УДК 51 7.926.4

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИИ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. X

ВВЕДЕНИЕ

1. Статья продолжает цикл статей [1—9] и служит дополнением к [3-5].

Пусть $(E,\ p,\ B)$ — векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot,\ \cdot)$). На $(E,\ p,\ B)$ фиксируем некоторую риманову метрику (см. [10], с. 58—59).

2. Пусть $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, где через $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, обозначаемую через $\mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B)$. Напомним, что для всякого $t \in \mathbf{G}$ $\mathfrak{H}t = (X^t,\ \chi^t)$ где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем:

а) $pX^t = \chi^t p$;

б) при всяком $b \in B$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$;

в) при всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$ имеют место равенства $X^{t+s} = X^t X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ (вместо X^1 пишем X, вместо χ^1 — χ).

Наложим условие на гомоморфизм $\mathfrak{H}$, состоящее в следующем: существует функция* $a(\cdot): B \to R^+$, удовлетворяющая равенству $a(\chi^t b) = a(b)$ при всяких $b \in B,\ t \in G$ и такая, что при всяких $b \in B,\ t \in G$ имеет место неравенство

$$\left\| X^t\left[b\right] \right\| \leqslant \exp\left(\left|t\right| a(b)\right)$$

(норма линейного отображения слоя на слой определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$).

Так как $\left[X^t\left[b\right]\right]^{-1} = X^{-t}\left[\chi^t b\right]$ $\left(b \in B, t \in G\right)$, то наложенное условие перейдет в эквивалентное, если вместо «при всяких $b \in B,\ t \in G$ имеет место неравенство $\left\| X^t\left[b\right] \right\| \leqslant \exp\left(\left|t\right| a(b)\right)$» написать «при всяких** $b \in B,\ t \in G_*^+$ имеет место неравенство

$$\max\left\{\left\| X^t\left[b\right] \right\|, \left\| \left[X^t\left[b\right]\right]^{-1} \right\|\right\} \leqslant \exp(ta(b))\text{».} \tag{1}$$

§ 1***. Показатель Ляпунова $\lambda_k(b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ определяется при всяких $b \in B,\ k \in \{1,...,n\}$ формулой

$$\lambda_k(b) \underset{\text{def}}{=} \min_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in R_*^{n-k+1}} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln\left|X^t \xi\right|; \tag{2}$$

---

* В этом цикле статей через R^+ обозначается множество всех неотрицательных вещественных чисел, а через N — множество всех натуральных чисел: N = {1, 2 , . . . } .

** $$\mathrm{G}_*^+ \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathrm{R}_*^+, & \text{если G=R,} \\ \mathrm{N}, & \text{если G=Z} \end{cases}$$

(R_*^+ - множество всех положительных (т. е. строго больших нуля) вещественных чисел).

*** Этот параграф является модификацией начала § 1 статьи [4].

здесь $G_i(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие *i*-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, через R^i_* обозначается $R^i\setminus\{0\}$; в выражении $t\to+\infty$ имеется в виду, что $t\in G$ (напомним, что G = R либо G = Z).

Ниже приводится доказательство корректности приведенного определения (доказательство утверждения о том, что в формуле (2) можно писать max вместо sup и min вместо inf, т. е. что соответствующие sup и inf достигаются).

Попутно дается доказательство эквивалентности определения показателей Ляпунова формулой (2) тому определению показателей Ляпунова, которое получается непосредственным перенесением на рассматриваемую ситуацию оригинального определения Ляпунова (см. [11]), причем и само это перенесение подробно излагается ниже.

Определение 1. При всяких $b\in B,\ k\in\{1,...,n\}$,

$$\lambda_k(b)\underset{\text{def}}{=}\inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b)}\ \sup_{\xi\in R^{n-k+1}_*}\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right|. \tag{3}$$

Формула (3) отличается от формулы (2) только тем, что вместо min стоит inf, а вместо max стоит sup; ниже будет, в частности, доказано, что sup и inf в формуле (3) достигаются и поэтому формула (3) эквивалентна формуле (2) .

Определение 2. Пусть фиксировано произвольное $b\in B$. Среди всех базисов $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ возьмем такой, для которого сумма $\sum_{i=1}^{n}\lambda(\xi_i)$, где

$$\lambda(\xi)\underset{\text{def}}{=}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right|, \tag{4}$$

принимает наименьшее значение (такой базис называется *нормальным*). Изменим, если нужно, нумерацию векторов $\xi_1,...,\xi_n$ нормального базиса, чтобы сделать ее такой, что $\lambda(\xi_i)\geqslant\lambda(\xi_{i+1})\quad(i\in\{1,...,n-1\})$.

Положим по определению $\lambda^*_k(b)\underset{\text{def}}{=}\lambda(\xi_k)\quad\left(k\in\{1,...,n\}\right)$.

Замечание. Ниже будет доказано, что $\lambda^*_k(b)=\lambda(b)$ при всяких $b\in B,\ k\in\{1,...,n\}$.

Определение 2 настолько близко по форме к определению Ляпунова (см. [11]; Ляпунов называл $-\lambda^*_k(b)$ характеристичными числами), что его естественно считать непосредственным перенесением определения Ляпунова на рассматриваемую здесь ситуацию. Для доказательства корректности определения 2 следует доказать, что:

а) при всяком $b\in B$ существует базис $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda(\xi_i)=\inf_{\langle\xi'_1,...,\xi'_n\rangle\in\Xi}\sum_{i=1}^{n}\lambda(\xi'_i)$$

(где Ξ — множество всех базисов векторного пространства $p^{-1}(b)$) (такой базис называется *нормальным*);

б) для всяких $b\in B,\ i\in\{1,...,n\}$, число $\lambda(\xi_i)$ не зависит от выбора нормального базиса, если векторы ξ_i нормального базиса занумерованы в порядке невозрастания чисел $\lambda(\xi_i)$.

Прежде чем доказывать утверждения а) и б), докажем несколько предложений*.

Предложение 1. Для всякого $b\in B$ *для всякого* $\xi\in p^{-1}_*(b)$ *имеет место включение*: $\lambda(\xi)\in[-a(b),\ a(b)]$.

Доказательство. С одной стороны, для всякого $t\in G^+_*$ имеем $\left|X^t\xi\right|\leqslant\left\|X^t[b]\right\|\cdot|\xi|\underset{(1)}{\leqslant}\exp(ta(b))\cdot|\xi|$, откуда

---

* Через $p^{-1}_*(b)$ обозначается множество всех ненулевых векторов слоя $p^{-1}(b)$.

$$\lambda(\xi) \underset{(4)}{=} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right| \leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}}\left(a(b)+\frac{1}{t}\ln|\xi|\right)=a(b).$$

С другой стороны, для всякого $t\in G_*^+$ имеем

$$\left|X^t\xi\right| \geqslant \left\|\left[X^t[b]\right]^{-1}\right\|^{-1}\cdot|\xi| \underset{(1)}{\geqslant} \exp(-ta(b))\cdot|\xi|,$$

откуда $\lambda(\xi) \underset{(4)}{=} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right| \geqslant \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\left(-a(b)+\frac{1}{t}\ln|\xi|\right)=-a(b)$.

Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Для всякого $b\in B$ для всякого $\xi\in p_*^{-1}(b)$ и всякого вещественного числа $\alpha\neq 0$ имеет место равенство $\lambda(\alpha\xi)=\lambda(\xi)$.

Доказательство. $\lambda(\alpha\xi)=\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^t\alpha\xi\right| = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left(|\alpha|\cdot\left|X^t\xi\right|\right) = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\left(\frac{1}{t}\ln|\alpha|+\frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right|\right)=$ $=\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right|=\lambda(\xi)$. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Для всякого $b\in B$ для всяких двух векторов $\xi\in p_*^{-1}(b)$, $\eta\in p_*^{-1}(b)$ таких, что $\xi+\eta\in p_*^{-1}(b)$, имеет место неравенство $\lambda(\xi+\eta)\leqslant\max\{\lambda(\xi),\lambda(\eta)\}$.

Доказательство.

$$\lambda(\xi+\eta)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^t(\xi+\eta)\right| = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi+X^t\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left(\left|X^t\xi\right|+\left|X^t\eta\right|\right)\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left[2\max\left\{\left|X^t\xi\right|,\left|X^t\eta\right|\right\}\right]=$$

$$=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left\{\frac{1}{t}\ln 2+\frac{1}{t}\ln\left[\max\left\{\left|X^t\xi\right|,\left|X^t\eta\right|\right\}\right]\right\}=$$

$$=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left[\max\left\{\left|X^t\xi\right|,\left|X^t\eta\right|\right\}\right]=$$

$$=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\max\left\{\frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right|,\frac{1}{t}\ln\left|X^t\eta\right|\right\}=\max\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right|,\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^t\eta\right|\right\}=$$

$$\max\{\lambda(\xi),\lambda(\eta)\}$$

(предпоследнее равенство вытекает из легко проверяемого равенства)

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\max\{a(t),b(t)\}=\max\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}a(t),\overline{\lim_{t\to+\infty}}b(t)\right\},$$

справедливого для всяких двух вещественных функций $a(\cdot):G_*^+\to R$, $b(\cdot):G_*^+\to R$. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. Если для некоторого $b\in B$ для некоторых двух векторов $\xi\in p_*^{-1}(b)$, $\eta\in p_*^{-1}(b)$ выполнено строгое неравенство $\lambda(\xi)>\lambda(\eta)$, то $\lambda(\xi+\eta)=\lambda(\xi)$.

Доказательство. В силу предложения 2 из $\lambda(\xi)\neq\lambda(\eta)$ следует: $\xi\neq-\eta$. Поскольку из предложения 3 следует, что $\lambda(\xi+\eta)\leqslant\max\{\lambda(\xi),\lambda(\eta)\}=\lambda(\xi)$, то из предположения $\lambda(\xi+\eta)\neq\lambda(\xi)$ вытекало бы строгое неравенство $\lambda(\xi+\eta)<\lambda(\xi)$. Но тогда мы имели бы $\max\{\lambda(\xi+\eta),\lambda(\eta)\}<\lambda(\xi)$ (напомним, что $\lambda(\eta)<\lambda(\xi)$), а отсюда в силу предложения 3 — неравенство $\lambda(\xi)\leqslant\max\{\lambda(\xi+\eta),\lambda(-\eta)\}=\max\{\lambda(\xi+\eta),\lambda(\eta)\}<\lambda(\xi)$ (мы воспользовались здесь равенством $\lambda(-\eta)=\lambda(\eta)$), вытекающим из предложения 2); полученное противоречие доказывает, что предположение $\lambda(\xi+\eta)\neq\lambda(\xi)$ неверно. Предложение 4 доказано.

*Предложение 5. При всяком фиксированном $b \in B$ функция**: $\lambda\big|_{p_*^{-1}(b)}(\cdot): p_*^{-1}(b) \to R$ *принимает не более n различных значений.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что при некотором $b \in B$ найдутся векторы $\xi_1 \in p_*^{-1}(b), ..., \xi_{n+1} \in p_*^{-1}(b)$, для которых все числа $\lambda(\xi_i) \quad (i \in \{1,...,n+1\})$ различны. Поскольку $\dim p^{-1}(b) = n < n+1$, то, изменив, если нужно, нумерацию векторов ξ_i, можно добиться того, чтобы вектор ξ_{n+1} можно было представить в виде $\xi_{n+1} = \sum_{i=1}^{S} \alpha_i \xi_i$, где** $\alpha \in R_*$ при всяком $i \in \{1,...,s\} \quad (s \leqslant n)$, а векторы $\xi_1,...,\xi_s$ линейно независимы. В силу предложения 2 имеют место равенства

$$\lambda(\alpha_i \xi_i) = \lambda(\xi_i) \quad \big(i \in \{1,...,s\}\big). \tag{5}$$

В частности, $\lambda(\alpha_1 \xi_1) = \lambda(\xi_1)$.

Предположим, что при некотором натуральном $r<s$ имеет место равенство

$$\lambda(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \xi_i) = \max_{i \in \{1,...,r\}} \lambda(\xi_i). \tag{6}$$

Поскольку $\lambda(\alpha_{r+1}\xi_{r+1}) = \lambda(\xi_{r+1}) \neq \max\limits_{i \in \{1,...,r\}} \lambda(\xi_i) \underset{(6)}{=} \lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \xi_i\right)$, то в силу предложения 4 имеет место равенство

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i \xi_i\right) = \max\left\{\lambda\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \xi_i\right), \lambda(\alpha_{r+1}\xi_{r+1})\right\} \overset{(5)}{\underset{(6)}{=}}$$
$$\overset{(5)}{\underset{(6)}{=}} \max\left\{\max_{i \in \{1,...,r\}} \lambda(\xi_i), \lambda(\xi_{i+1})\right\} = \max_{i \in \{1,...,r\}} \lambda(\xi_i).$$

Тем самым доказано по индукции равенство $\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \xi_i\right) = \max\limits_{i \in \{1,...,k\}} \lambda(\xi_i)$ при всяком $k \in \{1,...,s\}$; положив в этом равенстве $k = s$, получаем $\lambda(\xi_{n+1}) = \max\limits_{i \in \{1,...,k\}} \lambda(\xi_i)$, следовательно, число $\lambda(\xi_{n+1})$ равно одному из чисел $\lambda(\xi_i) \quad \big(i \in \{1,...,s\} \subset \{1,...,n\}\big)$, что противоречит сделанному предположению о том, что все числа $\lambda(\xi_i)$ $(i \in \{1,...,n+1\})$ различны. Предложение 5 доказано.

Пусть дано произвольное $b \in B$. Существование базиса $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(\xi_i) = \inf_{\langle \xi'_i,...,\xi'_n \rangle \in \Xi} \sum_{i=1}^{n} \lambda(\xi'_i)$$

(где З — множество всех базисов векторного пространства $p^{-1}(b)$), т. е. нормального базиса, вытекает из предложения 5. В самом деле, из предложения 5 следует, что отображение Ξ в R, ставящее в соответствие базису $\{\xi'_1,...,\xi'_n\} \in \Xi$ вещественное число $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda(\xi'_i)$ принимает конечное множество значений и, следовательно, точная нижняя грань этого отображения достигается — совпадает с минимумом. Таким образом, утверждение а) доказано.

Предложение 6. Для всяких $b \in B$, $\eta \in \mathrm{p}_*^{-1}(b)$ и всякого нормального базиса $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ вектор η принадлежит векторному подпространству

---

* Через $\lambda\big|_{p_*^{-1}(b)}(\cdot)$ обозначается сужение на множество p_*^{-1} функции $\lambda(\cdot): \bigcup\limits_{b \in B} p_*^{-1}(b) \to R$, определенной формулой (4).

** $R_* = R \setminus \{0\}$.

пространства $p^{-1}(b)$, порожденному множеством тех векторов ξ_i базиса $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ для которых $\lambda(\eta) \geqslant \lambda(\xi_i)$.

Доказательство. В самом деле, если в разложении $\eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$ коэффициент $\alpha_S \neq 0$, то, заменив в базисе $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ вектор ξ_S вектором η, снова получим базис, поскольку всякий вектор базиса $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ линейно выражается через векторы $\xi_1,...,\xi_{s-1},\ \eta,\ \xi_{s+1},...,\xi_n : \xi_i$ $(i \neq s),\ \xi_s = \alpha_s^{-1}(\eta - \sum \alpha_i \xi_i)$. Но если $\lambda(\eta) < \lambda(\xi_s)$, то этот новый базис имеет меньшую, чем у базиса $\{\xi_1,...,\xi_n\}$, сумму показателей, что противоречит нормальности базиса $\{\xi_1,...,\xi_n\}$. Следовательно, для всякого $s \in \{1,...,n\}$ такого, что $\lambda(\xi_s) > \lambda(\eta)$, коэффициент α_s равен нулю. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. Пусть $b \in B$ и пусть $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ и $\{\eta_1,...,\eta_n\}$ — два нормальных базиса векторного пространства $p^{-1}(b)$. Пусть нумерация векторов этих базисов такова, что

$$\lambda(\xi_1) \geqslant ... \geqslant \lambda(\xi_n),\quad \lambda(\eta_1) \geqslant ... \geqslant \lambda(\eta_n). \tag{7}$$

Тогда $\lambda(\xi_i) = \lambda(\eta_i)$ при всяком $i \in \{1,...,n\}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $k \in \{1,...,n\}$ имеет место неравенство $\lambda(\xi_k) \neq \lambda(\eta_k)$.

Пусть для определенности

$$\lambda(\xi_k) > \lambda(\eta_k) \tag{8}$$

(в случае противоположного неравенства в дальнейших рассуждениях надо поменять ролями базисы $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ и $\{\eta_1,...,\eta_n\}$). При всяких $i \geqslant k,\ \ j \leqslant k$, имеют место неравенства

$$\lambda(\eta_i) \underset{(7)}{\leqslant} \lambda(\eta_k) \underset{(8)}{<} \lambda(\xi_k) \underset{(7)}{\leqslant} \lambda(\xi_j).$$

Поэтому (в силу предложения 6) $n-k+1$ линейно независимых векторов η_i $(i \geqslant k)$ принадлежат векторному подпространству пространства $p^{-1}(b)$, порожденному $n-k < n-k+1$ векторами ξ_j $(j \geqslant k+1)$. Это противоречие выведено из предположения, что предложение 7 неверно. Предложение 7 доказано.

Доказав предложение 7, мы тем самым доказали и утверждение б). Корректность определения 2 теперь полностью доказана.

Из предложения 5 непосредственно следует, что в формуле (3) sup и inf достигаются и поэтому вместо них можно писать соответственно max и min, т. е. определение $\lambda_k(b)$ формулой (3) совпадает с определением $\lambda_k(b)$ формулой (2).

Напомнив, что $\lambda_k^*(b)$ введено в определении 2, сформулируем следующую лемму, которую можно интерпретировать как утверждение об эквивалентности определений 1 и 2.

Лемма 1. При всяких $b \in B,\ k \in \{1,...,n\}$, имеет место равенство $\lambda_k(b) = \lambda_k^*(b)$.

Доказательство. Пусть фиксировано произвольное $b \in B$. Выберем в $p^{-1}(b)$ нормальный базис $\{\xi_1,...,\xi_n\}$, занумеровав векторы ξ_i в порядке невозрастания показателей:

$$\lambda(\xi_1) \geqslant ... \geqslant \lambda(\xi_n) \tag{9}$$

Тогда, согласно определению 2,

$$\lambda_k(b) = \lambda_k^*(b) \quad (k \in \{1,...,n\}) \tag{10}$$

При всяком $k \in \{1,...,n\}$ обозначим через R_0^{n-k+1} векторное подпространство векторного пространства $p^{-1}(b)$, порожденное векторами $\xi_k,...,\xi_n$. Так как векторы $\xi_k,...,\xi_n$ линейно независимы, то $\dim R_0^{n-k+1} = n-k+1$. Из предложений 2, 3 следует, что при всяком $k \in \{1,...,n\}$ для всякого ненулевого вектора $\xi \in R_0^{n-k+1}$ выполнено неравенство

$$\lambda(\xi) \geqslant \max_{i\in\{k,...,n\}} \lambda(\xi_i) \underset{(9)}{=} \lambda(\xi_k) \underset{(10)}{=} \lambda_k^*(b).$$

Следовательно*,

$$\lambda_k(b) \underset{(3),(4)}{\leqslant} \sup_{\xi\in R_{0*}^{n-k+1}} \lambda(\xi) \leqslant \lambda_k^*(b) \qquad (11)$$

при всяком $k\in\{1,...,n\}$.

Предположим, что $\lambda_k(b)\neq\lambda_k^*(b)$ при некотором $k\in\{1,...,n\}$, тогда в силу (11) имеет место строгое неравенство $\lambda_k(b)<\lambda_k^*(b)$. Согласно формулам (3), (4) это означает, что существует $(n-k+1)$-мерное векторное подпространство R_1^{n-k+1} векторного пространства $p^{-1}(b)$ такое, что

$$\sup_{\xi\in R_{1*}^{n-k+1}} \lambda(\xi) < \lambda_k^*(b) \underset{(10)}{=} \lambda(\xi_k).$$

Из этого неравенства в силу предложения 6 и неравенства (9) вытекает, что $(n-k+1)$-мерное векторное пространство R_1^{n-k+1} содержится в $(n-k)$-мерном векторном пространстве, порожденном векторами ξ_j $(j\in\{k+1,...,n\})$. Мы вывели это противоречие из предположения, что при некотором $k\in\{1,...,n\}$ имеет место неравенство $\lambda_k(b)\neq\lambda_k^*(b)$. Лемма 1 доказана.

Введем одно обозначение. Если для некоторого $b\in B$ и некоторого $k\in\{1,...,n-1\}$ имеет место строгое неравенство $\lambda_{n-k}(b)>\lambda_{n-k+1}(b)$, то положим по определению

$$R_0^k(b) \underset{def}{=} E(\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(b)) \qquad (12)$$

(напомним использованное здесь стандартное обозначение: в правой части равенства (12) стоит множество всех тех точек ξ_j, принадлежащих слою $p^{-1}(b)$, для которых $\lambda(\xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(b)$). Напомним при этом, что $\lambda(\xi)$ при всяком $\xi\in p_*^{-1}(b)$ определено формулой (4). По определению $\lambda(0_b)=-\infty$ при всяком $b\in B$, где 0_b — нуль векторного пространства $p^{-1}(b)$, что находится в согласии с (4) и формулой $\ln 0=-\infty$; благодаря этому определению $0_b\in R_0^k(b)$. Отсюда и из предложений 2, 3 следует, что множество $R_0^k(b)$, определенное формулой (12), есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$. Условие $\lambda_{n-k}(b)>\lambda_{n-k+1}(b)$ для установления этого факта, конечно, не используется. Это условие нужно для оправдания постановки верхнего индекса k в обозначении $R_0^k(b)$ (верхний индекс у буквы R имеет в нашем изложении стандартный смысл — он равен размерности векторного пространства, обозначенного этой буквой). Дело в том, что имеет место следующее

Предложение 8. При всяких $b\in B$, $k\in\{1,...,n\}$, размерность векторного подпространства

$$E_k(b) \underset{\mathrm{def}}{=} E(\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(b)) \qquad (13)$$

слоя $p^{-1}(b)$ удовлетворяет неравенству $\dim E_k(b)\geqslant k$. При этом $\dim E_n(b)\geq n$, а если $k\in\{1,...,n\}$, то $\dim E_k(b)=k$ в том и только в том случае, если имеет место строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}(b)>\lambda_{n-k+1}(b). \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ — произвольный нормальный базис слоя $p^{-1}(b)$, занумерованный в порядке невозрастания показателей: $\lambda(\xi_1)\geqslant...\geqslant\lambda(\xi_n)$. В силу предложения 6 векторное пространство $E_k(b)$ содержится в векторном подпространстве слоя

---

* $R_{i*}^l \underset{def}{=} R_i^l\setminus\{0_b\}$.

$p^{-1}(b)$, порожденном теми векторами ξ_i нормального базиса $\{\xi_1,...,\xi_n\}$, для которых $\lambda(\xi_i) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)$, а, с другой стороны, векторное пространство $E_k(b)$ в силу (13) содержит все векторы ξ_i, удовлетворяющие этому неравенству. Тем самым получено следующее описание векторного подпространства $E_k(b)$ слоя $p^{-1}(b)$.

Обозначим через J_k множество всех тех $i \in \{1,...,n\}$, для которых $\lambda(\xi_i) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)$; $E_k(b)$ совпадает с векторным подпространством слоя $p^{-1}(b)$, порожденным векторами ξ_i $(i \in J_k)$. Поскольку векторы ξ_i $(i \in \{1,...,n\})$ линейно независимы, то $\dim E_k(b) = \mathrm{card} J_k$ (через $\mathrm{card} A$ обозначается мощность (число элементов) множества A) для всякого $k \in \{1,...,n\}$.

Для всякого $k \in \{1,...,n\}$ имеет место включение $J_k \supset \{n-k+1,...,n\}$, так как $\lambda_{n-k+1}(b) = \lambda(\xi_{n-k+1}) \geqslant ... \geqslant \lambda(\xi_n)$. При написании этой цепочки, состоящей из равенства и неравенств, мы воспользовались тем, что в силу определения 2 и леммы 1 для всякого $i \in \{1,...,n\}$ имеет место равенство $\lambda_i(b) = \lambda(\xi_i)$ так как векторы ξ_i занумерованы в порядке невозрастания показателей. В силу тех же причин для всякого $k \in \{1,...,n-1\}$ имеют место следующие соотношения:

$$\lambda(\xi_1) \geqslant ... \geqslant \lambda(\xi_{n-k}) = \lambda_{n-k}(b) \geqslant \lambda_{n-k+1}(b),$$

из которых следует, что если $k \in \{1,...,n-1\}$, то $\{1,...,n-k\} \bigcap J_k = \varnothing$ в том и только в том случае, если выполнено условие (14). Отметим, что если условие (14) выполнено, то

$$R_0^k(b) \underset{def}{=} E_k(b) = EV\{\xi_{n-k+1},...,\xi_n\}$$

(векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$, порожденное векторами $\xi_{n-k+1},...,\xi_n$). Так как при всяком $k \in \{1,...,n\}$ имеют место включения $\{1,...,n\} \supset J_k \supset \{n-k+1,...,n\}$, а $\mathrm{card}\{n-k+1,...,n\} = k$, то имеет место следующая совокупность утверждений:

1) при всяком $k \in \{1,...,n\}$ имеет место неравенство $\mathrm{card}\, J_k \geqslant k$;

2) $\mathrm{card}\, J_n \geqslant n$;

3) при $k \in \{1,...,n-1\}$ равенство $\mathrm{card}\, J_k \geqslant k$ имеет место в том и только в том случае, если $\{1,...,n-k\} \bigcap J_k = \varnothing$.

Напомним два утверждения, доказанные выше:

4) $\dim E_k(b) = \mathrm{card} J_k$ (при всяком $k \in \{1,...,n\}$);

5) при $k \in \{1,...,n-1\}$ равенство $\{1,...,n-k\} \bigcap J_k = \varnothing$ имеет место в том и только в том случае, если выполнено условие (14). Объединением утверждений 1)—5) заканчивается доказательство предложения 8.

§ 2. Продолжаем рассмотрение гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ (где **G** есть группа **R** или группа **Z**), удовлетворяющего условию, наложенному в п. 2 введения.

Для всякого* $\tau \in G_*$ определим гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ формулой

$$\mathfrak{H}_\tau m = \mathfrak{H}(m\tau) = (X^{m\tau}, \chi^{m\tau}) \quad (m \in Z). \tag{15}$$

Если обозначить через φ_τ гомоморфизм $Z \to G$, определенный формулой

$$\varphi_\tau m = m\tau \quad (m \in Z), \tag{16}$$

то

$$\mathfrak{H}_\tau = \mathfrak{H}\varphi_\tau. \tag{17}$$

---

* $G_* = G \setminus \{0\}$.

Так как по условию при всяком $t \in G$ выполнено неравенство $\left\| X^t\left[b\right]\right\| \leqslant \exp\left(\left|t\right| a(b)\right)$, то при всяком $m \in Z$ выполнено неравенство $\left\| X^t\left[b\right]\right\| \leqslant \exp\left(\left|m\right| \cdot \left|\tau\right| a(b)\right)$, т.е. гомоморфизм $\mathfrak{H}_\tau$ удовлетворяет условию п. 2 введения с функцией $a_\tau(\cdot): B \to R^+$, определенной формулой:

$$a_\tau(b) \underset{\text{def}}{=} \left|\tau\right| a(b) \quad (b \in B).$$

Положив при всяком $m \in N$

$$\left(X^\tau(m), \chi^\tau(m)\right) \underset{\text{def}}{=} \left(X^{m\tau}, \chi^{m\tau}\right) = \mathfrak{H}_\tau m \underset{(15)}{=} \mathfrak{H}(m\tau),$$

получим семейство морфизмов $\left(X^\tau(m), \chi^\tau(m)\right)$ $(m \in N)$ векторного расслоения (*E, p, B*), удовлетворяющее следующему условию, сформулированному во введении к каждой из статей [1—4]: существует функция $a_\tau(\cdot): B \to R^+$ такая, что для всяких $b \in B$, $m \in N$ имеет место неравенство

$$\max\left\{\left\| X^\tau(m,b)\right\|, \left\|\left[X^\tau(m,b)\right]^{-1}\right\|\right\} \leqslant \exp\left(m a_\tau(b)\right) \tag{18}$$

(где через $X^\tau(m,b)$ обозначено сужение отображения $X^\tau(m)$ на слой $p^{-1}(b)$; таким образом, если $X^\tau(m) = X^{m\tau}$, то $X^\tau(m,b) = X^{m\tau}\left[b\right]$), удовлетворяющее следующим условиям а)—в) (сформулированным в [4, § 3]):

а) $(X^\tau, \chi^\tau) \underset{\text{def}}{=} (X^\tau(1), \chi^\tau(1))$ — автоморфизм векторного расслоения (*E, p, B*);

б) при всяком $m \in N$ имеют место равенства $X^\tau(m) = (X^\tau)^m$, $\chi^\tau(m) = (\chi^\tau)^m$;

в) существует функция $a_\tau(\cdot): B \to R^+$ такая, что $a_\tau\left((\chi^\tau)^m b\right) = a_\tau\left(b\right)$ для всяких $b \in B$, $m \in N$, и такая, что при всяком $b \in B$ имеет место неравенство

$$\max\left\{\left\| X^\tau[b]\right\|, \left\|\left[X^\tau[b]\right]^{-1}\right\|\right\} \leqslant \exp\left(a_\tau(b)\right). \tag{19}$$

Проверка всех этих утверждений тривиальна: неравенства (18), (19) следуют из условия на $\mathfrak{H}$, наложенного в п. 2 введения, в силу равенства $\left[X^t\left[b\right]\right]^{-1} = X^{-t}\left[\chi^t b\right]$ $\left(b \in B, t \in G\right)$.

Замечание. В. левых частях равенств (2) — (4), (12), (13) не отражена в явной форме зависимость показателей $\lambda_k(b), \lambda(\xi)$ и подпространств $R_0^k(b), E_k(b)$ от гомоморфизма $\mathfrak{H}$. Но бывает желательно подчеркнуть в обозначениях эту зависимость (когда кроме гомоморфизма $\mathfrak{H}$ рассматривается еще один (или более) гомоморфизм). С этой целью будем иногда писать в формулах (2) — (4), (12) — (14)

$$\lambda_i(\mathfrak{H}, b) \text{ вместо } \lambda_i(b); \ \lambda(\mathfrak{H}, \xi) \text{ вместо } \lambda(\xi);$$

$$R_0^k(\mathfrak{H}, b) \text{ вместо } R_0^k(b); \ E_k(\mathfrak{H}, b) \text{ вместо } E_k(b).$$

Если **G** = **Z**, то в этих обозначениях вместо $\mathfrak{H}$ будем иногда писать X, χ, где $(X, \chi) = \mathfrak{H}1$; например, будем писать $E_k(X, \chi; b)$ вместо $E_k(\mathfrak{H}, b)$, $\lambda(X, \chi; \xi)$ вместо $\lambda(\mathfrak{H}, \xi)$ и т. п.

Лемма 2. Для всяких $\tau \in G_*^+$, $b \in B$, $\xi \in p_*^{-1}(b)$, $k \in \{1, ..., n\}$ *имеют место равенства* (*в которых* $m \in Z$)

$$\lambda(\mathfrak{H}_\tau, \xi) \underset{def}{=} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \ln\left|X^{m\tau}\xi\right| = \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \ln\left|X^\tau(m,b)\xi\right|,$$

$$\lambda(\mathfrak{H}_\tau, \xi) \underset{def}{=} \min_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in R_*^{n-k+1}} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \ln\left|X^{m\tau}\xi\right| =$$

$$= \min_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in R_*^{n-k+1}} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \ln\left|X^\tau(m,b)\xi\right|.$$

Доказательство следует из того, что по определению $X^\tau(m,b) = X^{m\tau}\left[b\right]$. Лемма 2 доказана.

Лемма 2 показывает, что показатели Ляпунова $\lambda_k(\mathfrak{H}_\tau, b)$ совпадают с показателями Ляпунова $\lambda_k(b)$ семейства морфизмов $\left(X^\tau(m), \chi^\tau(m)\right)$ $(m \in N)$, определенными в [1, с. 1408].

Лемма 3. Для всяких $\tau \in G_*^+,\ b \in B,\ \xi \in p_*^{-1}(b),\ \ k \in \{1,...,n\}$ имеют место равенства

$$\lambda(\mathfrak{H}_\tau, \xi) = \tau\lambda(\mathfrak{H}, \xi), \tag{20}$$

$$\lambda_k(\mathfrak{H}_\tau, b) = \tau\lambda_k(\mathfrak{H}, b). \tag{21}$$

Доказательство. Из формул (2), (4), используя соглашения об обозначениях, принятые перед формулировкой леммы 2, при всяких $\tau \in G_*^+,\ b \in B,\ k \in \{1,...,n\}$ получаем:

$$\lambda_k(\mathfrak{H}_\tau, b) = \min_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in R_*^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{H}_\tau, \xi),$$

$$\lambda_k(\mathfrak{H}, b) = \min_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in R_*^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{H}, \xi)$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать, что при всяких $\tau \in G_*^+,\ b \in B,\ \xi \in p_*^{-1}(b)$ имеет место равенство (20).

Пусть даны произвольные $\tau \in G_*^+,\ b \in B,\ \xi \in p_*^{-1}(b)$.

1) Пусть дана произвольная последовательность $\{t_s\}_{s \in N}$ $(t \in G_*^+\ (s \in N))$, стремящаяся к $+\infty$.

Докажем соотношение*

$$\frac{1}{t_s}\ln\left|X^{t_s}\xi\right| - \frac{1}{[t_s]_\tau}\ln\left|X^{[t_s]_\tau}\xi\right| \underset{s\to\infty}{\to} 0. \tag{22}$$

Перепишем левую часть соотношения (22) в виде

$$\frac{1}{t_s}\left[\ln\left|X^{t_s}\xi\right| - \ln\left|X^{[t_s]_\tau}\xi\right|\right] + \left(\frac{1}{t_s} + \frac{1}{[t_s]_\tau}\right)\ln\left|X^{[t_s]_\tau}\xi\right|. \tag{23}$$

Для всяких $t \in G,\ \theta \in G$ имеем

$$\ln\left|X^t\xi\right| - \ln\left|X^\theta\xi\right| = \ln\left(\left|X^t\xi\right| \cdot \left|X^\theta\xi\right|^{-1}\right) = \ln\left(\left|X^{t-\theta}[p\eta]\eta\right| \cdot |\eta|^{-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \ln\left\|X^{t-\theta}[p\eta]\right\| \leqslant |t-\theta|\,a(p\eta), \tag{24}$$

где

$$\eta = X^\theta\xi, \tag{25}$$

$$p\eta \underset{(25)}{=} pX^\theta\xi = \chi^\theta p\xi = \chi^\theta b. \tag{26}$$

Из формул (24), (26) следует, что при всяких $t \in G,\ \theta \in G$ $\ln\left|X^t\xi\right| - \ln\left|X^\theta\xi\right| \leqslant |t-\theta|\,a\left(\chi^\theta b\right) = |t-\theta|\,a(b)$; так как $t \in G,\ \theta \in G$ здесь произвольны, то верно и неравенство $\ln\left|X^\theta\xi\right| - \ln\left|X^t\xi\right| \leqslant |\theta - t|\,a(b)$; следовательно, при всяких $t \in G,\ \theta \in G$

$$-|t-\theta|\,a(b) \leqslant \ln\left|X^t\xi\right| - \ln\left|X^\theta\xi\right| \leqslant |t-\theta|\,a(b). \tag{27}$$

Положив в формуле (27) $t = t_s,\ \theta = [t_s]_\tau$ (тогда $|t-\theta| = t_s - [t_s]_\tau < \tau$), получаем

$$-\tau a(b) \leqslant \ln\left|X^{t_s}\xi\right| - \ln\left|X^{[t_s]_\tau}\xi\right| \leqslant \tau a(b). \tag{28}$$

Из формулы (28) и соотношения $t_s \underset{s\to\infty}{\to} +\infty$ следует, что первое слагаемое суммы (23) стремится к нулю при $s \to \infty$.

Далее,

---

* Через $[t]_\tau$ обозначается наибольшее из целых кратных числа $\tau > 0$, не превосходящих числа *t*. Очевидно, $[t]_\tau = \tau\left[\frac{t}{\tau}\right]$, где [*x*] – целая часть *x*.

$$\frac{1}{[t_s]_\tau}-\frac{1}{t_s}=\frac{t_s-[t_s]_\tau}{[t_s]_\tau\, t_s}\in\left[0,\tau\left([t_s]_\tau\right)^{-2}\right],\tag{29}$$

$$\begin{gathered}\ln\left|X^{[t_s]_\tau}\xi\right|\leqslant\ln\left(\left\|X^{[t_s]_\tau}[b]\right\|\cdot|\xi|\right)=\ln\left\|X^{[t_s]_\tau}[b]\right\|+\ln|\xi|\underset{(1)}{\leqslant}\\ \underset{(1)}{\leqslant}[t_s]_\tau\, a(b)+\ln|\xi|,\end{gathered}\tag{30}$$

$$\begin{gathered}\ln\left|X^{[t_s]_\tau}\xi\right|\geqslant\ln\left(\left\|\left[X^{[t_s]_\tau}[b]\right]^{-1}\right\|^{-1}|\xi|\right)=\ln\left\|\left[X^{[t_s]_\tau}[b]\right]^{-1}\right\|^{-1}+\\ +\ln|\xi|\underset{(1)}{\geqslant}-[t_s]_\tau\, a(b)+\ln|\xi|.\end{gathered}\tag{31}$$

Из формул (29) — (31) и соотношения $t_s \underset{s\to\infty}{\to} +\infty$ следует, что второе слагаемое суммы (23) стремится к нулю при $s\to\infty$. Соотношение (22) доказано.

2) Докажем равенство (20). Учитывая, что $\tau>0$ и что $m\tau\in G_*^+$ при всяком $m\in N$, имеем

$$\begin{gathered}\lambda(\mathfrak{H}_\tau,\xi)\underset{def}{=}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|X^{m\tau}\xi\right|=\tau\,\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\ln\left|X^{m\tau}\xi\right|\leqslant\\ \tau\,\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^{t}\xi\right|=\tau\lambda(\mathfrak{H},\xi)\quad(m\in Z,\ t\in G).\end{gathered}\tag{32}$$

Возьмем какую-нибудь последовательность $\{t_s\}_{s\in\mathbf{N}}$ ($t_s\in\mathbf{G}_*^+$ ($s\in\mathbf{N}$)), стремящуюся к $+\infty$ и такую, что $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{1}{t_s}\ln|X^{t_s}\xi|$ существует и

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{t_s}\ln|X^{t_s}\xi|=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^{t}\xi|.\tag{33}$$

Отсюда в силу формулы (22) следует, что $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{1}{[t_s]_\tau}\ln|X^{[t_s]_\tau}\xi|$ существует и

$$\begin{gathered}\lim_{s\to\infty}\frac{1}{[t_s]_\tau}\ln|X^{[t_s]_\tau}\xi|=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{t_s}\ln|X^{t_s}\xi|\underset{(33)}{=}\\ \underset{(33)}{=}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^{t}\xi|=\lambda(\mathfrak{H},\xi).\end{gathered}\tag{34}$$

Так как $[t_s]_\tau=m_s\tau$, где $m_s\in\mathbf{N}$ ($s\in\mathbf{N}$), то

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{[t_s]_\tau}\ln|X^{[t_s]_\tau}\xi|\leqslant\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in\mathbf{Z})}}}\frac{1}{m\tau}\ln|X^{m\tau}\xi|=\frac{1}{\tau}\lambda(\mathfrak{H}_\tau,\xi).\tag{35}$$

Так как $\tau>0$, то из формул (34), (35) следует неравенство

$$\tau\lambda(\mathfrak{H},\xi)\leqslant\lambda(\mathfrak{H}_\tau,\xi).\tag{36}$$

Из формул (32), (36) следует равенство (20). Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. *Для всяких* $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $b\in B$, $\xi\in p_*^{-1}(b)$ *имеет место равенство* (*в котором* $m\in\mathbf{Z}$, $t\in\mathbf{G}$):

$$\underline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|X^{m\tau}\xi|=\tau\,\underline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^{t}\xi|.\tag{37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны произвольные $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $b\in B$, $\xi\in p_*^{-1}(b)$

Учитывая, что $\tau>0$ и что $m\tau\in\mathbf{G}_*^+$ при всяком $m\in\mathbf{N}$, имеем:

$$\begin{gathered}\underline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|X^{m\tau}\xi|=\tau\,\underline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\ln|X^{m\tau}\xi|\geqslant\\ \geqslant\tau\,\underline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^{t}\xi|\quad(m\in\mathbf{Z},\ t\in\mathbf{G}).\end{gathered}\tag{38}$$

Возьмем какую-нибудь последовательность $\{t_s\}_{s\in\mathbf{N}}$ ($t_s \in \mathbf{G}_*^+$ ($s\in\mathbf{N}$)), стремящуюся к $+\infty$ и такую, что $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{1}{t_s}\ln|X^{t_s}\xi|$ существует и

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{t_s}\ln|X^{t_s}\xi| = \varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|X^{t}\xi| \quad (t\in\mathbf{G}). \tag{39}$$

Из существования этого предела следует в силу формулы (22), что $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{1}{[t_s]_\tau}\ln|X^{[t_s]_\tau}\xi|$ существует и

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{[t_s]_\tau}\ln|X^{[t_s]_\tau}\xi| = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{t_s}\ln|X^{t_s}\xi|. \tag{40}$$

Так как $[t_s]_\tau = m_s\tau$, где $m_s\in\mathbf{N}$ ($s\in\mathbf{N}$), то

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{[t_s]_\tau}\ln|X^{[t_s]_\tau}\xi| \geqslant \varliminf_{m\to+\infty}\frac{1}{m\tau}\ln|X^{m\tau}\xi| \tag{41}$$

(здесь $m\in\mathbf{Z}$).

Из формул (39) — (41) следует неравенство

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|X^{t}\xi| \geqslant \varliminf_{m\to+\infty}\frac{1}{m\tau}\ln|X^{m\tau}\xi| \tag{42}$$

(здесь $m\in\mathbf{Z}$, $t\in\mathbf{G}$).

Так как $\tau>0$, то из формул (38), (42) следует равенство (37). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для всяких* $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $b\in B$, $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ *имеет место равенство* $E_k(\mathfrak{H}_\tau,\ b) = E_k(\mathfrak{H},\ b)$.

Доказательство. Напомним, что, согласно формуле (13) и соглашению об обозначениях, изложенному перед формулировкой леммы 2, при всяких $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $b\in B$, $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ имеют место равенства

$$E_k(\mathfrak{H},\ b) = E(\xi\in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)), \tag{43}$$

$$E_k(\mathfrak{H}_\tau,\ b) = E(\xi\in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H}_\tau,\ \xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}_\tau,\ b)). \tag{44}$$

Напомним также о соглашении: $\lambda(\mathfrak{H},\ 0_b) = \lambda(\mathfrak{H}_\tau,\ 0_b) = -\infty$. После этих напоминаний ясно, что лемма 5 непосредственно следует из леммы 3. Лемма 5 доказана.

§ 3. Продолжаем рассмотрение гомоморфизма $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ (где $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$), удовлетворяющего условию, наложенному в п. 2 введения.

Напомним определение Перрона, приведенное в [4] на с. 452 (определение 2) в удобной для [4] форме*.

Определение 3. Гомоморфизм** $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ называется *интегрально**** *разделенным***** *с индексом* $k\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$ *в точке* $b\in B$, если выполнена следующая совокупность условий:

i) имеет место строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b); \tag{45}$$

---

* В цитируемом определении в [4] имеется опечатка (не являющаяся, правда, ошибкой): второе слово условия ii) должно быть не «некоторого», а «всякого». В доказательстве теоремы в [4] цитируемое определение понимается именно в том виде, который получается в результате указанного здесь исправления.

** Иногда вместо слов «гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$» (если $\mathbf{G}=\mathbf{Z}$) будем писать в этом определении слова «автоморфизм $(X,\ \chi)$» (где $(\mathrm{X},\chi)=\mathfrak{H}1$).

*** В литературе более принято писать «*экспоненциально*» (вместо написанного здесь «*интегрально*»).

**** Подробнее: интегрально разделенным на $\mathbf{G}^+$.

ii) для *всякого* алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b)$ векторного подпространства[*****] $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b)$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b)$ для всяких[******] $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$| X^t \xi | \cdot | X^s \xi |^{-1} \geqslant \alpha \, \{\exp(\beta\, (t-s))\} \, | X^t \eta | \cdot | X^s \eta |^{-1} . \tag{46}$$

Л е м м а 6. *Пусть дано произвольное* $\tau \in \mathbf{G}_*^+$. *Для того чтобы гомоморфизм* $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\, \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B))$ *был интегрально разделенным с индексом* $k \in \{1,\, \ldots,\, n-1\}$ *в точке* $b \in B$, *необходимо и достаточно, чтобы гомоморфизм* $\mathfrak{H}_\tau \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\, \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B))$ *был интегрально разделенным с индексом* k *в точке* b.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\, \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B))$ интегрально разделен с индексом $k \in \{1,\, \ldots,\, n-1\}$ в точке $b \in B$. Пусть дано $\tau \in \mathbf{G}_*^+$.

а) В силу леммы 3 при всяком $i \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ имеет место равенство

$$\lambda_i(\mathfrak{H}_\tau,\, b) = \tau \lambda_i(\mathfrak{H},\, b); \tag{47}$$

поэтому (учитывая, что $\tau > 0$) из строгого неравенства

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\, b) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\, b) \tag{48}$$

(см. условие *i*) определения 3, т. е. формулу (45)) следует строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H}_\tau,\, b) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}_\tau,\, b). \tag{49}$$

Таким образом, доказано, что гомоморфизм $\mathfrak{H}_\tau \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\, \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B))$ удовлетворяет условию *i*) определения 3.

б) В силу леммы 5 имеет место равенство

$$E_k(\mathfrak{H}_\tau,\, b) = E_k(\mathfrak{H},\, b), \tag{50}$$

которое вследствие строгих неравенств (48), (49) может быть записано в виде

$$\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}_\tau,\, b) = \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b). \tag{51}$$

Для всяких $m \in \{0\} \bigcup \mathbf{N}$, $q \in \{0\} \bigcup \mathbf{N}$ таких, что $m \geqslant q$, имеем: $m\tau \in \mathbf{G}^+$, $m\tau \in \mathbf{G}^q$, $m\tau \geqslant q\tau$ (так как $\tau > 0$). Следовательно (см. условие *ii*) определения 3), для всякого алгебраического дополнения

$$\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}_\tau,\, b) \underset{(51)}{=} p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b)$$

векторного подпространства $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}_\tau,\, b) \underset{(51)}{=} \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b)$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}_\tau,\, b) \underset{(51)}{=} \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b)$ для всяких $m \in \{0\} \bigcup \mathbf{N}$, $q \in \{0\} \bigcup \mathbf{N}$ таких, что $m \geqslant q$, имеет место неравенство

$$| X^{m\tau} \xi | \cdot | X^{q\tau} \xi |^{-1} \geqslant \alpha \, \{\exp(\beta\tau\, (m-q))\} \, | X^{m\tau} \eta | \cdot | X^{q\tau} \eta |^{-1} .$$

Таким образом, доказано, что гомоморфизм $\mathfrak{H}_\tau \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\, \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B))$ удовлетворяет условию *ii*) определения 3 (с числом $\beta\tau$ вместо β). Необходимость доказана.

2. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть дан гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\, \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B))$, дано $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ и пусть гомоморфизм $\mathfrak{H}_\tau \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\, \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B))$ интегрально разделен с индексом $k \in \{1,\, \ldots,\, n-1\}$ в точке $b \in B$.

а) В силу леммы 3 при всяком $i \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ имеет место равенство (47), поэтому (учитывая, что $\tau > 0$) из строгого неравенства (49) (выполненного в силу интегральной

[*****] Напомним, что если выполнено неравенство (45), то через $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b)$ обозначается $E_k(\mathfrak{H},\, b)$, где $E_k(\mathfrak{H},\, b)$ определено формулой (43).

[******] $\mathbf{G}^+ = \mathbf{R}^+$, если $\mathbf{G} = \mathbf{R}$; $\mathbf{G}^+ = \{0\} \bigcup \mathbf{N}$, если $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$.

разделенности гомоморфизма $\mathfrak{H}_\tau \in \operatorname{Hom}(\mathbf{Z},\ \operatorname{Aut}(E,\ p,\ B))$ с индексом k в точке b, см. условие *ii*) определения 3) следует строгое неравенство (48).

Таким образом, доказано, что гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \operatorname{Hom}(\mathbf{G},\ \operatorname{Aut}(E,\ p,\ B))$ удовлетворяет условию *i*) определения 3.

б) В силу леммы 5 имеет место равенство (50), которое вследствие строгих неравенств (48), (49) может быть переписано в виде равенства (51).

Условие *ii*) определения 3 для гомоморфизма $\mathfrak{H}_\tau \in \operatorname{Hom}(\mathbf{Z},\ \operatorname{Aut}(E,\ p,\ B))$ состоит в следующем: для всякого алгебраического дополнения

$$\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}_\tau,\ b) \underset{(51)}{=} p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$$

векторного подпространства $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}_\tau,\ b) \underset{(51)}{=} \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют вещественные числа $\alpha_\tau > 0$, $\beta_\tau > 0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}_\tau,\ b) \underset{(51)}{=} \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ для всяких $m \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, $q \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ таких, что $m \geqslant q$, имеет место неравенство

$$|X^{m\tau}\xi| \cdot |X^{q\tau}\xi|^{-1} \geqslant \alpha_\tau \{\exp(\beta_\tau (m-q))\} |X^{m\tau}\eta| \cdot |X^{q\tau}\eta|^{-1}. \qquad (52)$$

Для всяких $r \in \mathbf{G}$, $\zeta \in p^{-1}(b)$ (пользуясь тем, что $|r-[r]_\tau| < \tau$, а $(\chi^t b) = a(b)$) имеем

$$\begin{aligned} |X^r\zeta| &= |X^{r-[r]_\tau}[\chi^{[r]_\tau}b]\, X^{[r]_\tau}\zeta| \leqslant \|X^{r-[r]_\tau}[\chi^{[r]_\tau}b]\| \cdot |X^{[r]_\tau}\zeta| \underset{(1)}{\leqslant} \\ &\underset{(1)}{\leqslant} \{\exp((r-[r]_\tau)\, a(\chi^{[r]_\tau}b))\} |X^{[r]_\tau}\zeta| \leqslant \{\exp(\tau a(b))\} |X^{[r]_\tau}\zeta|, \end{aligned} \qquad (53)$$

$$\begin{aligned} |X^r\zeta| &= |X^{r-[r]_\tau}[\chi^{[r]_\tau}b]\, X^{[r]_\tau}\zeta| \geqslant \|[X^{r-[r]_\tau}[\chi^{[r]_\tau}b]]^{-1}\|^{-1} \cdot |X^{[r]_\tau}\zeta| \underset{(1)}{\geqslant} \\ &\underset{(1)}{\geqslant} \{\exp(-(r-[r]_\tau)\, a(\chi^{[r]_\tau}b))\} |X^{[r]_\tau}\zeta| \geqslant \{\exp(-\tau a(b))\} |X^{[r]_\tau}\zeta|. \end{aligned} \qquad (54)$$

Пусть даны произвольные $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ такие, что $t \geqslant s$. Тогда для всяких ненулевых векторов $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ имеют место неравенства

$$|X^{[t]_\tau}\xi| \cdot |X^{[s]_\tau}\xi|^{-1} \geqslant \alpha_\tau \left\{\exp\left(\beta_\tau\left(\left[\frac{t}{\tau}\right] - \left[\frac{s}{\tau}\right]\right)\right)\right\} |X^{[t]_\tau}\eta| \cdot |X^{[s]_\tau}\eta|^{-1} \qquad (55)$$

(формула (52) при $m = \left[\dfrac{t}{\tau}\right],\ q = \left[\dfrac{s}{\tau}\right]$),

$$|X^t\xi| \geqslant \{\exp(-\tau\alpha(b))\} |X^{[t]_\tau}\xi| \qquad (56)$$

(формула (54) при $r = t$, $\zeta = \xi$),

$$|X^s\xi| \leqslant \{\exp(\tau\alpha(b))\} |X^{[s]_\tau}\xi| \qquad (57)$$

(формула (53) при $r = s$, $\zeta = \xi$),

$$|X^t\eta| \leqslant \{\exp(\tau\alpha(b))\} |X^{[t]_\tau}\eta| \qquad (58)$$

(формула (53) при $r = t$, $\zeta = \eta$),

$$|X^s\eta| \geqslant \{\exp(-\tau\alpha(b))\} |X^{[s]_\tau}\eta| \qquad (59)$$

(формула (54) при $r = s$, $\zeta = \eta$),

$$|X^t\xi|\cdot|X^s\xi|^{-1} \underset{(57)}{\overset{(56)}{\geqslant}} \{\exp(-2\tau\alpha(b))\}|X^{[t]_\tau}\xi|\cdot|X^{[s]_\tau}\xi|^{-1} \underset{(55)}{\geqslant}$$

$$\underset{(55)}{\geqslant} \alpha_\tau\{\exp(-2\tau\alpha(b))\}\left\{\exp\left(\beta_\tau\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]-\left[\frac{s}{\tau}\right]\right)\right)\right\}\times$$

$$\times|X^{[t]_\tau}\eta|\cdot|X^{[s]_\tau}\eta|^{-1} \underset{(59)}{\overset{(58)}{\geqslant}} \alpha_\tau\{\exp(-4\tau\alpha(b))\}\times$$

$$\times\left\{\exp\left(\beta_\tau\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]-\left[\frac{s}{\tau}\right]\right)\right)\right\}|X^t\eta|\cdot|X^s\eta|^{-1}\geqslant \alpha_\tau\{\exp(-4\tau\alpha(b)-\beta_\tau)\}\times$$

$$\times\left\{\exp\left(\frac{\beta_\tau}{\tau}(t-s)\right)\right\}|X^t\eta|\cdot|X^s\eta|^{-1}.$$

Таким образом, доказано, что гомоморфизм $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ удовлетворяет условию *ii*) определения 3 (с числами $\alpha_\tau\exp(-4\tau\alpha(b)-\beta_\tau)$ вместо α и $\dfrac{\beta_\tau}{\tau}$ вместо β).

* Напомним, что $[t]_\tau=\tau\left[\dfrac{t}{\tau}\right]$, где $[x]$ — целая часть x.

Достаточность доказана. Лемма 6 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Заменив в определении 3 (в условии *ii*)) $\mathbf{G}^+$ на $\mathbf{G}^+_*$, получаем определение, эквивалентное определению 3 (доказательство: в одну сторону — очевидно, в другую сторону — следует из неравенства (1) и тождества $a(\chi^t b)\equiv a(b)$).

З а м е ч а н и е 2. Условие *ii*) определения 3, очевидно, эквивалентно следующему условию: для всякого алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-k}=p^{-1}(b)\ominus\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ векторного подпространства $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют вещественные числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для всяких $t\in\mathbf{G}^+$, $s\in\mathbf{G}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство*

$$\|X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}^{n-k}}\|^{-1}\geqslant\alpha\,\{\exp(\beta(t-q))\}\,\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\,b)}\|.$$

Заменив в определении 3 второе слово условия *ii*) (слово «всякого») словом «некоторого», получаем следующее определение**, эквивалентность которого определению 3 будет доказана ниже (см. лемму 7).

О п р е д е л е н и е 4. Гомоморфизм*** $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ называется *интегрально разделенным с индексом* $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *в точке* $b\in B$, если выполнена следующая совокупность условий:

i) имеет место строгое неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)>\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$;

ii) для *некоторого* алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-k}=p^{-1}(b)\ominus\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ и векторного подпространства $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют вещественные числа $\alpha_0>0$, $\beta_0>0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi\in\mathbf{R}_0^{n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ для всяких $t\in\mathbf{G}^+$, $s\in\mathbf{G}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\cdot|X^s\xi|^{-1}\geqslant\alpha_0\,\{\exp(\beta_0\,(t-s))\}\,|X^t\eta|\cdot|X^s\eta|^{-1}. \qquad (60)$$

Л е м м а 7. *Определение 4 эквивалентно определению 3.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Если гомоморфизм $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ удовлетворяет условиям определения 3, то он удовлетворяет условиям определения 4, это — очевидно.

---

* Через Y_C обозначается сужение отображения Y на множество C.

** По поводу которого можно сделать замечания, аналогичные замечаниям 1, 2.

*** При $G=Z$ вместо слов «гомоморфизм $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$» будем иногда писать в этом определении слова: «автоморфизм $(X,\ \chi)$» (где $(\mathrm{X},\chi)=\mathfrak{H}1$).

2. Пусть гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ удовлетворяет условиям определения 4.

а) Тогда условие *i*) определения 3 выполнено, так как оно совпадает с условием *i*) определения 4.

б) Обозначим через P проектор, отображающий слой $p^{-1}(b)$ на подпространство $\mathbf{R}_0^{n-k}$ и аннулирующий подпространство $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ (подробнее: так как $p^{-1}(b) = \mathbf{R}_0^{n-k} \oplus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$, то всякий вектор $\zeta \in p^{-1}(b)$ единственным способом представим в виде суммы $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$, где $\zeta_1 \in \mathbf{R}_0^{n-k}$, $\zeta_2 \in \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$; полагаем по определению $P\zeta = \zeta_1$).

Пусть $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ — произвольное алгебраическое дополнение векторного подпространства $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ слоя $p^{-1}(b)$. Так как $\mathbf{R}^{n-k} \bigcap \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b) = \{0_b\}$, то сужение $\widehat{P}: \mathbf{R}^{n-k} \to \mathbf{R}_0^{n-k}$ линейного оператора $\widehat{P}: p^{-1}(b) \to \mathbf{R}_0^{n-k}$ на подпространство $\mathbf{R}^{n-k}$ имеет нулевое ядро и, следовательно, существует обратный оператор $\widehat{P}^{-1}: \mathbf{R}_0^{n-k} \to \mathbf{R}^{n-k}$.

Для всякого $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$ и всякого $t \in \mathbf{G}^+$ имеем****

$$P\xi = \widehat{P}\xi,\ \ \| X^t\xi | - | X^t P\xi \| \leqslant | X^t\xi - X^t P\xi | = | X^t(I-P)\,\xi |. \tag{61}$$

Так как $P \in \mathbf{R}_0^{n-k}$, $(I-P)\,\xi \in \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$, то из условия *ii*) определения 4, заменив в нем ξ на $P\xi$, а η на $(I-P)\,\xi$, при всяких* $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $t \in \mathbf{G}^+$ ($s = 0$), имеем (если $(I-P)\,\xi \neq 0_b$): $| X^t(I-P)\,\xi | \leqslant \alpha_0^{-1}\{\exp(-\beta_0 t)\} \times | X^t P\xi | \cdot | P\xi |^{-1} \cdot | (I-P)\,\xi |$ (если $(I-P)\,\xi = 0_b$, то написанное неравенство очевидно), откуда при всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $t \in \mathbf{G}^+$ имеем

$$\begin{gathered} | X^t(I-P)\,\xi | \cdot | X^t P\xi |^{-1} \leqslant \alpha_0^{-1}\{\exp(-\beta_0 t)\} \, | P\xi |^{-1} | (I-P)\,\xi | \underset{(61)}{=} \\ \underset{(61)}{=} \alpha_0^{-1}\{\exp(-\beta_0 t)\} \, | \widehat{P}\xi |^{-1} | (I-\widehat{P})\,\xi | \leqslant \alpha_0^{-1}\{\exp(-\beta_0 t)\} \, \| (I-\widehat{P})\,\widehat{P}^{-1}\xi \|. \end{gathered} \tag{62}$$

Разделив неравенство в формуле (61) на $| X^t P\xi |$, получаем при всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $t \in \mathbf{G}^+$

$$\begin{gathered} \| X^t\xi | \cdot | X^t P\xi |^{-1} - 1 | \leqslant | X^t(I-P)\,\xi | \cdot | X^t P\xi |^{-1} \underset{(62)}{\leqslant} \\ \underset{(62)}{\leqslant} \alpha_0^{-1}\{\exp(-\beta_0 t)\} \, \| (I-\widehat{P})\,\widehat{P}^{-1} \|, \end{gathered}$$

откуда следует, что при всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $t \in \mathbf{G}^+$ имеет место неравенство

$$\| X^t\xi | \cdot | X^t P\xi |^{-1} - 1 | \leqslant \alpha_t, \tag{63}$$

где $\alpha_t \underset{\mathrm{def}}{=} \alpha_0^{-1}\{\exp(-\beta_0 t)\} \, \| (I-\widehat{P})\,\widehat{P}^{-1} \| \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

в) Возьмем $\overline{t} \in \mathbf{G}_*^+$ такое, что $\alpha_t < \dfrac{1}{2}$ при всяком $t \geqslant \overline{t}$. Из неравенства (63) следует, что при всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $t \geqslant \overline{t}$ ($t \in \mathbf{G}$) имеют место неравенства

$$\frac{1}{2} \leqslant | X^t\xi | \cdot | X^t P\xi |^{-1} \leqslant \frac{3}{2}. \tag{64}$$

При всяких $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $t \in \mathbf{G}^+$ имеем

$$\begin{gathered} X^t\xi = X^t\widehat{P}^{-1}\widehat{P}\xi = X^t\widehat{P}^{-1}X^{-t}X^t\widehat{P}\xi = \\ X^t\widehat{P}^{-1}X^{-t}(X^tP\xi) = X^t[b]\,\widehat{P}^{-1}[X^t[b]]^{-1}(X^tP\xi). \end{gathered} \tag{65}$$

При всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $t \in \mathbf{G}^+$ имеем

**** I — универсальное обозначение для тождественного отображения, т. е. одной и той же буквой I могут обозначаться тождественные отображения разных множеств.

* $\mathbf{R}_*^{n-k} = \mathbf{R}^{n-k} \setminus \{0_b\}$.

$$|X^t\xi|\cdot|X^tP\xi|^{-1} \underset{(65)}{\leqslant} \|X^t[b]\widehat{P}^{-1}[X^t[b]]^{-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\widehat{P}^{-1}\|\cdot\|X^t[b]\|\cdot\|[X^t[b]]^{-1}\| \underset{(1)}{\leqslant} \|\widehat{P}^{-1}\| \exp(2ta(b)). \tag{66}$$

При всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $t \in \mathbf{G}^+$ имеем также

$$|X^t\xi|\cdot|X^tP\xi|^{-1} \underset{(65)}{\geqslant} \|[X^t[b]\widehat{P}^{-1}[X^t[b]]^{-1}]^{-1}\|^{-1} = \|X^t[b]\widehat{P}[X^t[b]]^{-1}\|^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant \|\widehat{P}\|^{-1}\cdot\|X^t[b]\|^{-1}\cdot\|[X^t[b]]^{-1}\|^{-1} \underset{(1)}{\geqslant} \|\widehat{P}\|^{-1} \exp(-2ta(b)). \tag{67}$$

Положим

$$c_1 \underset{\text{def}}{=} \min\left\{\frac{1}{2},\ \|\widehat{P}\|^{-1} \exp(-2\overline{t}a(b))\right\}, \tag{68}$$

$$c_2 \underset{\text{def}}{=} \max\left\{\frac{3}{2},\ \|\widehat{P}^{-1}\| \exp(2\overline{t}a(b))\right\}. \tag{69}$$

При всяком $t \in \mathbf{G}^+$ таком, что $t \geqslant \overline{t}$, при всяком $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$ имеем

$$c_1 \underset{(68)}{\leqslant} \frac{1}{2} \underset{(64)}{\leqslant} |X^t\xi|\cdot|X^tP\xi|^{-1} \underset{(64)}{\leqslant} \frac{3}{2} \underset{(69)}{\leqslant} c_2;$$

при всяком $t \in \mathbf{G}^+$ таком, что $t \geqslant \overline{t}$, при всяком $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$ имеем

$$c_1 \underset{(68)}{\leqslant} \|\widehat{P}\|^{-1} \exp(-2\overline{t}a(b)) \leqslant \|\widehat{P}\|^{-1} \exp(-2ta(b)) \underset{(67)}{\leqslant} |X^t\xi\|\cdot|X^tP\xi|^{-1} \underset{(68)}{\leqslant}$$
$$\underset{(68)}{\leqslant} \|\widehat{P}^{-1}\| \exp(2ta(b)) \leqslant \|\widehat{P}^{-1}\| \exp(2\overline{t}a(b)) \underset{(69)}{\leqslant} c_2.$$

Таким образом, при всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$ имеем

$$0 \underset{(68)}{<} c_1 \leqslant |X^t\xi|\cdot|X^tP\xi|^{-1} \leqslant c_2.$$

Подведем итог подпунктов б), в). В этих подпунктах доказано, что если гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ удовлетворяет условиям определения 4, то для всякого алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ векторного подпространства $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ слоя $p^{-1}(b)$ найдутся вещественные числа $c_1(\mathbf{R}^{n-k}) > 0$, $c_2(\mathbf{R}^{n-k})$ такие, что при всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$ имеют место неравенства:

$$0 < c_1(\mathbf{R}^{n-k}) \leqslant |X^t\xi|\cdot|X^tP\xi|^{-1} \leqslant c_2(\mathbf{R}^{n-k}), \tag{70}$$

где P — проектор слоя $p^{-1}(b)$ такой, что $\mathrm{Im}\,P = \mathbf{R}_0^{n-k}$, $\mathrm{Ker}\,P = \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$.

г) Пусть дано $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$. Для всяких ненулевых векторов $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеем

$$|X^t\xi|\cdot|X^s\xi|^{-1} \underset{(70)}{\geqslant} c_1(\mathbf{R}^{n-k})[c_2(\mathbf{R}^{n-k})]^{-1}\cdot|X^tP\xi|\cdot|X^sP\xi|^{-1} \underset{(60)}{\geqslant}$$
$$\underset{(60)}{\geqslant} \alpha_{\mathbf{R}^{n-k}} \{\exp(\beta_0(t-s))\}|X^t\eta|\cdot|X^s\eta|^{-1}, \tag{71}$$

где

$$\alpha_{\mathbf{R}^{n-k}} \underset{\text{def}}{=} \alpha_0 c_1(\mathbf{R}^{n-k})[c_2(\mathbf{R}^{n-k})]^{-1} > 0. \tag{72}$$

Итак, доказано, что всякий гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, удовлетворяющий условиям определения 4, удовлетворяет условиям определения 3 (при этом число $\beta > 0$ не зависит от $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$, а число $\alpha > 0$ зависит от $\mathbf{R}^{n-k}$). Соединив это с результатом п. 1, получаем, что определения 3 и 4 эквивалентны. Лемма 7 доказана.

Литература

1. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408—1416.
2. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. II. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1587—1598.
3. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 10, с. 1766—1785.
4. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IV. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 47, № 3, с. 431—468.
5. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. V. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 47, № 8, с. 1394—1410.
6. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VI. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 48, № 5, с. 804—821.
7. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VII. — Дифференц. уравнения, 4982, т. 18, № 6, с. 957—978.
8. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VIII. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 8, с. 1330—1345.
9. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IX. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 9, с. 1507—1548.
10. Х ь ю з м о л л е р Д. Расслоенные поостранства. — М.: Мир, 1970.
11. Л я п у н о в А. М. Собр. соч. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 10 мая 1982 г.