Доклады Академии наук СССР
1965. Том 162, № 2

МАТЕМАТИКА

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 I 1965)

Дана система $dx/dt = A(t)x$ и функция $g(t) \geqslant 0$. Теорема 1 дает необходимые и достаточные условия, при которых решения системы

$$dx/dt = A(t)x \qquad (\mathrm{I})$$

и решения всякой системы

$$dx/dt = A(t)x + \varphi(x,t), \qquad (II)$$

где $\varphi(0,t) \equiv 0$ и $\varphi(x,t)$ имеет константу Липщица $g(t)$, имеют одинаковую асимптотику.

Теоремы 2—5 решают другие задачи (возникающие в теории устойчивости). В различных частных случаях, как следствия, из теорем 1—5 получается часть известных результатов Р. Э. Винограда, Б. Ф. Былова, Д. М. Гробмана, Гартмана, Винтнера, Онучика ([3-14]). Некоторые из этих следствий здесь приведены.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в $E^n; F(t)x_0$ — решение системы (I), равное x_0 при $t = t_0; v_i(t) = |\operatorname{cosec}\alpha_i|$, где $\alpha_i(t)$ —угол между $F(t)e_i$ и гиперплоскостью, натянутой на векторы $F(t)e_k$ $(k \neq i); v(t) = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} v_i(t)$.

Теорема 1. Пусть для некоторого t_0 и всех $t \geqslant t_0$

$$\left|\int^{t} g(\tau) v_i(\tau) \frac{\|x(\tau)\|}{\|F(\tau)e_i\|} d\tau\right| \leqslant C_1 \frac{\|x(t)\|}{\|F(t)e_i\|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (\mathrm{A})$$

где $C_1 < 1/2n; x(t)$ — произвольное решение системы (I) (в нижнем пределе t_0, если правая часть неравенства $\underset{t\to\infty}{\to} \infty$, и ∞ в противном случае).

Тогда для каждого решения $x(t)$ системы (I) найдется решение $y(t) = x(t) + z(t)$ системы (II) такое, что

$$\|z(t)\| \leqslant q\|x(t)\|, \text{ где } q < 1, \qquad (1)$$

причем всякое решение $y(t)$ системы (II) представило в таком виде и между начальными данными $x(t)$ и $y(t)$ существует гомеоморфизм.

Пусть (A) не выполнено ни для какого C_1. Тогда для всякого решения $x(t)$ системы (I) *найдется матрица-функция $B(t)$, $\|B(t)\| \leqslant g(t)$, такая, что у системы $dx/dt = A(t)x + B(t)x$ не существует решения $x(t) + z(t)$, удовлетворяющего* (1).

Замечание. В последующих теоремах необходимые условия не приводятся, но они столь же близки к достаточным, как и здесь.

Доказательство теоремы 1. Заменой

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i(t)}{\|F(t)e_i\|} F(t)e_i$$

система (II) приводится к виду

$$d\xi_i/dt = p_i(t)\xi_i + \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, t), \qquad (\mathrm{III})$$

причем

$$p_i(t)=\frac{d}{dt}\ln\|F(t)e_i\|;$$
$$\left|\varphi_i(\xi^{(1)},t)-\varphi_i(\xi^{(2)},t)\right|\leqslant v_i(t)g(t)\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|.$$

Фиксируем $x(t)$ (в новых координатах $\xi(t)$ — решение системы (I).

Тогда решение системы (II) $x(t)+z(t)$ (в новых координатах $\xi(t)+\xi(t)$) находится из системы

$$\xi_i(t)=\int^t \exp\left[\int_\tau^t p_i(\tau)d\tau\right]\varphi_i(\xi(\tau)+\xi(\tau),\tau)d\tau \quad (i=1,2,...,n) \tag{2}$$

(нижний предел в интеграле тот же, что и в (A)).

С помощью принципа Тихонова доказывается, что существует решение $z(t)$ этой системы, удовлетворяющее (1). Каждому решению $x(t)$ системы (I) сопоставим решение системы (II) $y(t)=x(t)+z(t)$, где $z(t)$ удовлетворяет (1). Надо доказать, что так получаются все решения системы (II), т. е. что многозначное отображение $I+\varphi: x(t_0)\to x(t_0)+z(t_0)$ есть отображение E^n на E^n. Для этого из $I+\varphi$ выделяем гомеоморфизм $\Phi=I+\overline{\varphi}$ и доказываем, что $\Phi(E^n)$ замкнуто в E^n. Так как $\Phi(E^n)$ не пусто и открыто в E^n (см. ([2]), гл. 5, предложение [3 : 14]), то $\Phi(E^n)=E^n$. Гомеоморфизм Φ строится по трансфинитной индукции.

Вполне упорядочим $E^n: x_0=0,\quad x_1,x_2,...,x_\omega,...$ Положим $z_0=\overline{\varphi}(x_0)=0$. Пусть определено однозначное отображение $z_\alpha=\overline{\varphi}(x_\alpha)$ для $\alpha<\beta$ такое, что

$$\|z_\alpha(t)-z_{\alpha'}(t)\|\leqslant q\|x_\alpha(t)-x_{\alpha'}(t)\| \quad \text{при } \alpha,\alpha'<\beta.$$

Тогда доказывается, что множество функций $z(t)$ такое, что

$$\|z(t)-z_\alpha(t)\|\leqslant q\|x_\beta(t)-x_\alpha(t)\| \quad (\alpha<\beta),$$

не пусто, и с помощью принципа Тихонова доказывается, что в нем существует решение системы (2) $z_\beta(t)$. Полагаем $z_\beta(t_0)=z_\beta=\overline{\varphi}(x_\beta)$. По трансфинитной индукции построено сжимающее отображение $\overline{\varphi}$. Тогда $\Phi=I+\overline{\varphi}$ — гомеоморфизм и $\Phi(E_n)$ замкнуто в E_n.

Следствие 1. Если $A(t)\equiv A$, то $v_i(t)\leqslant Ct^{m-1}$, где m — максимальный порядок жордановых клеток A, и условие (A) переходит в $\int^\infty \tau^{m-1}g(\tau)d\tau$ (см. ([9], [11])).

Следствие 2. Если

$$\int^\infty v(\tau)g(\tau)d\tau<\infty; \tag{*}$$

$$\int_\tau^t (p_{i+1}-p_i)d\tau\geqslant -d;\quad \int^\infty (p_{i+1}-p_i)d\tau=\infty, \tag{**}$$

то условие (A) выполнено.

В теореме Р. Э. Винограда ([4]) более жесткое условие

$$A(t)=\begin{pmatrix} p_1(t) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & p_n(t)\end{pmatrix};\quad \int_\tau^t (p_{i+1}-p_i)d\tau\geqslant a(t-\tau)-d \quad (a>0)$$

дает лишь сохранение характеристических показателей (а не точной асимптотики) при возмущении.

Теорема 2. Пусть для всякого $\varepsilon>0$ найдется $t_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\int^t v_i(\tau)g(\tau)\frac{\|x(\tau)\|}{\|F(\tau)e_i\|}e^{\varepsilon\tau}d\tau\right|\leqslant\frac{q_\varepsilon}{n}\frac{\|x(t)\|}{\|F(t)e_i\|}e^{\varepsilon t}\quad (i=1,2,...,n)$$

($q_\varepsilon < 1$ *при всех* $\varepsilon > 0$, $q_{\varepsilon_0} < \frac{1}{2}$ *при некотором* $\varepsilon_0 > 0$) *для любого решения* $x(t)$ *системы* (I) *для всех* $t \geqslant t_0(\varepsilon)$ (*в нижнем пределе интеграла* $t_0(\varepsilon)$, *если правая часть неравенства* $\underset{t\to\infty}{\to} \infty$, *и* ∞ *в противном случае*).

Тогда существует гомеоморфизм между начальными данными решений $x(t)$ *системы* (I) *и начальными данными решений* $y(t)$ *системы* (II), *при котором для любого* $\varepsilon > 0$

$$\| y(t) \| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon t} \| x(t) \|$$

для соответствующих решений.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 с необходимыми усложнениями.

Следствие 3. *Если* $v(t)\, g(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ *и выполнено* (∗∗), *то условия теоремы* 2 *выполнены*.

Таким образом, при возмущениях характеристические показатели не увеличиваются в условиях более широких, чем условия Р. Э. Винограда ([4]), при которых характеристические показатели сохраняются.

Теорема 3. *Пусть для всех решений* $x(t)$ *системы* (I) $\| x(t) \| \leqslant C_{x(t)} R(t)$. *Пусть существует* t_0, *функция* $C(t) \leqslant K$, *причем* $C(t_0)\, R(t_0) < 1/n$,

$$\left| \int^t g(\tau)\, v_i(\tau) \frac{\| x(\tau) + C(\tau)\, R(\tau) \|}{\| F(\tau)\, e_i \|} d\tau \right| \leqslant \frac{C(t)\, R(t)}{\| F(t)\, e_i \|} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(*нижний предел* t_0, *если правая часть неравенства* $\underset{t\to\infty}{\to} \infty$, *и* ∞ *в противном случае*) *для* $t \geqslant t_0$ *и для всех решений* $x(t)$ *системы* (I) *таких, что* $\| x(t_0) \| = 1$.

Тогда, если $y(t)$ — *решение системы* (II), *то*

$$\| y(t) \| \leqslant C_{y(t)} R(t).$$

Теорема 4. *Пусть система* (I) *устойчива и выполнены условия теоремы* 3, *причем* $R(t) \equiv 1$. *Тогда система* (II) *тоже устойчива*.

Теорема 5. *Пусть для всех решений* $x(t)$ *системы* (I) $\| x(t) \| \leqslant C_{\varepsilon,\, x(t)} R(t)\, e^{\varepsilon t}$ *для всех* $\varepsilon > 0$. *Пусть существует* t_0 *и функции* $C_\varepsilon(t) \leqslant K_\varepsilon$, *причем* $C_\varepsilon(t_0)\, R(t_0)\, e^{\varepsilon_0 t_0} < 1/n$ *для некоторого* $\varepsilon_0 > 0$ *и для всех* $\varepsilon > 0$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$;

$$\left| \int^t g(\tau)\, v_i(\tau) \frac{\| x(\tau) + C_\varepsilon(\tau)\, R(\tau)\, e^{\varepsilon t} \|}{\| F(\tau)\, e_i \|} d\tau \right| \leqslant \frac{C_\varepsilon(t)\, R(t)\, e^{\varepsilon t}}{\| F(t)\, e_i \|}$$

(*нижний предел равен* t_0, *если правая часть неравенства* $\underset{t\to\infty}{\to} \infty$, *и* ∞ *в противном случае*) *для* $t \geqslant t_0$ *и для всех решений* $x(t)$ *системы* (I), *для которых* $\| x(t_0) \| = 1$.

Тогда, если $y(t)$ — *решение системы* (II), *то*

$$\| y(t) \| \leqslant C_{\varepsilon,\, y(t)} R(t)\, e^{\varepsilon t} \text{ для всех } \varepsilon > 0.$$

Теорема 4 вытекает из теоремы 3, а доказательства теорем 3 и 5 вполне аналогичны доказательствам соответственно теорем 1 и 2.

Выражаю благодарность В. В. Немыцкому за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 I 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. N. Tychonoff, Math. Ann., 3, H. 5, 767 (1935). [2] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М. — Л., 1947. [3] Р. Э. Виноград, Докторская диссертация, МГУ, 1958. [4] Р. Э. Виноград, ДАН, **119**, № 4 (1958). [5] Р. Э. Виноград, ДАН, **114**, № 3 (1957). [6] Р. Э. Виноград, Матем. сборн., **42**, в. 2 (1957). [7] Б. Ф. Былов, Прикл. матем. и мех., **14**, в. 4 (1950). [8] Б. Ф. Былов, Диссертация, МГУ, 1954. [9] Д. М. Гробман, ДАН, **108**, № 4 (1956). [10] Д. М. Гробман, Матем. сборн., **30** (72), в. 1 (1952). [11] P. Hartman, A.

W i n t n e r , Am. J. Math., **77**, 45 (1955). [12] P. H a r t m a n , N. O n u c h i c , Pacific J. Math., **13**, № 4, 1193 (1963). [13] N. O n u c h i c , Michigan Math. J., **11**, № 3, 237 (1964). [14] N. O n u c h i c , J. Math. Anal, and Appl., 6, № 3, 457 (1963).