \in N$ такое, что

$$\frac{1}{m}\ln(\left\| X^{-m}_{R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)} \right\|^{-1}) > \lambda_{n-k}(X,\chi;b)-\overline{\varepsilon}$$

при всяком натуральном $m > m_2$, т. е.

$$\left\| X^{-m}_{R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)} \right\|^{-1} > \exp((\lambda_{n-k}(X,\chi;b)-\overline{\varepsilon})m) \qquad (75)$$

при всяком натуральном $m > m_2$.

Из формулы (73) и утверждений, содержащих формулы (74), (75) следует, что при всяком натуральном $m > \max\{m_1, m_2\}$ имеет место неравенство

$$\left\| X^{-m}_{R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)} \right\|^{-1} > \{\exp(\overline{\varepsilon} m)\} \left\| X^{m}_{R_0^k(X,\chi;b)} \right\|.$$

Отсюда следует, что при всяком $m \in N$ имеет место неравенство

$$\left\| X^{-\widehat{m}_b m}_{R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)} \right\|^{-1} > \{\exp(\overline{\varepsilon}\widehat{m}_b m)\} \left\| X^{\widehat{m}_b m}_{R_0^k(X,\chi;b)} \right\|, \qquad (76)$$

где

$$\widehat{m}_b \underset{def}{=} \widehat{m}_b \cdot \max\{m_1, m_2\} \qquad (77)$$

9. Рассмотрим автоморфизм $(X^{\widehat{m}_b}, \chi^{\widehat{m}_b})$. Из строгого неравенства (67) в силу леммы 3 статьи [10] следует строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}(X^{\widehat{m}_b}, \chi^{\widehat{m}_b}; b) > \lambda_{n-k+1}(X^{\widehat{m}_b}, \chi^{\widehat{m}_b}; b)\,.$$

Таким образом, автоморфизм $(X^{\widehat{m}_b}, \chi^{\widehat{m}_b})$ удовлетворяет условию $i)$ определения 4 статьи [10]. Поэтому для подпространства $E_k(X^{\widehat{m}_b}, \chi^{\widehat{m}_b}; b)$ можно пользоваться обозначением $R_0^k(X^{\widehat{m}_b}, \chi^{\widehat{m}_b}; b)$ В силу леммы 5 [10] имеет место равенство

$$R_0^k(X^{\widehat{m}_b}, \chi^{\widehat{m}_b}; b) = R_0^k(X,\chi;b). \qquad (78)$$

Из строгого неравенства (67') в силу леммы 3 [10] следует строгое неравенство $\lambda_k(X^{-\widehat{m}_b}, \chi^{-\widehat{m}_b}; b) > \lambda_{k+1}(X^{-\widehat{m}_b}, \chi^{-\widehat{m}_b}; b).$ Поэтому для подпространства $E_{n-k}(X^{-\widehat{m}_b}, \chi^{-\widehat{m}_b}; b)$ можно пользоваться обозначением $(X^{-\widehat{m}_b}, \chi^{-\widehat{m}_b}; b)$ В силу леммы 5 [10] имеет место равенство

$$R_0^{n-k}(X^{-\widehat{m}_b}, \chi^{-\widehat{m}_b}; b) = R_0^{n-k}(X^{-1}, \chi^{-1}; b). \qquad (79)$$

При всяком $r \in \{0\} \cup N$ имеют место равенства:

$$X^{\widehat{m}_b r} R_0^k(X^{\widehat{m}_b}, \chi^{\widehat{m}_b}; b) = R_0^k(X^{\widehat{m}_b}, \chi^{\widehat{m}_b}; b) = R_0^k(X,\chi;b)\,,$$

$$X^{-\widehat{m}_b r} R_0^{n-k}(X^{-\widehat{m}_b}, \chi^{-\widehat{m}_b}; b) = R_0^{n-k}(X^{-\widehat{m}_b}, \chi^{-\widehat{m}_b}; b) = R_0^{n-k}(X^{-1}, \chi^{-1}; b)\,, \qquad (80)$$

вытекающие из того, что в силу равенства (77) сужение на слой $p^{-1}(b)$ отображения $X^{\widehat{m}_b m}$ (при всяком $m \in N$) является степенью оператора монодромии $M[b]$ (с натуральным показателем степени), а относительно оператора монодромии $M[b]$ векторные подпространства (78) и (79) инвариантны. Докажем эту инвариантность: 1) в силу формулы (57) (формулы (68)) подпространство (78) (подпространство (79)) порождено векторами $\xi_{n-k+1},...,\xi_n$ (векторами $\xi_{k+1}^{(-1)},...,\xi_n^{(-1)}$), т. е. всеми теми элементами базиса $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ (базиса $\{\xi_1^{(-1)},...,\xi_n^{(-1)}\}$, которые являются вещественными или мнимыми частями собственных или присоединенных векторов $\eta_{k,j}$ оператора $M_C[b]$ (векторов (64) оператора $(M_C[b])^{-1}$, соответствующих собственным значениям оператора $M_C[b]$ (оператора $(M_C[b])^{-1}$, модули которых не превосходят числа $\left|\mu_{n-k+1}[b]\right|$ (числа $\left|\mu_{n-k}[b]\right|^{-1}$; 2) поэтому инвариантность подпространств (78) и (79), т. е. совокупность двух равенств:

$$M[b]R_0^k(X,\chi;b)=R_0^k(X,\chi;b),$$

$$(M[b])^{-1}R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)=R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b),$$

следует из формул (8) —(10), (61), (63).

Имеем

$$\begin{aligned} &R_0^{n-k}(X^{-\widehat{m}_b},\chi^{-\widehat{m}_b};b)\underset{(79)}{=}R_0^{n-k}(X^{-1},\chi^{-1};b)\underset{(70)}{=}\\ &\underset{(70)}{=}p^{-1}(b)\ominus R_0^k(X,\chi;b)\underset{(78)}{=}p^{-1}(b)\ominus R_0^k(X^{\widehat{m}_b},\chi^{\widehat{m}_b};b). \end{aligned} \tag{81}$$

Далее, из того, что при всяком $m\in N$ имеет место неравенство (76), в силу равенств (80) следует, что для всяких целых неотрицательных чисел t,s таких, что $t>s$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\left\|X^{-\widehat{m}_b(s-t)}_{X^{\widehat{m}_b t}R_0^{n-k}(X^{-\widehat{m}_b},\chi^{-\widehat{m}_b};b}\right\|^{-1}\geqslant\left\{\exp(\overline{\varepsilon}\widehat{m}_b(t-s))\right\}\times\\ &\times\left\|X^{\widehat{m}_b(t-s)}_{X^{\widehat{m}_b s}R_0^{k}(X^{\widehat{m}_b},\chi^{\widehat{m}_b};b}\right\|. \end{aligned} \tag{82}$$

При $t=s$ левая и правая части неравенства (82) равны 1. Поэтому неравенство (82) верно и при $t=s\in\{0\}\bigcup N$.

Из формул (81), (82) следует, что автоморфизм $(X^{\widehat{m}_b},\chi^{\widehat{m}_b})$ удовлетворяет условию ii) определения 4 статьи [10] (с числами $\alpha_0=1,\ \beta_0=\overline{\varepsilon}\,\mathrm{m}_b$).

Итак, доказано, что автоморфизм $(X^{\widehat{m}_b},\chi^{\widehat{m}_b})$ интегрально разделу с индексом k в точке b в смысле определения 4 статьи [10]**.**

В силу лемм 6, 7 статьи **[10]** отсюда следует, что автоморфизм (X,χ) интегрально разделен с индексом k в точке b Предложение 2 доказано.

Пусть[*)] гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}(R,\mathrm{Aut}(E,p,B))$ удовлетворяет условию п. 2 введения статьи [10]. При этом условии имеет место следующее

П р е д л о ж е н и е 3[**)]. *Пусть точка* $b\in B$ *такова, что* $\chi^\tau b=b$ при *некотором вещественном* $\tau>0$. *Пусть при некотором* $k\in\{1,...,n-l\}$ *имеет место неравенство*

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b).$$

Тогда гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}(R,\mathrm{Aut}(E,p,B))$ *интегрально разделен с индексом* k *в точке* b.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим автоморфизм (X^τ,χ^τ) векторного расслоения (E,p,B). Для этого автоморфизма выполнены условие предложения 2. В самом деле, по условию, b — периодическая точка гомеоморфизма χ^τ (период $\overline{m}_b=1$), а в силу леммы 3 Г**10]** из неравенства (83) следует неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H}_\tau,b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}_\tau,b)$, совпадающее (см. соглашение об обозначениях в статье [10] перед формулировкой леммы 2) с неравенством $\lambda_{n-k}(X^\tau,\chi^\tau;b)\neq\lambda_{n-k+1}(X^\tau,\chi^\tau;b)$. Поэтому в силу предложения 2 автоморфизм (X^τ,χ^τ) векторного расслоения (E,p,B) интегрально разделен с

[*)] Используемые далее обозначения разъяснены во введении статьи [10].

[**)] Предложение 3 с его доказательством можно рассматривать как полна жение последней фразы п. 5 введения статьи [5].

индексом k в точке b или, что одно и то же (см. в статье [10] формулу (15) и первую сноску к определению 3), гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(Z, \mathrm{Aut}(E, p, B))$ интегрально разделенного с индексом k в точке b. Отсюда в силу леммы 6 [10] следует, что гомоморфизм

$$\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(R, \mathrm{Aut}(E, p, B))$$

интегрально разделен с индексом k в точке b. Предложение 3 доказано.

Литература

1. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1416.
2. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, №?, с. 1587—1598.
3. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, №?, с. 1766—1785.
4. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 3, с 468.
5. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, №?, с. 1394—1410.
6. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, №?, с. 804—821.
7. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, №?, с. 957—978.
8. Миллионщиков В. М — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, №?, с. 1330—1345.
9. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, №?, с. 1507—1548.
10. Миллионщиков В. М— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2148.
11. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970.
12. Floquet G.— Annales scientifiques de l'Ecole normale superieure, 1883, t. 12, p. 47—89.
13. Ляпунов А. М. Собрание сочинений.— М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1956,

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакции.
2 июля 1982