УДК 517.926.4

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. IX

Статья продолжает цикл, в который входят статьи [1—8]. Наиболее тесно она связана со статьями [4, 6—8].

Результаты сформулированы в § 2.

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть (E, p, B) — векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot, \cdot)$. На векторном расслоении (E, p, B) фиксируем некоторую риманову метрику (см. [9], с. 58—59).

2. Пусть (X, χ) — автоморфизм векторного расслоения (E, p, B)*.

Потребуем, чтобы существовала функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ такая, что для всякого $b \in B$ выполнены следующие соотношения**:

$$a(\chi b) = a(b), \tag{B.1}$$

$$\max\{\| X[b] \|, \ \| [X[b]]^{-1} \|\} \leqslant \exp(a(b)). \tag{B.2}$$

3. Пусть выполнены все условия предыдущих пунктов. Положим при всяком $m \in \mathbf{N}$

$$X(m) \underset{\text{def}}{=} X^m, \ \chi(m) \underset{\text{def}}{=} \chi^m. \tag{B.3}$$

Полученное таким образом семейство морфизмов $(X(m), \chi(m)) = (X^m, \chi^m))$ ($m \in \mathbf{N}$) векторного расслоения (E, p, B) удовлетворяет следующему условию, сформулированному во введении к каждой из статей [1—4]:

существует функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ такая, что для всяких $b \in B$, $m \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\max\{\| X(m, b) \|, \ \| [X(m, b)]^{-1} \|\} \leqslant \exp(ma(b)) \tag{B.4}$$

(где через $X(m, b)$ обозначено сужение на слой $p^{-1}(b)$ отображения $X(m)$; для $X(m) = X^m$ вместо $X(m, b)$ пишем $X^m[b]$).

Более того, так определенное семейство морфизмов $(X(m), \chi(m))$ ($m \in \mathbf{N}$) векторного расслоения (E, p, B) удовлетворяет условиям а) — в), сформулированным в начале § 3 статьи [4]; напомним здесь содержание этих условий:

а) $(X, \chi) \underset{\text{def}}{=} (X(1), \chi(1))$ — автоморфизм*** векторного расслоения (E, p, B);

б) при всяком $m \in \mathbf{N}$ имеют место равенства:

---

* Напомним, что это означает следующее: X — гомеоморфизм E на E, χ — гомеоморфизм B на B, выполнено равенство $pX = \chi p$ и при всяком $b \in B$ сужение $X[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $p^{-1}(\chi b)$.

** Обозначение $X[b]$ разъяснено в предыдущей сноске. Норма линейного отображения слоя на слой определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B).

*** В статье [4] вместо «автоморфизм» написано «изоморфизм». Это одно и то же, поскольку заранее известно, что $(X(m), \chi(m))$ при всяком $m \in N$ есть морфизм $(E, p, B) \to (E, p, B)$.

$$X(m) = X^m,\ \chi(m) = \chi^m; \tag{В.5}$$

в) существует функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ такая, что

$$a(\chi^m b) = a(b) \text{ при всяких } b \in B,\ m \in \mathbf{Z} \tag{В.6}$$

(степени с неположительным целым показателем определяются стандартным образом: $\chi^0 \underset{\text{def}}{=} 1_B$, $\chi^{-m} \underset{\text{def}}{=} (\chi^{-1})^m \underset{\text{def}}{=} (\chi^m)^{-1}$ при всяком $m \in \mathbf{N}$) и такая, что при всяком $b \in B$ имеет место неравенство (В.2).

Доказательства утверждений, сформулированных в этом пункте, приведены в статье [8] (в п. 1.4 введения).

4. Напомним определение *насыщенного* семейства морфизмов, данное в [4] (§ 3, определение 1).

Определение. Семейство морфизмов $(X(m), \chi(m)): (E, p, B) \to (E, p, B)$ ($m \in \mathbf{N}$), удовлетворяющее условиям а) — в) (см. п. 3 введения), называется *насыщенным*, если для всякой точки $b \in B$ такой, что при всяком $m \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство $\chi(m)\, b \neq b$, для всякой окрестности $W(b)$ точки b (в пространстве B) для всякого базиса $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) (в пространстве E) найдется $\overline{\delta} > 0$ такое, что для всякого $\overline{t} \in \mathbf{N}$ и всяких невырожденных* линейных операторов

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b) \to p^{-1}(\chi^m b) \tag{В.7}$$

($m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$), удовлетворяющих при всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ неравенству

$$\| Y_m (X[\chi^{m-1} b])^{-1} - I \| + \| X[\chi^{m-1} b]\, Y_m^{-1} - I \| < \overline{\delta}, \tag{В.8}$$

найдутся точка

$$b' \in W(b) \tag{В.9}$$

и изоморфизмы слоев (как евклидовых пространств)

$$\psi_k : p^{-1}(\chi^k b') \to p^{-1}(\chi^k b)\ (k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}) \tag{В.10}$$

такие, что:

i) $\psi_0^{-1} \in U(\xi_i)$ при всяком $i \in \{1, \ldots, n\}$;

ii) при всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\chi^{m-1} b') & \xrightarrow[X[\chi^{m-1} b']]{} & p^{-1}(\chi^m b') \\ \downarrow \psi_{m-1} & & \downarrow \psi_m \\ p^{-1}(\chi^{m-1} b) & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}(\chi^m b) \end{array}$$

коммутативна.

Пояснение обозначений. Через $\{1, \ldots, s\}$ всюду в статье обозначается множество натуральных чисел, не превосходящих числа $s \in \mathbf{N}$. Через $\{0, \ldots, s\}$ всюду в статье обозначается множество целых неотрицательных чисел, не превосходящих целого неотрицательного числа s. Тождественное отображение произвольного множества M обозначается либо через 1_M, либо через I.

§ 1. ЛЕММЫ

Конструкция [8, § 1] исходит из дифференцируемого многообразия V^n класса C^2 с римановой метрикой $\delta(\cdot, \cdot)$ класса C^1, удовлетворяющих условиям, сформулированным в [8, введение, п. 2.1, первый абзац]. Увеличим теперь на единицу эти классы гладкости, т.

---

* То есть имеющих обратные.

е. потребуем, чтобы многообразие V^n принадлежало классу C^3, а риманова метрика на нем — классу C^2. Остальные условия на V^n и $\delta(\cdot,\ \cdot)$ и всю конструкцию [8, § 1] оставим без изменений.

Пояснение. Если дано многообразие класса C^q с римановой метрикой класса C^{q-1}, то для всякого натурального $r<q$ можем («обеднив структуру») рассматривать это многообразие как многообразие класса C^r с римановой метрикой класса C^{r-1}.

Лемма 1. *Семейство морфизмов* $(X(m),\ \chi(m)):(E,\ p,\ B)\to(E,\ p,\ B)$ $(m\in\mathbf{N})$, *построенное, как в* [8, § 1], *исходя из многообразия* V^n *класса* C^3 *с римановой метрикой* $\delta(\cdot,\ \cdot)$ *класса* C^2, *является насыщенным**.

Доказательство. 1. Пусть дана точка $b\in B$ такая, что при всяком** $m\in\mathbf{N}$ имеет место неравенство $\chi^m b\neq b$. В силу формулы (1.1) статьи [8]

$$b=(f,\ x), \tag{1}$$

где*** $f\in S$, $x\in V^n$. Из определения отображения χ (см. формулу (1.5) в [8]) следует, что для всякого $k\in\{0\}\bigcup\mathbf{N}$

$$\chi^k(f,\ x)=(f,\ f^k x). \tag{2}$$

Из того, что при всяком $m\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство $\chi^m b\neq b$, вытекает в силу формулы (2), что при всяком $m\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство $f^m x\neq x$. Отсюда следует, что точки $x, fx,\ \ldots, f^m x,\ \ldots$ *все различны* (в самом деле, из равенства $f^{m_1}x=f^{m_2}x$ (где $m_1\geqslant m_2$ — некоторые натуральные числа) вытекает равенство $(f^{-1})^{m_2}f^{m_1}x=(f^{-1})^{m_2}f^{m_2}x$, т. е. $f^{m_1-m_2}x=x$; так как при $m_1-m_2\in\mathbf{N}$ этого быть не может, а $m_1-m_2\in\{0\}\bigcup\mathbf{N}$, то $m_1=m_2$).

2. Пусть дана окрестность $W(b)$ точки b в пространстве B. Расстояние $\tilde{d}_B(\cdot,\ \cdot)$ индуцирует ту же топологию на B, что и расстояние $d_B(\cdot,\ \cdot)$ (см. [8], § 1, п. 1). Поэтому найдется $\overline{\varepsilon}>0$ такое, что

$$W_{\overline{\varepsilon},\ \tilde{d}_B}(b)\subset W(b),\ W_{\overline{\varepsilon},\ \tilde{d}_B}(b)\underset{\mathrm{def}}{=}E\,\{\overline{b}\in B:\tilde{d}_B(\overline{b},\ b)<\overline{\varepsilon}).$$

Фиксируем такое $\overline{\varepsilon}$.

Пусть дан базис $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и даны окрестности $U(\xi_i)$ точек ξ_i ($i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$) (в пространстве E). В силу формулы (1.1) [8] и формулы (1) настоящей статьи

$$p^{-1}(b)=(f,\ \pi^{-1}(x)), \tag{3}$$

а в силу приведенного в [8, § 1, п. 1] определения векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ имеем

$$\xi_i=(f,\ \mathfrak{x}_i)\ (i\in\{1,\ \ldots,\ n\}), \tag{4}$$

причем векторы $\mathfrak{x}_i\in\pi^{-1}(x)$ ($i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$) образуют базис векторного пространства $\pi^{-1}(x)$.

Возьмем $\varepsilon_1>0$ такое, что для всякого $g\in S$, удовлетворяющего неравенству $\tilde{d}_S(f,\ g)<\varepsilon_1$, для всякого $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место включение

$$(g,\ \mathfrak{x}_i)\in U(\xi_i)\underset{(4)}{=}U((f,\ \mathfrak{x}_i));$$

такое $\varepsilon_1>0$ существует, так как $E=S\times TV^n$ (произведение топологических пространств),

---

* Определение *насыщенного* семейства морфизмов воспроизведено в п. 4 введения.

** Через $\mathbf{N}$ всюду в этом цикле статей обозначается множество всех натуральных чисел: $\mathbf{N}=\{1,\ 2,\ \ldots\}$.

*** Подчеркнем, что, начиная с этого места до конца доказательства леммы, $b=(f,\ x)$ — данная фиксированная точка пространства B (следовательно, $f\in S$ и $x\in V^n$ фиксированы).

а топология на S индуцируется расстоянием $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$ (см. [8], формула (B.2.6)).

Положим

$$\overline{\delta} \underset{\text{def}}{=} \min\{(321\,|||\,df\,|||\cdot|||\,(df)^{-1}\,|||)^{-1},\ (80\,|||\,df\,|||)^{-1}\min\{\overline{\varepsilon},\ \varepsilon_1\}\}. \tag{5}$$

Обозначения $|||\,df\,|||$, $|||\,(df)^{-1}\,|||$ разъяснены в [8, формулы (B.2.2), (B.2.3)]. Так как $f \in S$, то выполнено неравенство (B.2.1) из [8], следовательно, $\overline{\delta} \underset{(5)}{>} 0$.

3. Пусть дано $\overline{t} \in \mathbf{N}$ и даны невырожденные линейные операторы

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b) \to p^{-1}(\chi^m b)\ (m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}), \tag{6}$$

удовлетворяющие при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ неравенству (B.8).

При всяком $t \in \{0\} \bigcup \mathbf{N}$ имеем

$$p^{-1}(\chi^t b) \underset{(1)}{=} p^{-1}(\chi^t(f,\ x)) \underset{(2)}{=} p^{-1}(f,\ f^t x) = (f,\ \pi^{-1}(f^t x)); \tag{7}$$

последнее равенство в этой цепочке — следствие формулы (1.1) из [8]. Подставив в (7) $t = m-1$, $t = m$, перепишем при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ формулу (6) в виде

$$Y_m : (f,\ \pi^{-1}(f^{m-1}x)) \to (f,\ \pi^{-1}(f^m x))\ (m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}). \tag{8}$$

Из формулы (8) следует, что определены отображения

$$Z_m : \pi^{-1}(f^{m-1}x) \to \pi^{-1}(f^m x)\ (m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}) \tag{9}$$

такие, что

$$Y_m(f,\ \mathfrak{x}) = (f,\ Z_m\mathfrak{x}). \tag{10}$$

при всяких $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(f^{m-1}x)$, $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ т. е.

$$Y_m = 1_{(f)} \times Z_m\ \ (m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}). \tag{11}$$

В силу определения векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ (см. [8, § 1, п. 1] из линейности отображений (6) (или, что то же, (8)) следует, что отображения (9) линейны.

В силу формулы (1.4) [8] имеем

$$X(f,\ \mathfrak{x}) = (f,\ (df)\,\mathfrak{x}) \tag{12}$$

для всяких $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(f^{m-1}x)$, $m \in \mathbf{N}$. Используя формулу (7) при $t = m-1$, получаем из формулы (12)

$$X[\chi^{m-1}b] = 1_{(f)} \times df_{f^{m-1}x}\ \ (m \in \mathbf{N}). \tag{13}$$

При всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ имеем

$$Y_m(X[\chi^{m-1}b])^{-1} \overset{(11)}{\underset{(13)}{=}} 1_{(f)} \times Z_m(df_{f^{m-1}x})^{-1}, \tag{14}$$

$$X[\chi^{m-1}b]\,Y_m^{-1} \overset{(11)}{\underset{(13)}{=}} 1_{(f)} \times df_{f^{m-1}x}Z_m^{-1}. \tag{15}$$

Согласно построению римановой метрики векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ (см. формулу (1.3) в [8]), из формулы (14) следует равенство

$$\|\,Y_m(X[\chi^{m-1}b])^{-1} - I\,\| = \|\,Z_m(df_{f^{m-1}x})^{-1} - I\,\| \quad (m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}), \tag{16}$$

а из формулы (15) следует равенство

$$\|\,X[\chi^{m-1}b]\,Y_m^{-1} - I\,\| = \|\,(df_{f^{m-1}x})Z_m^{-1} - I\,\|. \tag{17}$$

В силу формул (16), (17) неравенство (B.8) переписывается в виде

$$\|\,Z_m(df_{f^{m-1}x})^{-1} - I\,\| + \|\,(df_{f^{m-1}x})Z_m^{-1} - I\,\| < \overline{\delta}. \tag{18}$$

4. Для всякого $k \in \{0,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ точка $f^k x$ содержится в некоторой открытой координатной окрестности, которую обозначим через V_k.

В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что для всякого $k \in \{0,\ \ldots,\ \overline{t}\}$

координатное отображение $h_k : V_k \to \mathbf{R}^n$ отображает точку $f^k x$ в начало координат:

$$h_k f^k x = 0 = (0,\ \dots,\ 0)\ (k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}) \tag{19}$$

и что при всяком $k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$ функция $\rho^2(\cdot, f^k x) : V_k \to \mathbf{R}$ принадлежит классу C^1.

Пояснение. Под сказанным подразумевается следующее. Возьмем произвольный атлас $\{U_i,\ g_i : U_i \to R^n\}_{i \in J}$ (U_i — открытые множества в V^n, J — некоторое множество) многообразия V^n. Для всякого $k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$ найдется $i_k \in J$ такое, что $f^k x \in U_{i_k}$. При всяком $k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$ возьмем окрестность V_k точки $f^k x$, содержащуюся в U_{i_k}, и такую, что функция $\rho^2(\cdot, f^k x) : V_k \to \mathbf{R}$ принадлежит классу C^1. Существование такой окрестности V_k следует из того, что для всякого $z \in V^n$ экспоненциальное геодезическое отображение $\exp_z$ есть диффеоморфизм класса C^1 некоторой окрестности нуля в пространстве $\mathbf{R}^n$ на некоторую окрестность точки z в V^n (см. [10], главы IV, VII и приложение II, § 2; так как по условию многообразие V^n принадлежит классу C^3, а риманова метрика $\delta(\cdot,\ \cdot)$ — классу C^2, то условия цитируемых глав в рассматриваемой здесь ситуации выполнены).

Положим

$$h_k \underset{\text{def}}{=} \hat{t}_k g_{i_k} | V_k\ \ (k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}), \tag{20}$$

где отображение $\hat{t}_k$ определяется формулой $\hat{t}_k y \underset{\text{def}}{=} y - g_{i_k} f^k x$ ($k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$) (для всякого $y \in R^n$), из которой следует равенство:

$$\hat{t}_k g_{i_k} f^k x = 0\ (k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}), \tag{21}$$

Атлас $\{V_k',\ h_k' : V_k' \to R^n\}_{k \in K}$, где $K \underset{\text{def}}{=} \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\} \bigcup J$,

$$V_k' = \begin{cases} V_k & \text{при } k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}, \\ U_k & \text{при } k \in J, \end{cases} \qquad h_k' = \begin{cases} h_k & \text{при } k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}, \\ g_k & \text{при } k \in J, \end{cases}$$

многообразия V^n эквивалентен атласу $\{U_i,\ g_i : U_i \to R^n\}_{i \in J}$ (это вытекает непосредственно из определения эквивалентности атласов) и содержит при всяком $k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$ карту $(V_k,\ h_k : V_k \to R^n)$, причем $h_k f^k x \underset{(21)}{\overset{(20)}{=}} (0,\ \dots,\ 0)$ ($k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$). Пояснение закончено.

5. Для всякого $k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$ возьмем число $q_k > 0$ такое, что*

$$\overline{S^c_{q_k}(0)} \subset h_k V_k. \tag{22}$$

Положим

$$q \underset{\text{def}}{=} \min\{q_0,\ \dots,\ q_{\overline{t}}\}. \tag{23}$$

Тогда

$$\overline{S^c_q(0)} \underset{(23)}{\subseteq} \overline{S^c_{q_k}(0)} \underset{(22)}{\subseteq} h_k V_k\ \ (k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}). \tag{24}$$

Положим

$$V_k^{(1)} \underset{\text{def}}{=} h_k^{-1} S^c_{\frac{q}{2}}(0)\ (k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}). \tag{25}$$

При всяком $k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$ имеют место следующие три утверждения:

---

* Через $|y|_c$, где $y = (y^1,\ \dots,\ y^n\} \in R^n$, обозначаем $[(y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2]^{\frac{1}{2}}$. Через $S^c_t(0)$ обозначаем множество всех $y \in R^n$, удовлетворяющих неравенству $|y|_c < t$ (открытый шар радиуса t с центром в нуле).

$$i)\ \overline{V_k^{(1)}} \underset{(25)}{=} \overline{h_k^{-1} S^c_{\frac{q}{2}}(0)} = h_k^{-1}\overline{S^c_{\frac{q}{2}}(0)} \underset{(24)}{\subset} V^k, \qquad (26)$$

так как h_k — гомеоморфизм V_k на $h_k V_k \subset R^n$;

$ii)$ *множество* $V_k^{(1)}$ *есть окрестность точки* $f^k x \underset{(19)}{=} h_k^{-1} 0$, так как h_k — гомеоморфизм V_k на $h_k V_k \subset R^n$, $S^c_{\frac{q}{2}}(0)$ — окрестность нуля в R^n и $S^c_{\frac{q}{2}}(0) \overset{(22)}{\underset{(23)}{\subset}} h_k V_k$;

$iii)$ множество $\overline{V_k^{(1)}}$ компактно, так как

$$\overline{V_k^{(1)}} \underset{(26)}{=} h_k^{-1}\overline{S^c_{\frac{q}{2}}(0)} \subset V^k,$$

отображение $h_k : V_k \to h_k V_k$ — гомеоморфизм, а множество $\overline{S^c_{\frac{q}{2}}(0)}$ компактно.

Для всякого $k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$ выберем число $\overline{r}_k > 0$ так, чтобы открытая $\overline{r}_k$-окрестность W_k точки $f^k x$ ($W_k = U_{(\overline{r}_k)}(f^k x)$, где через $U_{(r)}(z)$ обозначается множество всех тех $v \in V^n$, для которых $\rho(v,\ z) < r$) обладала свойствами:

$a)$ $\quad W_k \subset V_k^{(1)} \underset{(26)}{\subset} V_k$ ($k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$), (27)

$б)$ $\quad W_i \cap W_j = \varnothing$ (28)

для всяких $i \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$, $j \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$ таких, что $i \neq j$,

$в)$ $\quad fW_{k-1} \subset V_k^{(1)}$ ($k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$). (29)

Существование таких чисел $\overline{r}_k > 0$ следует из того, что точки $x, fx,\ \dots, f^m x,\ \dots$ все различны, а отображение $f : V^n \to V^n$ непрерывно.

6. Для всякого $m \in \{1,\ \dots,\ \overline{t}\}$ линейному отображению (9) и картам $(V_{m-1},\ h_{m-1} : V_{m-1} \to R^n)$, $(V_m,\ h_m : V_m \to R^n)$ соответствует линейное отображение

$$\widehat{Z}_m : R^n \to R^n. \qquad (30)$$

П о я с н е н и е. Для всякого $m \in \{1,\ \dots,\ \overline{t}\}$ существует (единственное) отображение

$$\overline{Z}_m : \hat{\pi}_n^{-1}(0) \to \hat{\pi}_n^{-1}(0) \qquad (31)$$

такое, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(f^{m-1}x) & \xrightarrow[Z_m]{} & \pi^{-1}(f^m x) \\ \downarrow d(h_{m-1})_{f^{m-1}x} & & \downarrow d(h_m)_{f^m x} \\ \hat{\pi}_n^{-1}(0) & \xrightarrow[\overline{Z}_m]{} & \hat{\pi}_n^{-1}(0) \end{array} \qquad (32)$$

коммутативна; это отображение определяется формулой

$$\overline{Z}_m = d\,(h_m)_{f^m x} Z_m (d\,(h_{m-1})_{f^{m-1}x})^{-1} \qquad (33)$$

(напомним, что $h_k f^k x \underset{(19)}{=} (0,\ \dots,\ 0)$ при всяком $k \in \{0,\ \dots,\ \overline{t}\}$; Вместо $(0,\ \dots,\ 0)$ пишем иногда 0).

Здесь через $\hat{\pi}_n$ обозначается проекция касательного расслоения многообразия R^n; само это касательное расслоение обозначается через $(TR^n,\ \hat{\pi}_n,\ R^n)$. При всяком $y \in R^n$ обозначим через $\tau_y^{[n]} : \hat{\pi}_n^{-1}(y) \to R^n$ стандартное отображение, «отождествляющее»

---

* $d\,(h_k)_{f^k x}$ — производная отображения h_k в точке $f^k x$.

касательное пространство $T_y R^n = \hat{\pi}_n^{-1}(y)$ многообразия R^n в точке $y \in R^n$ с пространством R^n (известное определение этого отображения воспроизведено в [6], п. 8 с той (несущественной в данном случае) разницей, что в цитируемом месте рассматривается $\mathbf{R}^n$ вместо R^n и там проекция касательного расслоения многообразия $\mathbf{R}^n$ обозначается через π, а здесь проекция касательного расслоения многообразия R^n обозначается через $\hat{\pi}_n$). При всяком $y \in R^n$ отображение $\tau_y^{[n]}$ есть изоморфизм векторного пространства $T_y R^n = \hat{\pi}_n^{-1}(y)$ на векторное пространство R^n. Всякому отображению (31) соответствует (единственное) отображение $\hat{Z}_m : R^n \to R^n$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{\pi}_n^{-1}(0) & \xrightarrow[\overline{Z}_m]{} & \hat{\pi}_n^{-1}(0) \\ \downarrow \tau_0^{[n]} & & \downarrow \tau_0^{[n]} \\ R^n & \xrightarrow[\hat{Z}_m]{} & R^n \end{array} \tag{34}$$

коммутативна; это отображение определяется формулой

$$\hat{Z}_m = \tau_0^{[n]} \overline{Z}_m (\tau_0^{[n]})^{-1}. \tag{35}$$

Введем обозначение*:

$$\eta_k \underset{\text{def}}{=} \tau_0^{[n]} d\,(h_k)_{f^k x} : \pi^{-1}(f^k x) \to R^n \ \ (k \in \{0,\ \ldots,\ \overline{t}\}). \tag{36}$$

Из коммутативности при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ диаграмм (32), (34) следует в силу формулы (36), что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(f^{m-1}x) & \xrightarrow[Z_m]{} & \pi^{-1}(f^m x) \\ \downarrow \eta_{m-1} & & \downarrow \eta_m \\ R^n & \xrightarrow[\hat{Z}_m]{} & R^n \end{array} \tag{37}$$

коммутативна при всяком $m \in \{0,\ \ldots,\ \overline{t}\}$.

Отображения $\overline{Z}_m$ и $\hat{Z}_m$ линейны при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$, так как отображение (9) линейно, а все вертикальные стрелки в диаграммах (32) и (34) соответствуют изоморфизмам векторных пространств, соединенных этими стрелками. Построенные таким образом отображения $\hat{Z}_m : R^n \to R^n$. $(m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\})$ и суть те отображения, о которых говорилось в фразе, содержащей формулу (30). Пояснение закончено.

При всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ через $(\hat{z}^i_{j,m})$ обозначим матрицу, задающую отображение (30) (здесь подразумевается, что индексы i, j пробегают множество $\{1,\ \ldots,\ n\}$)**.

---

* См. предыдущую сноску.

** Напомним, что через R^n обозначается векторное пространство строк из n вещественных чисел. Матрица (z^i_j) задает линейное преобразование Z по правилу

$$Zy = Z\,(y^1,\ \ldots,\ y^n) \underset{\text{def}}{=} \left(\sum_{j=1}^n z^1_j y^j,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^n z^n_j y^j \right) \ (y = (y^1,\ \ldots,\ y^n) \in R^n).$$

Мы различаем в обозначениях R^n и $\mathbf{R}^n$. Через $\mathbf{R}^n$ обозначается произвольное n-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$.

Через $\mathbf{R}^n_*$ (соответственно R^n_*) обозначается множество всех ненулевых векторов пространства $\mathbf{R}^n$ (соответственно R^n).

7. При всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ для всякой точки $y = (y^1, \ldots, y^n) \in h_{m-1}W_{m-1} \subset R^n$ полагаем по определению

$$\widehat{f}_m y = (\widehat{f}_m^{(1)}(y^1, \ldots, y^n), \ldots, \widehat{f}_m^{(n)}(y^1, \ldots, y^n)) \underset{\text{def}}{=} h_m f h_{m-1}^{-1} y. \tag{38}$$

При всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ формула (38) определяет (в силу формул (27), (29)) отображение $\widehat{f}_m : h_{m-1}W_{m-1} \to R^n$. Производная этого отображения в точке 0, обозначаемая через $\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0$, есть линейное отображение

$$\hat{\pi}_n^{-1}(0) \to \hat{\pi}_n^{-1}(\widehat{f}_m 0) \overset{(19)}{\underset{(38)}{=}} \hat{\pi}_n^{-1}(0).$$

Хорошо известно (и легко доказывается), что линейное отображение*

$$\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0 \underset{\text{def}}{=} \tau_0^{[n]} d(\widehat{f}_m)_0 (\tau_0^{[n]})^{-1} : R^n \to R^n \tag{39}$$

задается матрицей $\left(\dfrac{\partial \widehat{f}_m^{(i)}}{\partial y^j}\right)_{y=0}$ частных производных первого порядка вещественных функций $\widehat{f}_m^{(1)}(y^1, \ldots, y^n), \ldots, \widehat{f}_m^{(n)}(y^1, \ldots, y^n)$ от n вещественных переменных $y^1, \ldots, y^n$, вычисленных в точке $(0, \ldots, 0)$.

8. При всяких $k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$, $y \in h_k V_k$ определим билинейную форму формулой

$$g_{ij}^{(k)}(y)\, a^i b^j \underset{\text{def}}{=} \delta\,(\eta_{k,y}^{-1} a,\ \eta_{k,y}^{-1} b), \tag{40}$$

где $a = (a^1, \ldots, a^n) \in R^n$, $b = (b^1, \ldots, b^n) \in R^n$, $y = (y^1, \ldots, y^n) \in h_k V_k \subset R^n$ (по повторяющимся (вверху и внизу) индексам подразумевается суммирование от 1 до n), $\delta(\cdot, \cdot)$ — риманова метрика многообразия V^n, зафиксированная в самом начале, а отображения $\eta_{k,y} : \pi^{-1}(h_k^{-1}y) \to R^n$ (при всяких $k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$, $y = (y^1, \ldots, y^n) \in h_k V_k \subset R^n$) определены формулой**

$$\eta_{k,y} = \tau_y^{[n]} d\,(h_k)_{h_k^{-1}y} \tag{41}$$

(по поводу определения отображения $\tau_y^{[n]} : \hat{\pi}^{-1}(y) \to R^n$ см. пояснение к формуле (30)). Отображение $\eta_{k,y}$ — изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(h_k^{-1}y)$ на векторное пространство R^n, потому что $d\,(h_k)_{h_k^{-1}y}$ — изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(h_k^{-1}y)$ на векторное пространство $\hat{\pi}^{-1}(y)$, а $\tau_y^{[n]}$ — изоморфизм векторного пространства $\hat{\pi}^{-1}(y)$ на векторное пространство R^n. Из формул (19), (36), (41) следует, что

$$\eta_{k,\,0} = \eta_k \tag{42}$$

при всяком $k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$. Из формул (40), (42) следует, что

$$g_{ij}^{(k)}(0)\, a^i b^j = \delta\,(\eta_k^{-1} a,\ \eta_k^{-1} b) \tag{43}$$

при всяких $a = (a^1, \ldots, a^n) \in R^n$, $b = (b^1, \ldots, b^n) \in R^n$.

---

* В [6, формула (78)] через $\left.\dfrac{dg}{dx}\right|_{x=y}$ обозначается то, что здесь обозначается через $\widehat{d}g_y$. Через $d\,(\widehat{f}_m)_y$ обозначается производная отображения $\widehat{f}_m$ в точке y.

** $d\,(h_k)_{h_k^{-1}y}$ (производная координатного отображения h_k в точке $h_k^{-1}y$) есть изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(h_k^{-1}y)$ на векторное пространство $\hat{\pi}^{-1}(y)$.

Для всякого линейного отображения $\Phi : R^n \to R^n$ при всяком $k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$ определим норму $\|\Phi\|_k$ формулой

$$\|\Phi\|_k \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{a \in R^n_*} \{[g^{(k)}_{ij}(0)\,(\Phi a)^i (\Phi a)^j]^{\frac{1}{2}}\ [g^{(k)}_{ij}(0)\, a^i a^j]^{-\frac{1}{2}}, \tag{44}$$

где $a = (a^1, \ldots, a^n)$, $\Phi a = ((\Phi a)^1, \ldots, (\Phi a)^n)$.

9. При всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ имеем*

$$\begin{aligned}
&\widehat{Z}_m(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0)^{-1} \underset{(39)}{=} \widehat{Z}_m(\tau_0 d\,(\widehat{f}_m)_0(\tau_0)^{-1})^{-1} = \widehat{Z}_m \tau_0 (d\,(\widehat{f}_m)_0)^{-1}(\tau_0)^{-1} \underset{(35)}{=}\\
&\underset{(35)}{=} \tau_0 \overline{Z}_m (d\,(\widehat{f}_m)_0)^{-1}\tau_0^{-1} \underset{(33)}{=} \tau_0 d\,(h_m)_{f^m x} Z_m (d\,(h_{m-1})_{f^{m-1}x})^{-1}(d\,(\widehat{f}_m)_0)^{-1}\tau_0^{-1} \overset{(19)}{\underset{(38)}{=}}\\
&\overset{(19)}{\underset{(38)}{=}} \tau_0 d\,(h_m)_{f^m x} Z_m (d\,(h_{m-1})_{f^{m-1}x})^{-1}[d\,(h_m)_{f^m x}\, df_{f^{m-1}x} \circ\\
&\circ (d\,(h_{m-1})_{f^{m-1}x})^{-1}]^{-1}\tau_0^{-1} = \tau_0 d\,(h_m)_{f^m x} Z_m (d\,(h_{m-1})_{f^{m-1}x})^{-1}[d\,(h_{m-1})_{f^{m-1}x} \circ\\
&\circ (df_{f^{m-1}x})^{-1}(d\,(h_m)_{f^m x})^{-1}]\,\tau_0^{-1} = \tau_0 d\,(h_m)_{f^m x} Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1}(\tau_0 d\,(h_m)_{f^m x})^{-1} \underset{(36)}{=}\\
&\underset{(36)}{=} \eta_m Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1}\eta_m^{-1}.
\end{aligned} \tag{45}$$

При всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ имеем

$$(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0)\,\widehat{Z}_m^{-1} = (\widehat{Z}_m(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0)^{-1})^{-1} \underset{(45)}{=} \eta_m (df_{f^{m-1}x})\, Z_m^{-1}\eta_m^{-1}. \tag{46}$$

При всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{Z}_m(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0)^{-1} - I\|_m \underset{(45)}{=} \|\eta_m Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1}\eta_m^{-1} - I\|_m =\\
&= \|\eta_m [Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1} - I]\,\eta_m^{-1}\|_m \overset{(43)}{\underset{(44)}{=}} \sup_{a \in R^n_*} \{\{\delta\,([Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1} - I]\,\eta_m^{-1}a,\\
&[Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1} - I]\,\eta_m^{-1}a)\}^{\frac{1}{2}}\,[\delta\,(\eta_m^{-1}a,\ \eta_m^{-1}a)]^{-\frac{1}{2}}\} \underset{(36)}{=}\\
&\underset{(36)}{=} \sup_{\text{æ} \in \pi_*^{-1}(f^m x)} \{\{\delta\,([Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1} - I]\,\text{æ},\\
&[Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1} - I]\,\text{æ})\}^{\frac{1}{2}}\,[\delta\,(\text{æ},\ \text{æ})]^{-\frac{1}{2}}\} = \|Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1} - I\|.
\end{aligned} \tag{47}$$

При всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned}
&\|(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0)\widehat{Z}_m^{-1} - I\|_m \underset{(46)}{=} \|\eta_m (df_{f^{m-1}x})\, Z_m^{-1}\eta_m^{-1} - I\|_m =\\
&= \|\eta_m [(df_{f^{m-1}x})\, Z_m^{-1} - I]\,\eta_m^{-1}\|_m \overset{(43)}{\underset{(44)}{=}}\\
&\overset{(43)}{\underset{(44)}{=}} \sup_{a \in R^n_*} \{\{\delta\,([(df_{f^{m-1}x})\, Z_m^{-1} - I]\,\eta_m^{-1}a,\\
&[(df_{f^{m-1}x})\, Z_m^{-1} - I]\,\eta_m^{-1}a)\}^{\frac{1}{2}}\,[\delta\,(\eta_m^{-1}a,\ \eta_m^{-1}a)]^{-\frac{1}{2}}\} \underset{(36)}{=}\\
&\underset{(36)}{=} \sup_{\text{æ} \in \pi_*^{-1}(f^m x)} \{\{\delta\,([(df_{f^{m-1}x})\, Z_m^{-1} - I]\,\text{æ},\ [(df_{f^{m-1}x})\, Z_m^{-1} - I]\,\text{æ})\}^{\frac{1}{2}} \times\\
&\times [\delta\,(\text{æ},\ \text{æ})]^{-\frac{1}{2}}\} = \|(df_{f^{m-1}x})\, Z_m^{-1} - I\|.
\end{aligned} \tag{48}$$

---

* В формулах (45), (46) вместо $\tau_0^{[n]}$ пишем короче τ_0.

В цепочках равенств (47) и (48) равенства, под которыми стоит номер формулы (36), вытекают из формулы (36), поскольку при всяком $k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$ отображение η_k есть изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(f^k x)$ на векторное пространство R^n. Через $\pi_*^{-1}(y)$ обозначено множество всех ненулевых векторов слоя $\pi^{-1}(y)$ касательного расслоения (TV^n, π, V^n).

При всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ имеем

$$\begin{gathered} \| \widehat{Z}_m (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0)^{-1} - I \|_m + \| (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0) \widehat{Z}_m^{-1} - I \|_m \underset{(48)}{\overset{(47)}{=}} \\ \underset{(48)}{\overset{(47)}{=}} \| Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1} - I \| + \| (df_{f^{m-1}x}) Z_m^{-1} - I \| \underset{(18)}{<} \overline{\delta}. \end{gathered} \tag{49}$$

10. При всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ для всякого $r > 0$ определим отображение $\widehat{g}_{m,r} : h_{m-1} W_{m-1} \to R^n$, положив для всякой точки $y \in h_{m-1} W_{m-1} \subset R^n$ по определению

$$\widehat{g}_{m,r} y \underset{\text{def}}{=} \widehat{f}_m y + \sigma(r^{-1} \widehat{\rho}_{m-1}(y)) [\widehat{Z}_m - (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0]\, y, \tag{50}$$

где функция $\sigma(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определяется следующим образом:

$$\sigma(\tau) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{2}[1 + \cos(\pi\tau)] & \text{при} \quad |\tau| < 1, \\ \quad 0 & \text{при} \quad |\tau| \geqslant 1, \end{cases} \tag{51}$$

а $\widehat{\rho}_k(y)$ определяется для всякого $y \in h_k V_k$ формулой

$$\begin{gathered} \widehat{\rho}_k(y) \underset{\text{def}}{=} \rho(h_k^{-1} y,\ h_k^{-1} 0) \underset{(19)}{=} \rho(h_k^{-1} y, f^k x) \\ (k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}) \end{gathered} \tag{52}$$

(напомним, что через $\rho(\cdot, \cdot)$ обозначается расстояние в многообразии V^n, индуцированное римановой метрикой $\delta(\cdot, \cdot)$ многообразия V^n, зафиксированной в самом начале построения пространства S (см. [8, введение, п. 2.1])).

Положим*

$$M_k \underset{\text{def}}{=} \| \widehat{Z}_k - \widehat{d}(\widehat{f}^k)_0 \|_c) \ (k \in \{1, \ldots, \overline{t}\}). \tag{53}$$

Положим

$$M \underset{\text{def}}{=} \max\{M_1, \ldots, M_{\overline{t}}\}, \tag{54}$$

$$\overline{r} \underset{\text{def}}{=} \min\{\overline{r}_0, \ldots, \overline{r}_{\overline{t}}\}; \tag{55}$$

возьмем

$$\overline{q} \in (0,\ q(4M)^{-1}) \tag{56}$$

такое, что

$$W_k^{(1)} \underset{\text{def}}{=} h_k^{-1} \overline{S_{\overline{q}}^c(0)} \subset U_{\left(\frac{1}{2}\overline{r}\right)}\left(f^k x\right) \quad (k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}) \tag{57}$$

(числа q и $\overline{r}_k$ ($k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$) определены в п. 5; $\overline{r}_k$ — это радиус окрестности W_k точки $f^k x$ в метрическом пространстве (V^n, ρ) ($k \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$); обозначение $S_r^c(0)$ разъяснено в сноске к п. 5; напомним также, что через $U_{(r)}(z)$ обозначаем r-окрестность точки z в метрическом пространстве (V^n, ρ), т. е. множество всех точек $v \in V^n$, удовлетворяющих

---

* Для линейного отображения $Y : R^n \to R^n$ через $\| Y \|_c$ обозначаем $\sup\limits_{y \in R^n} \{ | Yy |_c (| y |_c)^{-1} \}$ (норма $| y |_c$ определена в сноске к п. 5).

неравенству $\rho(v,z)<r$; таким образом, $W_k = U_{(\overline{r}_k)}\left(f^k x\right)$). Такое $\overline{q}$ существует, так как h_k — гомеоморфизм окрестности точки $f^k x$ на окрестность точки 0 (см. формулу (19)). При всяком $k\in\{0,...,\overline{t}\}$ имеем

$$W_k^{(1)} \underset{(57)}{\subseteq} U_{(\overline{r})}\left(f^k x\right) \underset{(55)}{\subseteq} U_{(\overline{r}_k)}\left(f^k x\right) = W_k \underset{(27)}{\subseteq} V_k . \tag{58}$$

Из формул (56) — (58) следует, что $W_k^{(1)}$ есть окрестность точки $f^k x \underset{(19)}{=} h_k^{-1}O$, так как $h_k : V_k \to h_k V_k$ — гомеоморфизм ($k\in\{0,...,\overline{t}\}$). По той же причине $W_k^{(1)} \underset{(57)}{=} h_k^{-1}\overline{S_{\overline{q}}^{c}(0)} = \overline{h_k^{-1}S_{\overline{q}}^{c}(0)}$, следовательно, множество $W_k^{(1)}$ замкнутое ($k\in\{0,...,\overline{t}\}$).

Для всякого $k\in\{0,...,\overline{t}\}$ возьмем $s_k>0$ такое, что всякая точка $z\in V^n$, удовлетворяющая неравенству $\rho\left(z,f^k x\right)<s_k$, принадлежит множеству $W_k^{(1)}$. Положим

$$\overline{s} \underset{\text{def}}{=} \min\{s_0,...,s_{\overline{t}}\}; \tag{59}$$

таким образом, *при всяком* $k\in\{0,...,\overline{t}\}$ *верно утверждение:*

$$\rho\left(z,f^k x\right) \geqslant s_k \geqslant \overline{s} \tag{60}$$

для всякого $z\in V^n \setminus W_k^{(1)}$.

Для всякого

$$r\in(0,\overline{s}) \tag{61}$$

положим

$$g_r z \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} fz \text{ при } z\in V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\overline{t}} W_{m-1}, \\ h_m^{-1}\hat{g}_{m,r}h_{m-1}z \text{ при } z\in W_{m-1} \ \left(m\in\{1,...,\overline{t}\}\right), \end{cases} \tag{62}$$

где $\hat{g}_{m,r}$ определены формулой (50).

Докажем корректность определения (62). Так как множества $W_0,...,W_{\overline{t}}$ попарно не пересекаются (см. формулу (28)), то для доказательства корректности определения (62) достаточно проверить, что при всяких $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,...,\overline{t}\}$ при всяком $z\in W_{m-1}$ выражение $h_m^{-1}\hat{g}_{m,r}h_{m-1}z$ определено. Проверим это.

При всяком $m\in\{1,...,\overline{t}\}$ имеет место включение $W_{m-1} \underset{(27)}{\subseteq} V_{m-1}$, координатное отображение h_{m-1} определено на координатной окрестности V_{m-1} и отображает множество $W_{m-1}\subset V_{m-1}$ на множество $h_{m-1}W_{m-1}$, при всяком $r\in(0,\overline{s})$ отображение $\hat{g}_{m,r}$ определено формулой (50) на множестве $h_{m-1}W_{m-1}$, отображение h_m^{-1} определено на множестве $h_m V_m$ и отображает его в V^n. Эти замечания сводят проверку корректности определения (62) к проверке включения

$$\hat{g}_{m,r}\left(h_{m-1}W_{m-1}\right)\subset h_m V_m \qquad \left(r\in(0,\overline{s}), m\in\{1,...,\overline{t}\}\right) \tag{63}$$

Более того, эти замечания доказывают, что, доказав включение (63), мы докажем, что при всяком $r\in(0,\overline{s})$ формула (62) определяет отображение $g_r : V^n \to V^n$.

Оставшаяся часть п. 10 представляет собой доказательство включения (63).

Пусть даны произвольные $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,...,\overline{t}\}$.

Имеет место формула

$$\hat{f}_m h_{m-1}W_{m-1} \underset{(38)}{=} h_m f h_{m-1}^{-1} h_{m-1}W_{m-1} = h_m f W_{m-1} \underset{(29)}{\subseteq} h_m V_m^{(1)} \underset{(25)}{=} S_{\frac{q}{2}}^{c}(0). \tag{64}$$

Для всякого $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеем

$$\left|\hat{g}_{m,r}y-\hat{f}_m y\right|_c \underset{(50)}{=} \left|\sigma\left(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)\right)\right|\cdot\left|\left(\hat{Z}_m-\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right)y\right|_c \underset{(51)}{\leqslant} \left|\left(\hat{Z}_m-\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right)y\right|_c \leqslant \\ \leqslant \left\|\hat{Z}_m-\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right\|_c |y|_c \underset{(53)}{=} M_m |y|_c \underset{(54)}{\leqslant} M|y|_c . \tag{65}$$

Пусть теперь $y \in h_{m-1}W_{m-1}^{(1)}$. Тогда $y \in h_{m-1}W_{m-1}^{(1)} \underset{(57)}{=} \overline{S_{\bar{q}}^c(0)} \underset{(56)}{\subset} S_{q(4M)^{-1}}^c(0)$, т. е.

$$|y|_c < q(4M)^{-1}, \tag{66}$$

и, кроме того, тогда $y \underset{(58)}{\in} h_{m-1}W_{m-1}$. Следовательно,

$$\left|\hat{g}_{m,r}y-\hat{f}_m y\right|_c \underset{(65)}{\leqslant} M\cdot|y|_c \underset{(66)}{\leqslant} \frac{q}{4}. \tag{67}$$

Для всякого $y \in h_{m-1}W_{m-1}^{(1)} \underset{(58)}{\subset} h_{m-1}W_{m-1}$ имеем $\left|\hat{g}_{m,r}y\right|_c \leqslant \left|\hat{f}_m y\right|_c + \left|\hat{g}_{m,r}y-\hat{f}_m y\right|_c \underset{(64)}{\leqslant}$ $\underset{(64)}{\leqslant} \frac{q}{2} + \left|\hat{g}_{m,r}y-\hat{f}_m y\right|_c \underset{(67)}{\leqslant} \frac{q}{2}+\frac{q}{4} < q$ следовательно, $\hat{g}_{m,r}y \in S_q^c(0) \subset \overline{S_q^c(0)}$. Тем самым доказано, что при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,\dots,\bar{t}\}$ имеет место включение

$$\hat{g}_{m,r}\left(h_{m-1}W_{m-1}^{(1)}\right) \subset \overline{S_q^c(0)}. \tag{68}$$

Пусть теперь даны произвольные $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,\dots,\bar{t}\}$. Для всякого

$$y \in \left(h_{m-1}W_{m-1}\right) \setminus \left(h_{m-1}W_{m-1}^{(1)}\right), \tag{69}$$

более того, для всякого $y \in \left(h_{m-1}W_{m-1}\right) \setminus \left(h_{m-1}W_{m-1}^{(1)}\right)$, имеем: $h_{m-1}^{-1}y \in V^n \setminus W_{m-1}^{(1)}$ и, следовательно (см. утверждение, содержащее формулу (60)):

$$\rho\left(h_{m-1}^{-1}y, f^{m-1}x\right) \geqslant \bar{s}, \tag{70}$$

далее,

$$\hat{\rho}_{m-1}(y) \underset{(52)}{=} \rho\left(h_{m-1}^{-1}y, f^{m-1}x\right) \underset{(70)}{\geqslant} \bar{s}, \tag{71}$$

$$r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y) \geqslant (\bar{s})^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y) \underset{(71)}{\geqslant} 1, \tag{72}$$

$$\sigma\left(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)\right) \overset{(51)}{\underset{(72)}{=}} 0.$$

Следовательно, для всякого *y*, удовлетворяющего условию (69), имеем (в силу формулы (50))

$$\hat{g}_{m,r}y = \hat{f}_m y \underset{(69)}{\in} \hat{f}_m h_{m-1}W_{m-1} \underset{(64)}{\subset} S_{\frac{q}{2}}^c(0) \subset \overline{S_q^c(0)}. \tag{73}$$

Тем самым доказано, что при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,\dots,\bar{t}\}$ имеет место включение $\hat{g}_{m,r}\left(h_{m-1}W_{m-1}\right) \setminus \left(h_{m-1}W_{m-1}^{(1)}\right) \subset \overline{S_q^c(0)}$. Объединив это включение с включением (68), получаем, что при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,\dots,\bar{t}\}$ имеет место включение

$$\hat{g}_{m,r}\left(h_{m-1}W_{m-1}\right) \subset \overline{S_q^c(0)} \underset{(24)}{\subset} h_m V_m . \tag{74}$$

Включение (63) доказано. Как отмечено выше (после формулы (63)), доказав включение (63), мы доказали, что *при всяком* $r \in (0,\bar{s})$ *формула (62) определяет отображение* $g_r : V^n \to V^n$.

11. Пусть $r \in (0,\bar{s})$. Пусть $z \in W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}$ при некотором $m \in \{1,\dots,\bar{t}\}$. Тогда

$$y \underset{\text{def}}{=} h_{m-1}z \in h_{m-1}\left(W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}\right) = \left(h_{m-1}W_{m-1}\right) \setminus \left(h_{m-1}W_{m-1}^{(1)}\right), \tag{75}$$

т. е. y удовлетворяет условию (69) и, следовательно (см. выше текст, содержащий формулы (69) — (73)),

$$\hat{g}_{m,r}y = \hat{f}_m y. \tag{76}$$

Имеем: $g_r z \underset{(62)}{=} h_m^{-1}\hat{g}_{m,r}h_{m-1}z \underset{(75)}{=} h_m^{-1}\hat{g}_{m,r}y \underset{(76)}{=} h_m^{-1}f_m y \underset{(38)}{=} fh_{m-1}^{-1}y \underset{(75)}{=} fz$.

Только что доказанное означает, что при всяком $r \in \left(0,\overline{s}\right)$ сужения отображений g_r и f на множество $\bigcup_{m=1}^{\overline{t}}\left(W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}\right)$ совпадают. Непосредственно из формулы (62) следует, что при всяком $r \in \left(0,\overline{s}\right)$ сужения отображений g_r и f на множество $V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\overline{t}} W_{m-1}$ также совпадают. Следовательно, при всяком $r \in \left(0,\overline{s}\right)$ совпадают сужения отображений g_r и f на множество

$$\left[\bigcup_{m=1}^{\overline{t}}\left(W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}\right)\right] \cup \left[V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\overline{t}} W_{m-1}\right] = V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\overline{t}} W_{m-1}^{(1)}. \tag{77}$$

Поясним, что равенство (77) вытекает из того, что $W_k^{(1)} \underset{(58)}{\subset} W_k \subset V^n$ $\left(k \in \left\{0,...,\overline{t}\right\}\right)$, $W_i \cap W_j = \varnothing$ при всяких $i \in \left\{0,...,\overline{t}\right\}$, $j \in \left\{0,...,\overline{t}\right\}$ таких, что $i \neq j$.

В п. 10 было, в частности, доказано, что при всяком $k \in \left\{0,...,\overline{t}\right\}$ множество $W_k^{(1)}$ замкнуто в V^n. Следовательно, множество $V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\overline{t}} W_{m-1}^{(1)}$ открыто в V^n. При всяком $r \in \left(0,\overline{s}\right)$ сужение отображения g_r на это открытое множество принадлежит классу C^1, так как оно совпадает с сужением на это множество отображения f, а отображение $f{:}V^n \to V^n$ принадлежит классу C^1, поскольку $f \in S$ (см. фразу, содержащую формулу (1), и определение множества S [8, введение, п. 2.1]). Далее, при всяком $r \in \left(0,\overline{s}\right)$ при всяком $m \in \left\{1,...,\overline{t}\right\}$ сужение отображения g_r на открытое множество W_{m-1} принадлежит классу C^1 (в силу теоремы о непрерывной дифференцируемости произведения (композиции) непрерывно дифференцируемых отображений), так как, согласно формуле (62), оно равно $h_m^{-1}\hat{g}_{m,r}h_{m-1}\big|_{W_{m-1}}$, отображения $h_m^{-1}{:}h_mV_m \to V_m$, $h_{m-1}{:}V_{m-1} \to h_{m-1}V_{m-1}$ принадлежат классу C^1 (даже C^3, поскольку h_m и h_{m-1} — координатные отображения многообразия V^n, принадлежащего, по условию, классу C^3), а отображение $\hat{g}_{m,r}{:}h_{m-1}W_{m-1} \to R^n$, определенное формулой (50), отображает открытое множество $h_{m-1}W_{m-1}$ в открытое множество h_mW_m (см. формулу (63)) и принадлежит классу C^1, поскольку:

а) отображение $\hat{f}_m \underset{(38)}{=} h_m f h_{m-1}^{-1}\big|_{h_{m-1}W_{m-1}}{:}h_{m-1}W_{m-1} \to R^n$ принадлежит классу C^1 (так как отображение $f{:}V^n \to V^n$ принадлежит классу C^1 а отображения $h_m{:}V_m \to h_mV_m$, $h_{m-1}^{-1}{:}h_{m-1}V_{m-1} \to V_{m-1}$ принадлежат классу C^1 (даже C^3, как только что напоминалось),

б) функция $\sigma\left(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}\left(\cdot\right)\right){:}h_{m-1}V_{m-1} \to \mathbf{R}$ принадлежит классу C^1 как суперпозиция функции $\sigma\left(\left(\cdot\right)^{1/2}\right){:}\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, принадлежащей классу C^1 (это следует из формулы (51), определяющей эту функцию), и функции $r^{-2}\hat{\rho}_{m-1}^2\left(\cdot\right){:}h_{m-1}V_{m-1} \to \mathbf{R}$, определенной формулой

(52) и принадлежащей классу C^1 (так как функция $\rho^2\left(\cdot,f^{m-1}x\right):V_{m-1}\to\mathbf{R}$ (см. фразу, содержащую формулу (19)) и отображение $h_{m-1}^{-1}:h_{m-1}V_{m-1}\to V_{m-1}$ принадлежат классу C^1),

в) отображение $\hat{Z}_m-\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0:R^n\to R^n$ принадлежит классу C^1 (даже классу C^∞), поскольку оно линейно.

Открытые множества $V^n\setminus\bigcup_{m=1}^{\bar{t}}W_{m-1}^{(1)}$, W_{m-1} ($m\in\{1,...,\bar{t}\}$) образуют покрытие многообразия V^n. Как доказано в этом пункте, при всяком $r\in(0,\bar{s})$ сужение отображения $g_r:V^n\to V^n$ на любое из этих множеств принадлежит классу C^1. Следовательно, *при всяком* $r\in(0,\bar{s})$ *отображение* $g_r:V^n\to V^n$, *определенное формулой (62), принадлежит классу* C^1.

12. Вычислим производную отображения $g_r:V^n\to V^n$

В предыдущем пункте было, в частности, доказано (см. фразу, содержащую формулу (77), и третью после нее фразу), что при всяком $r\in(0,\bar{s})$ сужения отображений g_r и f на открытое множество $V^n\setminus\bigcup_{m=1}^{\bar{t}}W_{m-1}^{(1)}$ совпадают. Следовательно,

$$d\left(g_r\right)_z=df_z \tag{78}$$

при всяком $r\in(0,\bar{s})$ при всяком $z\in V^n\setminus\bigcup_{m=1}^{\bar{t}}W_{m-1}^{(1)}$; следовательно, равенство (78) выполнено при всяком $r\in(0,\bar{s})$ при всяком

$$z\in V^n\setminus\bigcup_{m=1}^{\bar{t}}W_{m-1}\underset{(58)}{\subset}V^n\setminus\bigcup_{m=1}^{\bar{t}}W_{m-1}^{(1)}. \tag{79}$$

Так как при всяком $m\in\{1,...,\bar{t}\}$ множество W_{m-1} открыто в V^n, то из формулы (62) в силу теоремы о производной произведения (композиции) отображений, при всяких $r\in(0,\bar{s})$, $m\in\{1,...,\bar{t}\}$, $z\in W_{m-1}$ следует равенство

$$d\left(g_r\right)_z=d\left(h_m^{-1}\right)_{\hat{g}_{m,r}h_{m-1}z}d\left(\hat{g}_{m,r}\right)_{h_{m-1}z}d\left(h_{m-1}\right)_z. \tag{80}$$

При всяких $r>0$, $m\in\{1,...,\bar{t}\}$, $y\in h_{m-1}W_{m-1}\subset R^n$ *имеет место равенство*

$$\begin{aligned}\hat{d}\left(\hat{g}_{m,r}\right)_y\underset{(50)}{=}\hat{d}\left\{\hat{f}_m+\sigma\left(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(\cdot)\right)\left[\hat{Z}_m-\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right]\right\}_y=\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_y+\sigma\left(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(\cdot)\right)\left[\hat{Z}_m-\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right]+\\+\left\{\hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)}\left[r^{-1}\hat{d}\left(\hat{\rho}_{m-1}\right)_y\right]\right\}\left[\hat{Z}_m-\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right]y.\end{aligned} \tag{81}$$

Пояснение к формуле (81). Для произвольного дифференцируемого в точке $y\in R^k$ отображения* $g:U\to R^l$ (где $U\subset R^k$ — окрестность точки y в пространстве R^k; $k\in\mathbf{N}$, $l\in\mathbf{N}$; вместо R^1 пишем иногда $\mathbf{R}$) полагаем по определению**

$$\hat{d}g_y\underset{\text{def}}{=}\tau_{gy}^{[l]}dg_y\left(\tau_y^{[k]}\right)^{-1}:R^k\to R^l, \tag{82}$$

где $dg_y:\hat{\pi}_k^{-1}(y)\to\hat{\pi}_l^{-1}(gy)$ — производная отображения $g:U\to R^l$ в точке $y\in U$ (R^k и R^l рассматриваются здесь как дифференцируемые многообразия; смысл обозначений $\hat{\pi}_m$, $\tau_y^{[m]}$ (при всяком $m\in\mathbf{N}$) разъяснен в п. 6 (см. пояснение к формуле (30)). Третье слагаемое

---

* Значение этого отображения в точке y может обозначаться не только через gy, но и через g (y) (например, для $g=\hat{\rho}_{m-1}$ пишется $\hat{\rho}_{m-1}(y)$); в формуле (82) во втором случае пишем g (y) вместо gy.

** См. сноску к п. 7.

в правой части последнего равенства цепочки (81) следует понимать так. Линейное отображение $\hat{d}\left(\hat{\rho}_{m-1}\right)_y : R^n \to R^1$, умноженное на число r^{-1}, умножается слева на линейное отображение $\hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)} : R^1 \to R^1$; получается линейное отображение

$$Z \underset{\text{def}}{=} \hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)}\left[r^{-1}\hat{d}\left(\hat{\rho}_{m-1}\right)_y\right] : R^n \to R^1 .$$

Третье слагаемое правой части последнего равенства цепочки (81) есть линейное отображение $R^n \to R^n$, которое всякому вектору $a \in R^n$ ставит в соответствие произведение $(Za) = \left[\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right]y$ вектора $\left[\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right]y$ на число Za. При $y=0$ это слагаемое равно нулю, так как $\left[\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right]0 = 0$ (потому что $\hat{Z}_m$ и $\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0$ — линейные отображения). Пояснение к формуле (81) закончено.

13. Вычислим значения отображения g_r и его производной в точках $f^k x$ ($k \in \{0,...,\overline{t}-1\}$).

Так как $f^{m-1}x \in W_{m-1} \subset V_{m-1}$ при всяком $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ (см. фразу, содержащую формулу (27)), то при всяких $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ имеем

$$\hat{g}_{m,r}h_{m-1}f^{m-1}x \underset{(19)}{=} \hat{g}_{m,r}0 \underset{(50)}{=} \hat{f}_m 0 \underset{(38)}{=} h_m f h_{m-1}^{-1} 0 \underset{(19)}{=} h_m f f^{m-1}x = h_m f^m x \underset{(19)}{=} 0, \tag{83}$$

$$g_r f^{m-1}x \underset{(62)}{=} h_{m-1}^{-1}\hat{g}_{m,r}h_{m-1}f^{m-1}x \underset{(83)}{=} h_m^{-1}0 \underset{(19)}{=} f^m x . \tag{84}$$

При всяких $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$, учитывая, что $0 \underset{(19)}{=} h_{m-1}f^{m-1}x \in h_{m-1}W_{m-1}$, имеем

$$\hat{d}\left(\hat{g}_{m,r}\right)_0 \underset{(81)}{=} \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0 + \sigma\left(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(0)\right)\left[\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right] \tag{85}$$

(третье слагаемое в правой части последнего равенства цепочки (81) в данном случае (т. е. при y=0) равно нулю, как отмечено в конце п. 12).

Далее, при всяких $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ имеем: $\sigma\left(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(0)\right) \underset{(52)}{=} \sigma(0) \underset{(51)}{=} 1$; следовательно, правая часть равенства (85) при всяких $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ равна $\hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0 + \left[\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right] = \hat{Z}_m$. Поэтому при всяких $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ из равенства (85) следует равенство

$$\hat{d}\left(\hat{g}_{m,r}\right)_0 = \hat{Z}_m , \tag{86}$$

из которого следует

$$\hat{d}\left(\hat{g}_{m,r}\right)_0 \overset{(82),(83)}{\underset{(86)}{=}} \left(\tau_0^{[n]}\right)^{-1}\hat{Z}_m\tau_0^{[n]} \underset{(35)}{=} \overline{Z}_m . \tag{87}$$

При всяких $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ из формулы (80), положив в ней $z = f^{m-1}x$ (тогда $h_{m-1}z = h_{m-1}f^{m-1}x \underset{(19)}{=} 0$) и подставив в нее равенства (83) и (87), получаем формулу

$$d\left(g_r\right)_{f^{m-1}x} = d\left(h_m^{-1}\right)_0 \overline{Z}_m d\left(h_{m-1}\right)_{f^{m-1}x} \overset{(19)}{\underset{(33)}{=}} Z_m . \tag{88}$$

Подведем итог вычислений этого пункта. В нем доказано, что *при всяких* $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ *имеют место равенства*

$$g_r f^{m-1}x \underset{(84)}{=} f^m x , \tag{89}$$

$$d\left(g_r\right)_{f^{m-1}x} \underset{(88)}{=} Z_m . \tag{90}$$

14. Утверждение. *Имеет место соотношение*

$$\sup_{z\in V^n}\rho\left(g_r z, fz\right)\xrightarrow[r\to 0]{}0\,; \tag{91}$$

существует функция $\chi(\cdot):(0,\overline{s})\to\mathbf{R}^+$ *такая, что* $\chi(r)\xrightarrow[r\to 0]{}0$, *и такая, что для всяких* $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,...,\overline{t}\}$, $z\in W_{m-1}$ *найдется кривая (путь)* $v(r,z)\in G(fz,g_r z)$, *лежащая в множестве*

$$K_m \underset{\text{def}}{=} h_m^{-1}\overline{S_q^c(0)}\underset{(24)}{\subseteq}V_m \tag{92}$$

и удовлетворяющая неравенству $s\left(v(r,z)\right)\leqslant\chi(r)$.

Доказательство утверждения. Пусть $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,...,\overline{t}\}$. Для всякого $z\in W_{m-1}\underset{(27)}{\subseteq}V_{m-1}$ такого, что

$$\rho\left(z,f^{m-1}x\right)\geqslant r\,, \tag{93}$$

имеем

$$y\underset{\text{def}}{=}h_{m-1}z\in h_{m-1}W_{m-1}\,, \tag{94}$$

$$\hat{\rho}_{m-1}(y)\underset{(52)}{=}\rho\left(h_{m-1}y,f^{m-1}x\right)\underset{(94)}{=}\rho\left(h_{m-1}y,f^{m-1}x\right)\underset{(93)}{\geqslant}r$$

откуда $\sigma\left(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)\right)\underset{(51)}{=}0$ и поэтому

$$\hat{g}_{m,r}y\underset{(50)}{=}\hat{f}_m y\,. \tag{95}$$

Для всякого $z\in W_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству (93), имеем

$$g_r z\underset{(62)}{=}h^{m-1}\hat{g}_{m,r}h_{m-1}z\underset{(94)}{=}h_m^{-1}\hat{g}_{m,r}y\underset{(95)}{=}h_m^{-1}\hat{f}_m y\underset{(94)}{=}h_m^{-1}\hat{f}_m h_{m-1}z\underset{(38)}{=}fz\,. \tag{96}$$

Пусть дано произвольное $z\in W_{m-1}$. Полагая по-прежнему $y=h_{m-1}z$ имеем

$$\hat{f}_m y\underset{(64)}{\in}S_{\frac{q}{2}}^c(0)\subset\overline{S_q^c(0)}\underset{(24)}{\subseteq}h_m V_m\,, \tag{97}$$

$$\hat{g}_{m,r}y\underset{(64)}{\in}\overline{S_q^c(0)}\underset{(24)}{\subseteq}h_m V_m\,. \tag{98}$$

Имеем также

$$\rho\left(g_r z,fz\right)=\rho\left(fz,g_r z\right)=\inf_{u\in G(fz,g_r z)}s(u)\leqslant s(v)\,, \tag{99}$$

где $v\in G(fz,g_r z)$ — кусочно-гладкая кривая (путь), определенная следующим образом:

$$v_t\underset{\text{def}}{=}h_m^{-1}\left((1-t)\hat{g}_{m,r}y+t\hat{f}_m y\right)\qquad\left(t\in[0,1]\right) \tag{100}$$

(кривая (путь) v зависит от r и z, но для краткости это не отражено в ее обозначении); напомним, что через $G(z_1,z_2)$ обозначается множество всех кусочно-гладких кривых (путей), идущих в многообразии V^n из точки $z_2\in V^n$ в точку $z_1\in V^n$; при этом под кусочно-гладкой кривой (путем) u, идущей (идущим) в многообразии V^n из точки $z_2\in V^n$ в точку $z_1\in V^n$, понимается непрерывное отображение $u{:}[0,1]\to V^n$, имеющее кусочно-непрерывную производную и такое, что его значение при t = 0 равно z_2 ($u_0=z_2$), а его значение при t = 1 равно z_1 ($u_1=z_1$); через u_t обозначается значение отображения u в точке $t;$ через du_t обозначается значение производной отображения u в точке t (производная понимается здесь как отображение касательного пространства многообразия $\mathbf{R}$ (вещественной прямой) в касательное пространство многообразия V^n); через $\dot{u}_t$

обозначается $du_t\left(\tau_k^{[1]}\right)^{-1}1$ ($\dot{u}_t$ тоже можно было бы называть производной отображения u в точке t, но мы предпочитаем употреблять слово «производная» только в одном — указанном выше — точном смысле); через $s(u)$ обозначается длина кривой (пути) u:

$$s(u)\underset{\text{def}}{=}\int_0^1\left[\delta\left(\dot{u}_t,\dot{u}_t\right)\right]^{\frac{1}{2}}dt=\int_0^1\left|\dot{u}_t\right|dt, \tag{101}$$

где $\delta(\cdot,\cdot)$ — риманова метрика, зафиксированная на V^n в самом начале построений [8, § 1] (см. [8, введение, п. 2.1]); так как $h_m^{-1}:h_mV_m\to V_m$ — диффеоморфизм, то из формул (97), (98), (100) следует, что $v\in G\left(h_m^{-1}\hat{f}_my,h_m^{-1}\hat{g}_{m,r}y\right)=G\left(h_m^{-1}\hat{f}_mh_{m-1}z,h_m^{-1}\hat{g}_{m,r}h_{m-1}z\right)\underset{(62)}{\overset{(38)}{=}}G\left(fz,g_rz\right)$; таким образом, неравенство в формуле (99) доказано.

Из формул (97), (98) следует также, что кривая (путь) $\hat{v}$, определенная формулой (на самом деле это — отрезок прямой)

$$\hat{v}_t\underset{\text{def}}{=}h_mv_t\underset{(100)}{=}(1-t)\hat{g}_{m,r}y+t\hat{f}_my\qquad\left(t\in[0,1]\right), \tag{102}$$

лежит в замкнутом шаре $\overline{S_q^c(0)}\subset h_mV_m$.

Имеем (по повторяющимся вверху и внизу индексам i и j (но не m) подразумевается суммирование от 1 до n)

$$s(v)\underset{(101)}{=}\int_0^1\left[\delta\left(\dot{v}_t,\dot{v}_t\right)\right]^{\frac{1}{2}}dt\underset{(40)}{=}\int_0^1\left[g_{ij}^{(m)}\left(h_mv_t\right)^i\left(\eta_{m,h_mv_t}\dot{v}_t\right)^j\right]^{\frac{1}{2}}dt. \tag{103}$$

Имеем, далее:

$$\eta_{m,h_mv_t}\dot{v}_t\underset{(41)}{=}\tau_{h_mv_t}^{[n]}d\left(h_m\right)_{v_t}\dot{v}_t=\tau_{h_mv_t}^{[n]}\left(h_mv_t\right)^{\cdot}\underset{(102)}{=}\tau_{\hat{v}_t}^{[n]}\left(\hat{v}_t\right)^{\cdot}. \tag{104}$$

Так как функции $g_{ij}^{(m)}(\cdot):h_mV_m\to\mathbf{R}$ ($m\in\{0,\ldots,\overline{t}\}$)непрерывны, то найдется $\mathcal{D}>0$ такое, что имеет место неравенство

$$\sup_{y\in S_q^c(0)}\left[g_{ij}^{(m)}(y)a^ia^j\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\mathcal{D}|a|_c \tag{105}$$

для всяких $m\in\{0,\ldots,\overline{t}\}$, $a=\left(a^1,\ldots,a^n\right)\in R^n$ (мы воспользовались здесь тем, что замкнутый шар $\overline{S_q^c(0)}$ содержится в множестве h_mV_m (см. формулу (24)).

Из формул (103) — (105) следует

$$s(v)\leqslant\mathcal{D}\int_0^1\left|\tau_{\hat{v}_t}^{[n]}\left(\hat{v}_t\right)^{\cdot}\right|_c dt\underset{(102)}{=}\mathcal{D}\left|\hat{g}_{m,r}y-\hat{f}_my\right|_c\underset{(65)}{\leqslant}\mathcal{D}M|y|_c=\mathcal{D}M\left|h_{m-1}z\right|_c. \tag{106}$$

Итак, для всяких $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,\ldots,\overline{t}\}$, $z\in W_{m-1}$ найдена кривая (путь) $v=v(r,z)\in G\left(fz,g_rz\right)$, лежащая в множестве $h_m^{-1}\overline{S_q^c(0)}$ (см. фразу, содержащую формулу (102)), для которой имеет место цепочка неравенств

$$\rho\left(g_rz,fz\right)\underset{(99)}{\leqslant}s(u)\leqslant\chi(r), \tag{107}$$

где $\chi(r)$ определено при всяком $r\in(0,\overline{s})$ формулой

$$\chi(r)\underset{\text{def}}{=}\mathcal{D}M\max_{m\in\{1,\ldots,\overline{t}\}}\sup_{z\in E\left\{z\in W_{m-1}^{(1)}:\rho\left(z,f^{m-1}x\right)<r\right\}}\left|h_{m-1}z\right|_c. \tag{108}$$

Напомним, что числа $\mathcal{D}>0$, $M\geqslant0$ не зависят от $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,\ldots,\overline{t}\}$; напомним также, что $h_{m-1}W_{m-1}^{(1)}\underset{(57)}{=}\overline{S_{\frac{c}{q}}^c(0)}$ — компактное множество (при всяком $m\in\{1,\ldots,\overline{t}\}$), следовательно (при всяких $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$), sup в правой части неравенства (108) есть неотрицательное число (а не $+\infty$). Доказательство последнего неравенства цепочки (107):

а) для всяких $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ для всякого $z \in W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}$ имеет место равенство $g_r z = fz$ (см. начало п. 11);

б) для всяких $r \in (0,\overline{s})$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ для всякого $z \in W_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству $\rho(z, f^{m-1}x) \geqslant r$, имеет место равенство $g_r z = fz$ (см. фразу, содержащую формулу (96));

в) из а) и б) следует, что для всяких, $r \in (0,\overline{s})$ для $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ всякого $z \in W_{m-1} \setminus E\left\{z \in W_{m-1}^{(1)} : \rho(z, f^{m-1}x) < r\right\}$ имеем $\rho(g_r z, fz) = s(v) = 0 \leqslant \chi(r)$;

г) для всяких, $r \in (0,\overline{s})$ для $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ всякого $z \in E\left\{z \in W_{m-1}^{(1)} : \rho(z, f^{m-1}x) < r\right\}$ последнее неравенство цепочки (107) непосредственно следует из формул (106), (108).

Последнее неравенство цепочки (107) доказано.

Для функции $\chi(\cdot) : (0,\overline{s}) \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой (108), имеет место соотношение

$$\chi(r) \xrightarrow[r \to 0]{} 0. \tag{109}$$

Доказательство соотношения (109). Для всякого $k \in \{0,...,\overline{t}\}$ для всякого $\theta > 0$ существует $\delta_k(\theta) > 0$ такое, что для всякого $z \in V^n$, удовлетворяющего неравенству $\rho(z, f^{m-1}x) < \delta_k(\theta)$, имеет место неравенство $|h_k z|_c < \theta$ (существование такого $\delta_k(\theta)$ следует в силу формулы (19) из хорошо известного утверждения, состоящего в том, что топология, индуцированная на V^n расстоянием $\rho(\cdot,\cdot)$, построенным стандартным образом по римановой метрике $\delta(\cdot,\cdot)$, совпадает с топологией, имеющейся на V^n как на многообразии). При всяком $\varepsilon > 0$ положим

$$\delta(\varepsilon) \underset{\text{def}}{=} \min_{m \in \{1,...,\overline{t}\}} \delta_{m-1}\left(\mathcal{D}^{-1}(M+1)^{-1}\varepsilon\right); \tag{110}$$

тогда $\delta(\varepsilon) > 0$ (при всяком $\varepsilon > 0$) и при всяком $\varepsilon > 0$ при всяком $r \in (0, \delta(\varepsilon))$ выполнено неравенство $\chi(r) \underset{(110)}{\overset{(108)}{<}} \varepsilon$. Соотношение (109) доказано.

Для всякого $r \in (0,\overline{s})$ имеем

$$\sup_{z \in V^n} \rho(g_r z, fz) \underset{(62)}{=} \max_{m \in \{1,...,\overline{t}\}} \sup_{z \in W_{m-1}^{(1)}} \rho(g_r z, fz) \underset{(107)}{\leqslant} \chi(r).$$

Утверждение, сформулированное в начале п. 14, доказано.

15. Утверждение. *Существует* $\beta > 0$ *такое, что при всяком* $r \in (0,\beta)$ *имеют место неравенства:*

$$\max_{m \in \{1,...,\overline{t}\}} \sup_{y \in h_{m-1}W_{m-1}} \left\| \hat{d}\left(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m\right)_y \right\|_{y,m-1} \hat{f}_m y, m \leqslant 20\overline{\delta} \left\|df\right\|, \tag{111}$$

$$\max_{m \in \{1,...,\overline{t}\}} \sup_{y \in h_{m-1}W_{m-1}} \left\| \hat{d}\left(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m\right)_y \right\|_{0,m-1}^{0,m} \leqslant 80\overline{\delta} \left\|df\right\|. \tag{112}$$

Пояснения к формулировке утверждения. 1) $\hat{d}\left(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m\right)_y$ определено формулой (82) (в данном случае $k = l = n$, так как $\hat{g}_{m,r}$ и $\hat{f}_m$, а следовательно, и $\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m$ отображают $h_{m-1}W_{m-1} \subset R^n$ в R^n ($m \in \{1,...,\overline{t}\}$)).

2) Для всякого линейного отображения $L{:}R^n \to R^n$ при всяких $l \in \{0,...,\overline{t}\}$, $m \in \{0,...,\overline{t}\}$, $y_1 \in h_l V_l$, $y_2 \in h_m V_m$ полагаем по определению

$$\|L\|_{y_1,l}^{y_2,m} \underset{\text{def}}{=} \sup_{a \in R_*^n} \left\{ \left[g_{ij}^{(m)}(y_2)(La)^i (La)^j \right]^{\frac{1}{2}} \left[g_{ij}^{(l)}(y_1) a^i a^j \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \tag{113}$$

(напомним, что билинейные формы с коэффициентами $g_{ij}^{(k)}(\cdot)$ определены формулой (40) и что по повторяющимся вверху и внизу индексам *i, j* подразумевается суммирование от 1 до *n*; напомним также, что для всякого $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ для всякого $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеем: $\hat{f}_m y \underset{(38)}{=} h_m f h_{m-1}^{-1} y \in h_m f W_{m-1} \underset{(29)}{\overset{(26)}{\subset}} h_m V_m$).

Доказательство утверждения, сформулированного и поясненного в этом пункте, составит содержание следующего пункта.

16. При всяких *r*>0, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \hat{d}\left(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m\right)_y = \hat{d}\left(\hat{g}_{m,r}\right)_y - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_y \underset{(81)}{=} \sigma\left(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)\right)\left[\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right] + \\ + \left\{\hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)}\left[r^{-1}\hat{d}\left(\hat{\rho}_{m-1}\right)_y\right]\right\}\left[\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right] y, \end{aligned} \tag{114}$$

из которого в силу формулы (113) следует неравенство

$$\begin{aligned} \left\|\hat{d}\left(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m\right)_y\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m} \leqslant \left(\sup_{\tau \in \mathbf{R}} |\sigma(\tau)|\right) \left\|\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m} + \\ + \left(\sup_{\tau \in \mathbf{R}} \left|\frac{d\sigma}{d\tau}\right|\right) r^{-1} \left\|\hat{d}\left(\hat{\rho}_{m-1}\right)_y\right\|_{y,m-1} \left|\left[\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right] y\right|_{\hat{f}_m y,m}. \end{aligned} \tag{115}$$

Пояснения к формуле (115): а) при всяких $a \in R^n$, $m \in \{0,...,\overline{t}\}$ $u{:}h_m V_m \to R^n$ норма $|a|_{u,m}$ определяется формулой

$$|a|_{u,m} \underset{\text{def}}{=} \left[g_{ij}^{(m)}(u) a^i a^j \right]^{\frac{1}{2}}; \tag{116}$$

б) для всякого линейного отображения $Z{:}R^n \to \mathbf{R}$ при всяких $k \in \{0,...,\overline{t}\}$ $y \in h_k V_k$ норма $\|Z\|_{y,k}$ определяется формулой

$$\|Z\|_{y,k} \underset{\text{def}}{=} \sup_{a \in R_*^n} \left\{ |Za| \cdot \left[g_{ij}^{(k)}(y) a^i a^j \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \tag{117}$$

(в формулах (116), (117) по повторяющимся вверху и внизу индексам *i, j* подразумевается суммирование от 1 до *n*). Пояснения к формуле (115) закончены.

Из формулы (51) следуют равенства

$$\sup_{\tau \in \mathbf{R}} |\sigma(\tau)| = 1, \tag{118}$$

$$\sup_{\tau \in \mathbf{R}} \left|\frac{d\sigma}{d\tau}\right| = \sup_{\tau \in [-1,1]} \left| -\frac{\pi}{2} sin(\pi\tau) \right| = \frac{\pi}{2}. \tag{119}$$

Из формулы (52) в силу неравенства треугольника следует неравенство

$$\left|\hat{\rho}_k(y + \Delta y) - \hat{\rho}_k(y)\right| \leqslant \rho\left(h_k^{-1}(y + \Delta y), h_k^{-1} y\right) \tag{120}$$

(при всяких $k \in \{0,...,\overline{t}\}$, $y \in h_k V_k$, $y + \Delta y \in h_k V_k$). При всяких $k \in \{0,...,\overline{t}\}$, $y \in h_k V_k$ имеем

$$\rho\left(h_k^{-1}(y + \Delta y), h_k^{-1} y\right)\left[g_{ij}^{(k)}(y)(\Delta y)^i (\Delta y)^j \right]^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[\Delta y \to 0]{} 1 \tag{121}$$

(по *i* и *j* суммирование от 1 до *n*); формула (121) хорошо известна и легко доказывается, исходя из определения расстояния $\rho(\cdot,\cdot)$ через риманову метрику $\delta(\cdot,\cdot)$ (напомним, что $g_{ij}^{(k)}$ по определению выражаются через $\delta(\cdot,\cdot)$ формулой (40)). Из определения $\hat{d}\left(\hat{\rho}_k\right)_y$ (см. формулу (82), в которой в данном случае надо положить $k = n$, l=1, $g = \hat{\rho}_k(\cdot)$) и определения нормы $\|\cdot\|_{y,k}$ (см. формулу (117)) следует в силу формул (120), (121), что при всяких $k \in \{0,...,\overline{t}\}$, $y \in h_k V_k$ имеет место неравенство

$$\left\|\hat{d}\left(\hat{\rho}_k\right)_y\right\|_{y,k} \leqslant 1. \tag{122}$$

При всяком $m \in \{1,...,\overline{t}\}$ имеем

$$\left\|\left[\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right]y\right|_{\hat{f}_m y,m} \underset{(116)}{\overset{(113)}{\leqslant}} \left\|\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m} |y|_{y,m-1}. \tag{123}$$

При всяких $r > 0$, $m \in \{1,...,\overline{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ из неравенства (115) в силу равенств (118), (119) и неравенств (122), (123) следует неравенство

$$\left\|\hat{d}\left(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m\right)_y\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m} \leqslant \left(1 + \frac{\pi}{2} r^{-1} |y|_{y,m-1}\right) \left\|\hat{Z}_m - \hat{d}\left(\hat{f}_m\right)_0\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m}. \tag{124}$$

При всяком $k \in \{0,...,\overline{t}\}$ имеем

$$\lim_{y\to 0}\left\{|y|_{y,k}\left[\hat{\rho}_k(y)\right]^{-1}\right\} \underset{(116)}{\overset{(52)}{=}} \lim_{y\to 0}\left\{\left[g_{ij}^{(k)}(y) y^i y^j\right]^{\frac{1}{2}}\left[\rho\left(h_k^{-1}y, f^k x\right)\right]^{-1}\right\} = 1 \tag{125}$$

(по i и j суммирование от 1 до n); к последнему равенству применимо то же пояснение, которое выше было сделано по поводу равенства (121); нет надобности уточнять, в каком смысле $y \to 0$ в (125) (так же, как нет надобности уточнять, в каком смысле $\Delta y \to 0$ в (121)), имея в виду, что соотношения $|y|_c \to 0$ и $\hat{\rho}_k(y) \to 0$ при всяком $k \in \{0,...,\overline{t}\}$ эквивалентны, а соотношение $y \to 0$ по определению эквивалентно каждому из них. Из формулы (125) следует, что при всяком $k \in \{0,...,\overline{t}\}$ найдется $\gamma_k > 0$ такое, что для всякого $y \in h_k V_k$, удовлетворяющего неравенству $\hat{\rho}_k(y) < \gamma_k$ выполнено неравенство

$$|y|_{y,k} < \hat{\rho}_k(y) \tag{126}$$

При всяком

$$r \in (0, \gamma), \tag{127}$$

где $\gamma \underset{\text{def}}{=} \min\{\gamma_0,...,\gamma_{\overline{t}}\}$ ($\gamma > 0$, так как $\gamma_0 > 0,...,\gamma_{\overline{t}} > 0$), при всяких $k \in \{0,...,\overline{t}-1\}$, $y \in h_k W_k$ имеем: либо

$$\hat{\rho}_k(y) \leqslant r \tag{128}$$

и тогда, так как $r \underset{(127)}{<} \gamma_k$, имеем

$$1 + \frac{\pi}{2} r^{-1} |y|_{y,k} \underset{(126)}{<} 1 + \pi r^{-1} \hat{\rho}_k(y) \underset{(126)}{\leqslant} 1 + \pi, \tag{129}$$

либо

$$\hat{\rho}_k(y) > r \tag{130}$$

и, следовательно, $\hat{\rho}_k(y) > r$ для всякого z из некоторой окрестности точки y, а тогда для всех z из этой окрестности точки y имеет место равенство

$$\sigma(r^{-1}\hat{\rho}_k(z)) \underset{(51)}{=} 0, \tag{131}$$

откуда

$$\hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_k(y)} = 0; \tag{132}$$

подставив равенство (131) (при $z = y$) и равенство (132) в формулу (114) (положив в ней $m = k+1$), получаем, что в этом случае (т. е. в случае выполнения неравенства (130)) имеет место равенство $\hat{d}(\hat{g}_{k+1,\,r} - \hat{f}_{k+1})_y = 0$.

Итак, при всяких $r \in (0,\,\gamma)$, $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеет место альтернатива: либо $1 + \frac{\pi}{2} r^{-1} \,|\, y \,|_{y,\,m-1} < 1 + \pi < 5$, либо $\hat{d}(\hat{g}_{m,\,r} - \hat{f}_m)_y = 0$; в каждом из этих двух случаев из неравенства (124) следует неравенство

$$\| \hat{d}(\hat{g}_{m,\,r} - \hat{f}_m)_y \|_{y,\,m-1}^{\hat{f}_m y,\,m} \leqslant 5 \,\| \hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \|_{y,\,m-1}^{\hat{f}_m y,\,m}. \tag{133}$$

Итак, доказано, что найдется $\gamma > 0$ такое, что для всяких $r \in (0,\,\gamma)$, $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ выполнено неравенство (133).

При всяких $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеем

$$\begin{gathered} \| \hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \|_{y,\,m-1}^{\hat{f}_m y,\,m} \underset{(113)}{\leqslant} \\ \underset{(113)}{\leqslant} \| I \|_{0,\,m}^{\hat{f}_m y,\,m} \,\| \hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \|_{0,\,m-1}^{0,\,m} \,\| I \|_{0,\,m-1}^{0,\,m-1}. \end{gathered} \tag{134}$$

При всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ имеем

$$\begin{gathered} \| \hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \|_{0,\,m-1}^{0,\,m} = \\ = \| [\hat{Z}_m(\hat{d}(\hat{f}_m)_0)^{-1} - I]\, \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \|_{0,\,m-1}^{0,\,m} \overset{(44)}{\underset{(113)}{\leqslant}} \\ \overset{(44)}{\underset{(113)}{\leqslant}} \| \hat{Z}_m(\hat{d}(\hat{f}_m)_0)^{-1} - I \|_m \,\| \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \|_{0,\,m-1}^{0,\,m} \| \underset{(49)}{\leqslant} \\ \underset{(49)}{\leqslant} \overline{\delta} \,\| \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \|_{0,\,m-1}^{0,\,m} = \overline{\delta} \,\| df_{f^{m-1}x} \| \leqslant \overline{\delta} \,\|| df \||. \end{gathered} \tag{134}$$

Доказательство равенства, имеющегося в последней строчке формулы (135):

$$\begin{gathered} \| \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \|_{0,\,m-1}^{0,\,m} \overset{(44)}{\underset{(113)}{=}} \\ \overset{(44)}{\underset{(113)}{=}} \sup_{a \in R_*^n} \{ [\delta\,(\eta_m^{-1}(\hat{d}(\hat{f}_m)_0 a,\ \eta_m^{-1}(\hat{d}(\hat{f}_m)_0 a)]^{\frac{1}{2}} \,[\delta\,(\eta_{m-1}^{-1}a,\ \eta_{m-1}^{-1}a)]^{-\frac{1}{2}} \}, \end{gathered}$$

далее,

$$\begin{gathered} \eta_m^{-1}(\hat{d}(\hat{f}_m)_0 a = \eta_m^{-1}\hat{d}(\hat{f}_m)_0 \eta_{m-1}\eta_{m-1}^{-1} a \overset{(19)}{\underset{(36)}{=}} \\ \overset{(19)}{\underset{(36)}{=}} d\,(h_m^{-1})_0 (\tau_0^{[n]})^{-1} \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \tau_0^{[n]} d\,(h_{m-1})_{f^{m-1}x} \eta_{m-1}^{-1} a \underset{(39)}{=} \\ \underset{(39)}{=} d\,(h_m^{-1})_0 \hat{d}(\hat{f}_m)_0 d\,(h_{m-1})_{f^{m-1}x} \eta_{m-1}^{-1} a \overset{(19)}{\underset{(38)}{=}} df_{f^{m-1}x} \eta_{m-1}^{-1} a; \end{gathered}$$

подставив это в предыдущую формулу и воспользовавшись тем, что $\eta_{m-1}^{-1}R_*^n = \pi_*^{-1}(f^{m-1}x)$ (так как η_{m-1} — изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(f^{m-1}x)$ на векторное пространство R^n), получаем равенство $\| \hat{d}(\hat{f}_m)_0 \|_{0,\,m-1}^{0,\,m} = \| df_{f^{m-1}x} \|$. Формула (135) полностью доказана.

При всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ найдется $\beta_m > 0$ такое, что для всякого $y \in h_{m-1}V_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству $\hat{\rho}_{m-1}(y) < \beta_m$, выполнены неравенства:

$$\| I \|_{y,\,m-1}^{0,\,m-1} < 2, \ \ \| I \|_{0,\,m-1}^{y,\,m-1} < 2 \tag{136}$$

(это утверждение — следствие непрерывности функций $g_{ij}^{(m-1)}(\cdot): h_{m-1}V_{m-1} \to \mathbf{R}$, ($i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$), так как $h_{m-1}V_{m-1}$ — окрестность нуля ($m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$)).

При всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ найдется $\alpha_m > 0$ такое, что для всякого $y \in h_{m-1}W_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству $\hat{\rho}_{m-1}(y) < \alpha_m$, выполнены неравенства

$$\| I \|_{0,\, m}^{\hat{f}_m y,\, m} < 2, \ \| I \|_{\hat{f}_m y,\, m}^{0,\, m} < 2 \tag{137}$$

(это утверждение — следствие непрерывности отображений $\hat{f}_m : h_{m-1}W_{m-1} \to \mathbf{R}^n$ ($m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$) и непрерывности функций $g_{ij}^{(m)}(\cdot): h_m V_m \to \mathbf{R}$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$), так как $\hat{f}_m 0 = 0$, а $h_m V_m$ — окрестность нуля ($m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$)).

Положим $\beta \underset{\text{def}}{=} \min\{\gamma, \beta_1, \ldots, \beta_{\overline{t}}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\overline{t}}\}$. Имеем:

а) $\beta > 0$, так как $\gamma > 0, \beta_1 > 0, \ldots, \beta_{\overline{t}} > 0, \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_{\overline{t}} > 0$;

б) при всяких $r \in (0, \beta)$, $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ для всякого $y \in h_{m-1}W_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству $\hat{\rho}_{m-1}(y) < \beta$, выполнены неравенства:

$$\| \hat{d}(\hat{g}_{m,\, r} - \hat{f}_m)_y \|_{y,\, m-1}^{\hat{f}_m y,\, m} \underset{(133)-(137)}{\leqslant} 20\overline{\delta} \, ||| \, df \, |||, \tag{138}$$

$$\begin{gathered} \| \hat{d}(\hat{g}_{m,\, r} - \hat{f}_m)_y \|_{0,\, m-1}^{0,\, m} \leqslant \\ \leqslant \| I \|_{\hat{f}_m y,\, m}^{0,\, m} \| \hat{d}(\hat{g}_{m,\, r} - \hat{f}_m)_y \|_{y,\, m-1}^{\hat{f}_m y,\, m} \| I \|_{0,\, m-1}^{y,\, m-1} \underset{(136)-(138)}{\leqslant} 80\overline{\delta} \, ||| \, df \, |||. \end{gathered}$$

Итак, доказано следующее. Существует $\beta > 0$ такое, что для всяких $r \in (0, \beta)$, $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеет место альтернатива: либо $\hat{\rho}_{m-1}(y) \leqslant r$, и тогда (так как $r < \beta$) выполнены неравенство (138) и неравенство

$$\| \hat{d}(\hat{g}_{m,\, r} - \hat{f}_m)_y \|_{0,\, m-1}^{0,\, m} \leqslant 80\overline{\delta} \, ||| \, df \, |||, \tag{139}$$

либо $\hat{\rho}_{m-1}(y) < r$, и тогда (см. фразу, содержащую формулы (131), (132)) имеет место равенство $\hat{d}(\hat{g}_{m,\, r} - \hat{f}_m)_y = 0$, из которого тоже следуют неравенства (138) и (139).

Следовательно, доказано существование такого $\beta > 0$, что при всяких $r \in (0, \beta)$, $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеют место неравенства (138) и (139), откуда следует, что при всяком $r \in (0, \beta)$ имеют место неравенства (111) и (112). Утверждение, сформулированное в начале п. 15, доказано.

17. Пусть $z_1 \in V^n$, $z_2 \in V^n$ и пусть при некотором $r \in (0, \overline{s})$ имеет место равенство

$$g_r z_1 = g_r z_2. \tag{140}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \rho(z_1, z_2) \leqslant ||| (df)^{-1} ||| \, \rho(fz_1, fz_2) \leqslant \\ \leqslant ||| (df)^{-1} ||| \cdot [\rho(g_r z_1, fz_1) + \rho(g_r z_2, fz_2)] \leqslant \\ \leqslant 2 \, ||| (df)^{-1} ||| \sup_{z \in V^n} \rho(g_r z, fz); \end{gathered} \tag{141}$$

первое неравенство этой цепочки хорошо известно (впрочем, его доказательство приведено в [8, формула (1.37)], где теперь надо положить $g = f$), второе — следует из неравенства треугольника в силу равенства (140).

18. Возьмем $\alpha \in (0, \overline{s})$ такое, что для всякого $r \in (0, \alpha)$ выполнено неравенство*

---

* Напомним, что число $\overline{r}$, определенное формулой (55), больше нуля.

$$\sup_{z\in V^n} \rho\,(g_r z,\, fz) < \frac{1}{4}\overline{r}\,|||\,(df)^{-1}\,|||^{-1} \tag{142}$$

(такое α существует в силу соотношения (91)).

Пусть при некоторых $r \in (0,\ \alpha)$, $z_1 \in V^n$, $z_2 \in V^n$ имеет место равенство (140). Тогда

$$\rho\,(z_2,\, z_1) \underset{(142)}{\overset{(141)}{<}} \frac{1}{2}\overline{r}. \tag{143}$$

Если при этом

$$g_r z_1 = fz_1,\ g_r z_2 = fz_2, \tag{144}$$

то $fz_1 \underset{(144)}{\overset{(140)}{=}} fz_2$, откуда следует равенство $z_1 = z_2$ (напомним, что $f \in S$ и, следовательно, f есть биекция V^n на V^n).

Если хоть одно из двух равенств (144) не выполнено, то без ограничения общности (изменив, если нужно, нумерацию точек z_1, z_2) можно считать, что не выполнено первое из них, т. е. что имеет место неравенство

$$g_r z_1 \neq fz_1. \tag{145}$$

В силу формулы (62), определяющей отображение g_r, из неравенства (145) следует, что найдется $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ такое, что $z_1 \in W_{m-1}$. Из неравенства (145) следует тогда, что $z_1 \in W_{m-1}^{(1)}$. В самом деле, если бы точка z_1 принадлежала множеству $W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)} \underset{(27)}{\subset} V_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}$, то (см. фразы, содержащие формулы (70) — (73)) выполнялось бы равенство $\widehat{g}_{m,\,r} h_{m-1} z_1 \underset{(73)}{=} \widehat{f}_m h_{m-1} z_1$, из которого в силу формулы (63) следует равенство $h_m^{-1} \widehat{g}_{m,\,r} h_{m-1} z_1 = h_m^{-1} \widehat{f}_m h_{m-1} z_1$, которое в силу формул (38), (62) переписывается в виде равенства $g_r z_1 = fz_1$, которое противоречит неравенству (145). Полученное противоречие доказывает, что $z_1 \in W_{m-1}^{(1)}$, следовательно,

$$\rho\,(z_1,\, f^{m-1}x) \underset{(57)}{<} \frac{1}{2}\overline{r}. \tag{146}$$

Имеем: $\rho\,(z_2,\, f^{m-1}x) \leqslant \rho\,(z_2,\, z_1) + \rho\,(z_1,\, f^{m-1}x) \underset{(146)}{\overset{(143)}{<}} \overline{r} \underset{(55)}{\leqslant} \overline{r}_{m-1}$, следовательно, в силу определения множеств W_k (см. п. 5) $z_2 \in W_{m-1}$.

Подведем итог этого пункта. В нем доказано следующее утверждение.

Найдется $\alpha \in (0,\ \overline{s})$ *такое, что если при некоторых* $r \in (0,\ \alpha)$, $z_1 \in V^n$, $z_2 \in V^n$ *выполнено равенство* $g_r z_1 = g_r z_2$, *то: либо* $z_1 = z_2$, *либо не выполнено хотя бы одно из двух равенств (144), и тогда найдется* $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ *такое, что* $z_1 \in W_{m-1}$, $z_2 \in W_{m-1}$ (эти два случая не являются взаимоисключающими, т. е. могут осуществиться сразу оба).

19. Пусть для некоторого $r \in (0,\ \alpha)$ (α определено в предыдущем пункте), для некоторых $z_1 \in V^n$, $z_2 \in V^n$ выполнено равенство

$$g_r z_1 = g_r z_2. \tag{147}$$

В силу утверждения, доказанного в предыдущем пункте, либо $z_1 = z_2$, либо найдется $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ такое, что

$$z_1 \in W_{m-1},\ z_2 \in W_{m-1}. \tag{148}$$

Во втором случае положим

$$y_1 \in h_{m-1} z_1,\ y_2 \in h_{m-1} z_2. \tag{149}$$

Так как

$$\hat{g}_{m,r}y_1 \underset{(149)}{=} \hat{g}_{m,r}h_{m-1}z_1 \overset{(62)}{\underset{(148)}{=}} h_m g_r z_1 \underset{(147)}{=} h_m g_r z_2 \overset{(62)}{\underset{(148)}{=}} \hat{g}_{m,r}h_{m-1}z_2 \underset{(149)}{=} \hat{g}_{m,r}y_2,$$

то имеет место равенство

$$(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)y_1 - (\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)y_2 = \hat{f}_m y_2 - \hat{f}_m y_1. \tag{150}$$

Справедливо также неравенство

$$\begin{gathered} |(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)y_1 - (\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)y_2|_{0,m} \leqslant \\ \leqslant \{\sup_{y \in h_{m-1}W_{m-1}} \|\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y\|^{0,m}_{0,m-1}\} |y_1 - y_2|_{0,m-1}. \end{gathered} \tag{151}$$

Напомним, что за разъяснением используемых в этом неравенстве обозначений можно обратиться к формулам (113) и (116).

Для доказательства неравенства (151) проведем следующие рассуждения.

Сначала напомним одно хорошо известное (и легко доказываемое) утверждение.

Пусть на R^n *заданы две нормы:* $|\cdot|_1$ *и* $|\cdot|_2$*; пусть* $G \in R^n$ *— выпуклое открытое множество и пусть* $F: G \to R^n$ *— непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда для всяких* $a \in G$, $b \in G$ *имеет место неравенство**:

$$|Fa = Fb|_2 \leqslant \{\sup_{y \in G} \|\hat{d}F_y\|^2_1\} |a - b|_1,$$

где принято обозначение:

$$\|L\|^2_1 \underset{\text{def}}{=} \sup_{a \in R^n_*} \{|La|_2 (|a|_1)^{-1}\}$$

для всякого линейного отображения $L: R^n \to R^n$.

Для того чтобы из этого известного утверждения получить неравенство (151), достаточно положить: $|\cdot|_1 \underset{\text{def}}{=} |\cdot|_{0,m-1}$, $|\cdot|_2 \underset{\text{def}}{=} |\cdot|_{0,m}$ (тогда $\|\cdot\|^2_1 \overset{(113)}{\underset{(116)}{=}} \|\cdot\|^{0,m}_{0,m-1}$,

$$\begin{gathered} F \underset{\text{def}}{=} \sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(\cdot))[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0], \\ G \underset{\text{def}}{=} S^c_{\frac{q}{2}}(0) \underset{(25)}{=} h_{m-1}V^{(1)}_{m-1} \underset{(26)}{\subset} h_{m-1}V_{m-1} \end{gathered} \tag{152}$$

и воспользоваться тем, что, во-первых, в силу формул (148), (149) точки y_1, y_2 содержатся в множестве $h_{m-1}W_{m-1} \underset{(27)}{\subset} h_{m-1}V^{(1)}_{m-1} \underset{(152)}{=} G$, а во-вторых,

$$\begin{gathered} \sup_{y \in h_{m-1}W_{m-1}} \|\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y\|^{0,m}_{0,m-1} \underset{(50)}{=} \\ \underset{(50)}{=} \sup_{y \in h_{m-1}W_{m-1}} \|\hat{d}\{\sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(\cdot))[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0]\}_y\|^{0,m}_{0,m-1} = \\ = \sup_{y \in G} \|\hat{d}\{\sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(\cdot))[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0]\}_y\|^{0,m}_{0,m-1} \end{gathered}$$

(последнее равенство следует из того, что, как доказано в фразе, содержащей формулы (70)—(72), при всяких $r \in (0, \overline{s})$, $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ сужение отображения $\sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(\cdot))[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0]$ на открытое (см. п. 10) множество

$$(h_{m-1}V_{m-1}) \setminus (h_{m-1}W^{(1)}_{m-1}) \overset{(58)}{\underset{(152)}{\supset}} G(h_{m-1}W_{m-1})$$

равно нулю).

20. Для всякого $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ возьмем $\alpha^{(1)}_m > 0$ такое, что для всякого $y \in R^n$, удовлетворяющего неравенству $|y|_{0,m} < \alpha^{(1)}_m$, имеют место: включение

---

* Верное во всех случаях, но содержательное лишь в том случае, когда $\sup$ в правой части есть число (а не $+\infty$).

$$y \in \widehat{f}_m h_{m-1} W_{m-1} \overset{(27),\,(29)}{\underset{(38)}{=}} h_m f W_{m-1}$$

и неравенство

$$\widehat{\rho}_{m-1}((\widehat{f}_m)^{-1} y) < \min\{\alpha_m,\ \beta_m\}$$

(напомним, что числа $\alpha_m > 0$, $\beta_m > 0$ определены фразами, содержащими формулы (136), (137)); такое $\alpha_m^{(1)}$ существует, так как при всяких $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$, $y \in h_{m-1} W_{m-1}$ имеет место формула (38), f — гомеоморфизм V^n на V^n и при всяком $k \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ имеют место утверждения: h_k — гомеоморфизм V_k на $h_k V_k \subset R^n$, W_k — окрестность точки $f^k x$, содержащаяся в V_k, и имеют место формулы (19), (27), (29), (52).

Для всякого $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ возьмем $\alpha_m^{(2)} > 0$ такое, что для всякого $y \in R^n$, удовлетворяющего неравенству $\widehat{\rho}_{m-1}(y) < \alpha_m^{(2)}$, имеет место неравенство $|\,\widehat{f}_m y\,|_{0,\,m} < \alpha_m^{(1)}$ (такое $\alpha_m^{(2)}$ существует в силу непрерывности отображения $\widehat{f}_m : h_{m-1} W_{m-1} \to R^n$, поскольку $\widehat{f}_m 0 \overset{(19)}{\underset{(38)}{=}} 0$, $h_{m-1} W_{m-1}$ — окрестность нуля в R^n, имеет место формула (52), а координатное отображение h_{m-1} определено в окрестности точки $f^{m-1} x$, непрерывно в этой точке и отображает ее в нуль.

Положим $\alpha^{(2)} \underset{\mathrm{def}}{=} \min\{\alpha_1^{(2)},\ \ldots,\ \alpha_{\overline{t}}^{(2)}\}$. При этом $\alpha^{(2)} > 0$, так как $\alpha_1^{(2)} > 0,\ \ldots,\ \alpha_{\overline{t}}^{(2)} > 0$.

21. Возьмем $\overline{\alpha} \in \left(0,\ \min\left\{\alpha,\ \dfrac{1}{2}\alpha^{(2)}\right\}\right)$ (число $\alpha \in (0,\ \overline{s})$ определено в начале п. 18, число $\alpha^{(2)} > 0$ определено в п. 20) такое, что для всякого $r \in (0,\ \overline{\alpha})$ выполнено неравенство

$$\sup_{z \in V^n} \rho\,(g_r z,\ fz) < \frac{1}{4}\alpha^{(2)}\,|||\,(df)^{-1}\,|||^{-1} \tag{153}$$

(такое $\overline{\alpha}$ существует в силу соотношения (91)).

Пусть при некоторых $r \in (0,\ \overline{\alpha})$, $z_1 \in V^n$, $z_2 \in V^n$ имеет место равенство (140): $g_r z_1 = g_r z_2$.

Так как $r \in (0,\ \overline{\alpha}) \subset (0,\ \alpha) \subset (0,\ \overline{s})$, то

$$\rho\,(z_2,\ z_1) \overset{(140),\,(141)}{\underset{(153)}{<}} \frac{1}{2}\alpha^{(2)}. \tag{154}$$

Кроме того, так как $r \in (0,\ \overline{\alpha}) \subset (0,\ \alpha)$, то, как доказано в п. 18, из равенства (140) следует, что либо $z_1 = z_2$, либо $g_r z_1 \ne f z_1$ (либо $g_r z_2 \ne f z_2$,. но последний случай сводится к предыдущему изменением нумерации, точек z_1, z_2) и тогда найдется $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ такое, что $z_1 \in W_{m-1}$, $z_2 \in W_{m-1}$. Пусть

$$g_r z_1 \ne f z_1. \tag{155}$$

Возьмем $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ такое, что $z_1 \in W_{m-1}$, $z_2 \in W_{m-1}$. Тогда

$$\rho\,(z_1,\ f^{m-1} x) < \overline{\alpha} < \frac{1}{2}\alpha^{(2)}. \tag{156}$$

Второе неравенство цепочки (156) непосредственно следует из определения числа $\overline{\alpha}$. Докажем первое неравенство этой цепочки.

Предположим противное:

$$\rho\,(z_1,\ f^{m-1} x) \geqslant \overline{\alpha}. \tag{157}$$

Положив

$$y_1 \underset{\text{def}}{=} h_{m-1} z_1 \tag{158}$$

и воспользовавшись формулой (52), перепишем неравенство (157) в виде

$$\hat{\rho}_{m-1}(y_1) \geqslant \bar{\alpha}. \tag{159}$$

Так как $r < \bar{\alpha}$, то $r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y_1) \underset{(159)}{>} 1$, откуда в силу формулы (51) следует равенство $\sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y_1)) = 0$, из которого в силу формулы (50) следует равенство $\hat{g}_{m,\,r} y_1 = \hat{f}_m y_1$ откуда (напомним, что $z_1 \in W_{m-1}$) следует равенство

$$h_m^{-1} \hat{g}_{m,\,r} h_{m-1} z_1 \underset{(158)}{=} h_m^{-1} \hat{f}_m h_{m-1} z_1,$$

откуда в силу формул (38) и (62) следует равенство $g_r z_1 = f z_1$ противоречащее неравенству (155). Полученное противоречие доказывает, что первое неравенство цепочки (156) выполнено. Имеем, далее

$$\rho(z_2, f^{m-1}x) \leqslant \rho(z_2, z_1) + \rho(z_1, f^{m-1}x) \underset{(156)}{\overset{(154)}{<}} \alpha^{(2)}. \tag{160}$$

Подведем итог п. 21. В этом пункте доказано следующее утверждение. *Если для некоторого $r \in (0, \bar{\alpha})$ (число $\bar{\alpha}$ определено в первой фразе п. 21) для некоторых $z_1 \in V^n$, $z_2 \in V^n$ имеет место равенство (140), то либо $z_1 = z_2$, либо найдется $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ такое, что $z_1 \in W_{m-1}$, $z_2 \in W_{m-1}$ и выполнены неравенства*

$$\rho(z_1, f^{m-1}x) \underset{(156)}{<} \alpha^{(2)},\ \rho(z_2, f^{m-1}x) \underset{(160)}{\overset{(154)}{<}} \alpha^{(2)}.$$

22. Пусть $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$, $z_1 \in W_{m-1}$, $z_2 \in W_{m-1}$ таковы, что выполнены неравенства

$$\rho(z_i, f^{m-1}x) < \alpha^{(2)} \ \ (i \in \{1,\ 2\}) \tag{161}$$

(напомним, что число $\alpha^{(2)} > 0$ определено в п. 20).

Положим $y_i \underset{\text{def}}{=} h_{m-1} z_i$ $(i \in \{1,\ 2\})$, тогда

$$\hat{\rho}_{m-1}(y_i) \underset{(52)}{=} \rho(z_i, f^{m-1}x) \underset{(161)}{<} \alpha^{(2)} \ \ (i \in \{1,\ 2\}). \tag{162}$$

Воспользуемся хорошо известным утверждением, формулировка которого воспроизведена в п. 19; в данном случае для применения цитируемого утверждения положим: $a = \hat{f}_m y_1$, $b = \hat{f}_m y_2$, $|\cdot|_1 = |\cdot|_{0,\,m}$, $|\cdot|_2 = |\cdot|_{0,\,m-1}$ (тогда $\|\cdot\|_1^2 = \|\cdot\|_{0,\,m}^{0,\,m-1}$),

$$G = G_m \underset{\text{def}}{=} E\,\{y \in R^n : |y|_{0,\,m} < \alpha_m^{(1)}\},\ F = (\hat{f}_m)^{-1} \tag{163}$$

и учтем, что, во-первых, в силу определения числа $\alpha_m^{(1)}$ (см. п. 20) и определения множества G_m (см. формулу (163)), имеет место включение

$$G_m \subset \hat{f}_m h_{m-1} W_{m-1} = h_m f W_{m-1} \tag{164}$$

(следовательно, множество G_m содержится в области определения отображения $(\hat{f}_m)^{-1}$, которое непрерывно дифференцируемо в своей области определения) и, во-вторых, $|\hat{f}_m y_i|_{0,\,m} < \alpha_m^{(1)}$ $(i \in \{1,\ 2\})$, т. е. $\hat{f}_m y_i \in G_m$ $(i \in \{1,\ 2\})$ (это следует из (162) в силу определения числа $\alpha^{(2)}$ (см. п. 20)); в результате применения цитированного утверждения к этой ситуации получаем неравенство:

$$|y_1 - y_2|_{0,\,m-1} \leqslant \{\sup_{u \in G_m} \|\hat{d}((\hat{f}_m)^{-1})_u\|_{0,\,m}^{0,\,m-1}\}\, |\hat{f}_m y_1 - \hat{f}_m y_2|_{0,\,m}\,.$$

Воспользовавшись хорошо известным тождеством $\hat{d}((\hat{f}_m)^{-1})_u = (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1}$ перепишем полученное неравенство в виде

$$| y_1 - y_2 |_{0,\, m-1} \leqslant \{\sup_{u \in G_m} \| (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \|^{0,\, m-1}_{0,\, m}\} \,| \hat{f}_m y_1 - \hat{f}_m y_2 |_{0,\, m} . \tag{165}$$

Для всякого $u \in G_m$ имеем

$$\begin{gathered} \| (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \|^{0,\, m-1}_{0,\, m} \leqslant \\ \leqslant \| I \|^{0,\, m-1}_{(\hat{f}_m)^{-1}u,\, m-1} \| (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \|^{(\hat{f}_m)^{-1}u,\, m-1}_{u,\, m} \| I \|^{u,\, m}_{0,\, m} . \end{gathered} \tag{166}$$

Для всякого $u \in G_m \underset{(164)}{\subset} \hat{f}_m h_{m-1} W_{m-1} \underset{(27)}{\subset} \hat{f}_m h_{m-1} V_{m-1}$ в силу определения числа $\alpha^{(1)}_m$ (см. п. 20), имеет место неравенство $\hat{\rho}_{m-1}((\hat{f}_m)^{-1})_u < \min\{\alpha_m,\, \beta_m\}$, из которого следуют два неравенства:

$$\| I \|^{0,\, m-1}_{(\hat{f}_m)^{-1}u,\, m-1} < 2 \tag{167}$$

(см. фразу, содержащую формулу (136)) и

$$\| I \|^{u,\, m}_{0,\, m} < 2 \tag{168}$$

(см. фразу, содержащую формулу (137), при применении которой нужно учесть, что $u = \hat{f}_m (\hat{f}_m)^{-1} u$).

Для всякого $u \in \hat{f}_m h_{m-1} W_{m-1}) \overset{(27),\,(29)}{\underset{(38)}{\subset}} h_m V_m$ имеем

$$\begin{gathered} \| (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \|^{(\hat{f}_m)^{-1}u,\, m-1}_{u,\, m} \underset{(113)}{=} \\ \underset{(113)}{=} \sup_{a \in R^n_*} \{[g^{(m-1)}_{ij}((\hat{f}_m)u)\,((\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} a)^i \times \\ \times ((\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} a)^i]^{\frac{1}{2}} \,[g^{(m)}_{ij}(u)\, a^i a^j]^{-\frac{1}{2}} \underset{(40)}{=} \\ \underset{(40)}{=} \sup_{a \in R^n_*} \{[\delta\,(\eta^{-1}_{m-1,\,(\hat{f}_m)^{-1}u} (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} a, \\ \eta^{-1}_{m-1,\,(\hat{f}_m)^{-1}u} (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} a)]^{\frac{1}{2}} \,[\delta\,(\eta^{-1}_{m,\,u} a,\ \eta^{-1}_{m,\,u} a)]^{-\frac{1}{2}}\}, \end{gathered} \tag{169}$$

$$\eta^{-1}_{m-1,\,(\hat{f}_m)^{-1}u} \underset{(41)}{=} (d(h_{m-1})_{h^{-1}_{m-1}(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} (\tau^{[n]}_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1}, \tag{170}$$

$$(\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \underset{(82)}{=} \tau^{[n]}_{(\hat{f}_m)^{-1}u} (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} (\tau^{[n]}_u)^{-1}, \tag{171}$$

$$\begin{gathered} \eta^{-1}_{m-1,\,(\hat{f}_m)^{-1}u} (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \overset{(170)}{\underset{(171)}{=}} \\ \overset{(170)}{\underset{(171)}{=}} (d(h_{m-1})_{h^{-1}_{m-1}(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} (\hat{d}(\hat{f}_m)_{(\hat{f}_m)^{-1}u})^{-1} (\tau^{[n]}_u)^{-1} \underset{(38)}{=} \\ \underset{(38)}{=} (df_{f^{-1}h^{-1}_{m-1}u})^{-1} d(h^{-1}_m)_u (\tau^{[n]}_u)^{-1} \underset{(41)}{=} (df_{f^{-1}h^{-1}_{m-1}u})^{-1} \eta^{-1}_{m,\,u}, \end{gathered} \tag{172}$$

$$\| (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \|_{u,\,m}^{(\widehat{f}_m)^{-1}u,\,m-1} \underset{(172)}{\overset{(169)}{=}}$$

$$\underset{(172)}{\overset{(169)}{=}} \sup_{a \in R_*^n} \{[\delta((df_{f^{-1}h_{m-1}^{-1}u})^{-1}\eta_{m,u}^{-1}a,\ (df_{f^{-1}h_{m-1}^{-1}u})^{-1}\eta_{m,u}^{-1}a)]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times [\delta(\eta_{m,u}^{-1}a,\ \eta_{m,u}^{-1}a)]^{-\frac{1}{2}} \underset{(41)}{=} \tag{173}$$

$$\underset{(41)}{=} \sup_{\text{æ} \in \pi_*^{-1}(h_{m-1}^{-1}u)} \{[\delta((df_{f^{-1}h_{m-1}^{-1}u})^{-1}\text{æ},\ (df_{f^{-1}h_{m-1}^{-1}u})^{-1}\text{æ})]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times [\delta(\text{æ},\ \text{æ})]^{-\frac{1}{2}}\} = \| (df_{f^{-1}h_{m-1}^{-1}u})^{-1} \| \leqslant \||(df)^{-1}\||.$$

Равенство, помеченное в цепочке (173) номером формулы (41), следует из равенства $\eta_{m,\,u}^{-1}R_*^n = \pi_*^{-1}(h_m^{-1}u)$, вытекающего из того, что формула (41) при всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$, $y \in h_k V_k$ определяет изоморфизм $\eta_{k,\,y}$ векторного пространства $\pi^{-1}(h_k^{-1}y)$ на векторное пространство R^n. Для всякого $u \in G_m$ имеет место неравенство

$$\| (\widehat{d}((\widehat{f}_m)^{-1})_u \|_{0,\,m}^{0,\,m-1} \leqslant 4 \||(df)^{-1}\||, \tag{174}$$

вытекающее из неравенств (166) — (168), (173). Из неравенств (165), (174) следует неравенство

$$| y_1 - y_2 |_{0,\,m-1} \leqslant 4 \||(df)^{-1}\|| \cdot | \widehat{f}_m y_1 - \widehat{f}_m y_2 |_{0,\,m}. \tag{175}$$

Подведем итог п. 22. В этом пункте доказано следующее утверждение. *Пусть* $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$, $z_1 \in W_{m-1}$, $z_2 \in W_{m-1}$ *таковы, что выполнены неравенства (161). Тогда имеет место неравенство (175), где* $y_i = h_{m-1}z_i$ $(i \in \{1,\ 2\})$.

23. Напомним, что β — это такое положительное число, что при всяком $r \in (0,\ \beta)$ имеют место неравенства (111) и (112); существование такого числа доказано в п. 16. Напомним также, что число $\overline{\alpha}$ определено в первой фразе п. 21.

Пусть при некотором $r \in (0,\ \min\{\beta,\ \overline{\alpha}\})$ при некоторых $z_1 \in V^n$, $z_2 \in V^n$ имеет место равенство (140): $g_r z_1 = g_r z_2$. Так как $r \in (0,\ \overline{\alpha}) \subset (0,\ \alpha)$, то либо $z_1 = z_2$, либо (см. п. 19) найдется $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ такое, что $z_i \in W_{m-1}$ $(i \in \{1,\ 2\})$ и имеют место формулы (150), (151), где y_1, y_2 определены формулой (149): $y_i = h_{m-1}z_i$ $(i \in \{1,\ 2\})$. Из формул (150), (151) следует неравенство

$$\begin{gathered} | \widehat{f}_m y_2 - \widehat{f}_m y_1 |_{0,\,m} \leqslant \\ \leqslant \{ \sup_{y \in h_{m-1}W_{m-1}} \| \widehat{d}(\widehat{g}_{m,\,r} - \widehat{f}_m)_y \|_{0,\,m-1}^{0,\,m} \} | y_1 - y_2 |_{0,\,m-1}. \end{gathered} \tag{176}$$

Так как $r \in (0,\ \beta)$, то имеет место неравенство (112). Из неравенств (176), (112) следует неравенство

$$| \widehat{f}_m y_2 - \widehat{f}_m y_1 |_{0,\,m} \leqslant 80\overline{\delta} \||df\|| \cdot | y_1 - y_2 |_{0,\,m-1}. \tag{177}$$

Так как $r \in (0,\ \overline{\alpha})$ и выполнено равенство (140), то, как доказано в п. 21, либо $z_1 = z_2$, либо найдется $m \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\}$ такое, что $z_1 \in W_{m-1}$, $z_2 \in W_{m-1}$ [*] и выполнены неравенства (161). Во втором случае, как доказано в п. 22, выполнено неравенство (175). Из неравенств (175), (177) следует неравенство:

$$| y_1 - y_2 |_{0,\,m-1} \leqslant 320\overline{\delta} \||df\|| \cdot \||(df)^{-1}\|| \cdot | y_1 - y_2 |_{0,\,m-1}. \tag{178}$$

---

[*] Так как множества W_k $(k \in \{1,\ \ldots,\ \overline{t}\})$ попарно не пересекаются (см. формулу (28)), то здесь m — то же самое, что и в предыдущих фразах этого пункта.

Так как $320\overline{\delta}\,|||\,df\,|||\cdot|||\,(df)^{-1}\,|||\underset{(5)}{<}1$, то из неравенства (178) следует равенство

$$y_1 = y_2. \tag{179}$$

Имеем: $z_1 = h_{m-1}^{-1}y_1 \underset{(179)}{=} h_{m-1}^{-1}y_2 = z_2$.

Подведем итог п. 23, являющийся также и итогом пп. 17—23.

В п. 23 доказано следующее утверждение. *Найдется* $\overline{\overline{\alpha}} > 0$ *(*$\overline{\overline{\alpha}} = \min\{\beta, \overline{\alpha}\}$ *такое, что при всяком* $r \in (0, \overline{\overline{\alpha}})$ *отображение* $g_r : V^n \to V^n$*, определенное формулой (62), есть биекция* (т. е. взаимно-однозначное отображение) V^n *на* g_rV^n.

24. Напомним еще раз некоторые обозначения[**].

Пусть $g : V^n \to V^n$ — дифференцируемое отображение. Тогда $|||\,dg\,|||\underset{\text{def}}{=}\sup\limits_{z\in V^n}\|\,dg_z\,\|$. Если, кроме того, производная отображения g невырождена в каждой точке многообразия V^n, то $|||\,(dg)^{-1}\,|||\underset{\text{def}}{=}\sup\limits_{z\in V^n}\|\,(dg_z)^{-1}\,\|$. Напомним также, что *через* S *обозначается множество непрерывно дифференцируемых отображений* $g : V^n \to V^n$*, каждое из которых имеет непрерывно дифференцируемое обратное* $g^{-1} : V^n \to V^n$ *и удовлетворяет условию* $\max\{|||\,dg\,|||,\ |||\,(dg)^{-1}\,|||\} < +\infty$.

25. В п. 11 доказано, что при всяком $r \in (0, \overline{s})$ отображение $g_r : V^n \to V^n$, определенное формулой (62), принадлежит классу C^1, т. е. непрерывно дифференцируемо.

Пусть дано произвольное $r \in (0, \overline{s})$. Докажем, что *отображение* $g_r : V^n \to V^n$ *удовлетворяет неравенству*

$$|||\,dg_r\,||| < +\infty. \tag{180}$$

Так как $f \in S$, то $|||\,df\,||| < +\infty$; в силу формулы (62) сужения отображений g_r и f на множество $V^n \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\overline{t}} W_{m-1}$ совпадают; имеет место включение $\bigcup\limits_{m=1}^{\overline{t}} W_{m-1} \underset{(27)}{\subset} \bigcup\limits_{m=1}^{\overline{t}} \overline{V_{m-1}^{(1)}}$; множество, стоящее в правой части этого включения, компактно, так как является объединением конечного числа компактных множеств (компактность множеств $\overline{V_m^{(1)}}$ доказана в п. 5: см. там утверждение *iii*)). Так как отображение $g_r : V^n \to V^n$ непрерывно дифференцируемо, то из совокупности утверждений, собранных в предыдущей фразе, следует неравенство (180).

26. Утверждение. *При всяком* $r \in (0, \min\{\overline{s}, \beta\})$ *производная* $d(g_r)_z$ *невырождена при всяком* $z \in V^n$ *и выполнено неравенство* $|||\,(dg_r)^{-1}\,||| < +\infty$.

Доказательство. Прежде чем доказывать сформулированное утверждение, напомним, что число β определено в п. 15; это — такое положительное число, что при всяком $r \in (0, \beta)$ имеют место неравенства (111) и (112); существование такого β доказано в п. 16.

Перейдем теперь собственно к доказательству утверждения. Пусть даны произвольные $r \in (0, \beta)$, $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$. Имеем

$$\begin{aligned}\|\,\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y)^{-1} - I\,\|_{\widehat{f}_m y,\, m}^{\widehat{f}_m y,\, m} &\leqslant \|\,\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y - \widehat{d}(\widehat{f}_m)_y\,\|_{y,\, m-1}^{\widehat{f}_m y,\, m}\,\|\,(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y)^{-1}\,\|_{\widehat{f}_m y,\, m}^{y,\, m-1} \underset{(111)}{\leqslant} \\ &\underset{(111)}{\leqslant} 20\overline{\delta}\,|||\,df\,|||\cdot\|\,(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y)^{-1}\,\|_{\widehat{f}_m y,\, m}^{y,\, m-1} \underset{(173)}{\leqslant} 20\overline{\delta}\,|||\,df\,|||\cdot|||\,(df)^{-1}\,|||\underset{(5)}{<}\frac{1}{16};\end{aligned} \tag{181}$$

[**] См. [8, п. 2.1 введения] или (более подробно) [6].

поясним подробно вывод неравенства, под знаком которого стоит номер формулы (173): в формуле (173), доказанной для всякого $u \in \widehat{f}_m h_{m-1} W_{m-1}$, надо теперь положить $u \in \widehat{f}_m y$ и воспользоваться хорошо известным равенством $\widehat{d}((\widehat{f}_m)^{-1})_{\widehat{f}_m u} = (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y)^{-1}$; в результате из формулы (173) получается неравенство

$$\| (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y)^{-1} \|^{y,\, m-1}_{\widehat{f}_m y,\, m} \leqslant \||(df)^{-1}\||. \qquad (181')$$

Хорошо известно (и легко доказывается) следующее предложение: пусть на R^n задана некоторая норма $|\cdot|$ и пусть оператор $L \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ удовлетворяет неравенству $\| L - I \| < 1$; тогда существует обратный оператор L^{-1} и имеют место формулы

$$L^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (I - L)^k,$$

$$\| L^{-1} \| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \| I - L \|^k = (1 - \| I - L \|)^{-1}. \qquad (182)$$

Применим это предложение к следующей ситуации: на R^n возьмем норму $|\cdot| \underset{\mathrm{def}}{=} |\cdot|_{\widehat{f}_m y,\, m}$, определенную формулой (116), и рассмотрим линейный оператор

$$L \underset{\mathrm{def}}{=} \widehat{d}(\widehat{g}_{m,\,r})_y (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y)^{-1} : R^n \to R^n; \qquad (183)$$

тогда соответствующая норме $|\cdot|_{\widehat{f}_m y,\, m}$ на R^n норма $\| L \|$ оператора $L \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$, согласно формулам (113), (116), есть $\| L \|^{\widehat{f}_m y,\, m}_{\widehat{f}_m y,\, m}$ (но для краткости в трех следующих фразах пишем $\| L - I \|$, $\| L^{-1} \|$ без индексов $\widehat{f}_m y,\, m$). Условие $\| L - I \| < 1$ выполнено в силу формулы (181); более того,

$$\| L - I \| \underset{(183)}{\overset{(181)}{<}} \frac{1}{16} < \frac{1}{2}. \qquad (184)$$

Поэтому оператор L, определенный формулой (183), имеет обратный, норма которого удовлетворяет неравенству

$$\| L^{-1} \| \underset{(184)}{\overset{(182)}{<}} 2. \qquad (185)$$

Из существования L^{-1} следует, что оператор $\widehat{d}(\widehat{g}_{m,\,r})_y : R^n \to R^n$ имеет обратный $(\widehat{d}(\widehat{g}_{m,\,r})_y)^{-1} \underset{(183)}{=} (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y)^{-1} L^{-1}$; имеем

$$\| (\widehat{d}(\widehat{g}_{m,\,r})_y)^{-1} \|^{y,\, m-1}_{\widehat{f}_m y,\, m} \leqslant (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y)^{-1} \|^{y,\, m-1}_{\widehat{f}_m y,\, m} \| L^{-1} \| \underset{(185)}{\overset{(181')}{\leqslant}} 2 \||(df)^{-1}\||.$$

Итак, доказано, что при всяких $r \in (0, \beta)$, $m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$, $y \in h_{m-1} W_{m-1}$ оператор $(\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y)^{-1}$ существует и удовлетворяет неравенству

$$\left\| (\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y)^{-1} \right\|^{y,m-1}_{\widehat{f}_m y,m} \leqslant 2 \left\| \left| (df)^{-1} \right| \right\|. \qquad (186)$$

Так как при всяких $r \in (0, \beta)$, $m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$, $y \in h_{m-1} W_{m-1}$ существует оператор $(\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y)^{-1}$, то в силу фраз, содержащих формулы (80), (82) (поскольку производные координатных отображений h_k в каждой точке — невырожденные (т. е. обратимые) линейные операторы), при всяких $r \in (0, \min\{\bar{s}, \beta\})$, $m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$, $z \in W_{m-1}$ существует оператор $(d(g_r)_z)^{-1}$.

При всяком $r \in (0, \bar{s})$ при всяком $z \in V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}$ имеет место равенство $d(g_r)_z = df_z$ (см. фразу, содержащую формулы (78), (79)). При всяком $z \in V^n$ существует оператор $(df_z)^{-1}$ (так как $f \in S$). Объединив утверждения, содержащиеся в трех предыдущих фразах, получаем: при всяком $r \in (0, \min\{\bar{s}, \beta\})$ при всяком $z \in V^n$ существует оператор $(d(g_r)_z)^{-1}$ (т. е. при всяком $r \in (0, \min\{\bar{s}, \beta\})$, производная $d(g_r)_z$ невырождена при всяком $z \in V^n$.

Пусть даны произвольные $r \in (0, \min\{\bar{s}, \beta\})$, $m \in \{1, ..., \bar{t}\}$. Имеют место включения:

$$f_m h_{m-1} W_{m-1} \underset{(64)}{\subset} \overline{S_q^c(0)}, \tag{187}$$

$$\hat{g}_{m,r} h_{m-1} W_{m-1} \underset{(74)}{\subset} \overline{S_q^c(0)}, \tag{188}$$

$$\overline{S_q^c(0)} \underset{(24)}{\subset} h_m V_m. \tag{189}$$

Имеем (через I обозначаем здесь отображение 1_{Rn}, а множество $\overline{S_q^c(0)}$ обозначается далее (до конца пункта) через S_q):

$$\theta_m \underset{def}{=} \sup_{(u,v) \in S_q \times S_q} \|I\|_{v,m}^{u,m} \underset{(113)}{<} +\infty \tag{190}$$

так как множество S_q компактно, $S_q \subset h_m V_m$ (см. формулу (189)), а функции $g_{ij}^{(m)}(\cdot)$ (см. формулу (40)) непрерывны на множестве $h_m V_m$. При всяком $y \in h_{m-1} W_{m-1}$ имеем

$$\left\|(\hat{d}(\hat{g}_{m,r})_y)^{-1}\right\|_{\hat{g}_{m,r}y,m}^{y,m-1} \leqslant \left\|(\hat{d}(\hat{g}_{m,r})_y)^{-1}\right\|_{\hat{f}_m y,m}^{y,m-1} \|I\|_{\hat{g}_{m,r}y,m}^{\hat{f}_m y,m} \underset{(186)}{\leqslant}$$

$$\underset{(186)}{\leqslant} 2\left\|\left|(df)^{-1}\right|\right\| \cdot \|I\|_{\hat{g}_{m,r}y,m}^{\hat{f}_m y,m} \underset{(190)}{\overset{(187),(188)}{\leqslant}} 2\left\|\left|(df)^{-1}\right|\right\| \theta_m. \tag{191}$$

Заменив в формулах (169) —(173) f_m на $\hat{g}_{m,r}$, u на $\hat{g}_{m,r} y$, f на g_r, $(\hat{f}_m)^{-1} u$ на y, $f^{-1} h_m^{-1} u$ на $h_{m-1}^{-1} y$, ссылку на формулу (38)—ссылкой на формулу (62), получаем при всяком $y \in h_{m-1} W_{m-1}$ равенство

$$\left\|(\hat{d}(\hat{g}_{m,r})_y)^{-1}\right\|_{\hat{g}_{m,r}y,m}^{y,m-1} = \left\|(d(g_r)_{h^{-1}_{m-1}y})^{-1}\right\| \tag{192}$$

(последнее равенство в формуле, полученной из (173) указанными заменами, следует из (62)).

Имеем, далее,

$$\sup_{z \in W_{m-1}} \left\|(d(g_r)_z)^{-1}\right\| \underset{(192)}{\overset{(191)}{\leqslant}} 2\left\|\left|(df)^{-1}\right|\right\| \theta_m. \tag{193}$$

Так как неравенство (193) доказано при всяких $r \in (0, \min\{\bar{s}, \beta\})$, $n \in \{1, ..., \bar{t}\}$, а при всяком $r \in (0, \bar{s})$ при всяком $z \in V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}$ имеет место равенство $d(g_r)_z = df_z$, то при всяком $r \in (0, \min\{\bar{s}, \beta\})$ имеет место неравенство

$$\left\|\left|(dg_r)^{-1}\right|\right\| \leqslant \max\left\{\left\|\left|(df)^{-1}\right|\right\|, 2\left\|\left|(df)^{-1}\right|\right\| \max_{m \in \{1, ..., \bar{t}\}} \theta_m\right\} \underset{(190)}{<} +\infty$$

Утверждение, сформулированное в начале пункта, доказано.

27. Объединим теперь четыре утверждения:

1) утверждение, доказанное в п. 11 (его формулировка составляет содержание последней фразы п. 11);

2) утверждение, доказанное в пп. 17—23 и сформулированное в конце п. 23 в качестве итога пп. 17—23;

3) утверждение, сформулированное и доказанное в п. 25;

4) утверждение, сформулированное и доказанное в п. 26.

Из этих четырех утверждений вытекает следующее. *Найдется* $\overline{\overline{\alpha}} > 0$ $(\overline{\overline{\alpha}} = \min\{\beta, \overline{\alpha}\})$* *такое, что при всяком* $r \in (0, \overline{\overline{\alpha}})$ *отображение* $g_r : V^n \to V^n$, *определенное формулой (62), принадлежит классу* C^1, *является биекцией* V^n на $g_r V^n$, *его производная* $d(g_r)_z$ *в каждой точке* $z \in V^n$ *невырождена и удовлетворяет неравенству*

$$\max\left\{\left\|\left|dg_r\right|\right\|, \left\|\left|(dg_r)^{-1}\right|\right\|\right\} < +\infty$$

В силу утверждения, сформулированного и доказанного в п. ф) доказательства предложения 1 в [7], отсюда следует, что *при всяком* $r \in (0, \overline{\overline{\alpha}})$ *образ* V^n *при отображении* g_r *совпадает с* $V^n : g_r V^n = V^n$.

Свойства отображений g_r, собранные в двух предыдущих фразах, и теорема об обратном отображении (частный случай теоремы о неявной функции) влекут следующее: *при всяком* $r \in (0, \overline{\overline{\alpha}})$ *отображение* g_r, *определенное формулой (62), принадлежит множеству* S (напомним, что определение множества S воспроизведено в п. 24).

28. Так как при всяком $r \in (0, \overline{\overline{\alpha}})$ отображение g_r принадлежит множеству S, то при всяком $r \in (0, \overline{\overline{\alpha}})$ определено расстояние $\tilde{d}_S(f, g_r)$, вычисляемое по формуле (см. [8], формула (B.2.6)):

$$\bar{d}_S(f, g_r) = \sup_{z \in V^n} \inf_{u \in G(fz, g_r z)} \left\{\min\left\{s(u), [1 + \rho(z, x_0)]^{-1}\right\} + \left\|\varphi_u d(g_r)_z - df_z\right\|\right\}$$

(обозначения разъяснены в п. 2.1 введения статьи [8]).

Так как при всяком $z \in V^n$ при всяком $u \in G(fz, g_r z)$ имеет место неравенство

$$\min\left\{s(u), [1 + \rho(z, x_0]^{-1}\right\} \leqslant s(u),$$

то при всяком $r \in (0, \overline{\overline{\alpha}})$ выполнено неравенство

$$\tilde{d}_S(f, g_r) \leqslant \sup_{z \in V^n} \inf_{u \in G(fz, g_r z)} \left\{s(u) + \left\|\varphi_u d(g_r)_z - df_z\right\|\right\}. \quad (194)$$

Из формулы (62) следует, что при всяком $r \in (0, \bar{s})$ при всяком $z \in V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}$ выполнено равенство

$$g_r z = fz; \quad (195)$$

выше было доказано (см. фразу, содержащую формулы (78), (79)), что при всяком $r \in (0, \bar{s})$ при всяком $z \in V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}$ выполнено равенство

$$d(g_r)_z = df_z \quad (196)$$

Для всякой точки z, удовлетворяющей равенству (195), кривая (путь) $u(fz)$, определенная формулой

---

* Напомним, что $\overline{\alpha} \in (0, \bar{s})$ (см. начало п. 21).

$$u_t(fz) \underset{def}{=} \left[u(fz)\right]_t \underset{def}{=} fz \underset{(195)}{=} g_r z \qquad (t \in [0,1]),$$

принадлежит множеству $G(fz, g_r z) = G(fz, fz)$ и удовлетворяет равенствам:

$$s(u(fz)) = 0, \qquad \varphi_{u(fz)} = 1_{\pi^{-1}(fz)}. \tag{197}$$

Пусть $r \in (0, \bar{s})$,

$$z \in V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}. \tag{198}$$

Так как тогда выполнены равенства (195), (196), то

$$\inf_{u \in G(fz, g_r z)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u d(g_r)_z - df_z \right\| \right\} \leqslant s(u(fz)) + \left\| \varphi_{u(fz)} d(g_r)_z - df_z \right\| \underset{(197)}{=}$$

$$\underset{(197)}{=} \left\| d(g_r)_z - df_z \right\| \underset{(196)}{=} 0. \tag{199}$$

Так как функция от $z \in V^n$, стоящая под знаком $\sup\limits_{z \in V^n}$ в правой части неравенства (194), принимает только неотрицательные значения, то из неравенства (199), доказанного при всяком $r \in (0, \bar{s})$ для всякого *z*, удовлетворяющего условию (198), следует равенство

$$\sup_{z \in V^n} \inf_{u \in G(fz, g_r z)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u d(g_r)_z - df_z \right\| \right\} =$$

$$= \max_{m \in \{1, \dots, \bar{t}\}} \sup_{z \in W_{m-1}} \inf_{u \in G(fz, g_r z)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u d(g_r)_z - df_z \right\| \right\} \tag{200}$$

при всяком $r \in (0, \bar{s})$.

29. Напомним одно известное утверждение. Оно состоит в следующем. *Пусть компактное множество K содержится в некоторой координатной окрестности V многообразия* $V^n (h : V \to R^n$ — соответствующее координатное отображение), *удовлетворяющего условиям первого абзаца п. 2.1 введения статьи* [8]. *Тогда для всякого* $\theta > 0$ *найдется* $\aleph_k(\theta) > 0$ *такое, что для всяких точек* $z_1 \in K$, $z_2 \in K$ *для всякой кривой (пути)* $u \in G(z_1, z_2)$, *лежащей в K и имеющей длину* $s(u) < \aleph_k(\theta)$, *имеет место неравенство*

$$\left\| \eta_{hz_1} \varphi_u \eta_{hz_2}^{-1} - 1_{R^n} \right\|_c < \theta. \tag{201}$$

Здесь $\eta_y \underset{\text{def}}{=} \tau_y^{[n]} dh_{h^{-1}y}$ (обозначение $\tau_y^{[n]}$ объяснено в п. 6), $\|L\|_c \underset{\text{def}}{=} \sup\limits_{a \in R^n_*} \left\{ |La|_c (|a|_c)^{-1} \right\}$ для всякого $L \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ (обозначение $|\cdot|_c$ объяснено в сноске к п. 5).

Сформулированное утверждение в силу формулы (33) [7] есть непосредственное следствие утверждения, доказанного в п. к) доказательства предложения 1 [7] (это утверждение сформулировано в конце названного пункта).

30. При всяких $r \in (0, \bar{s})$, $m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$ имеют место включения:

$$fW_{m-1} \underset{(29)}{\overset{(27)}{\subset}} V_m, \tag{202}$$

$$g_r W_{m-1} \underset{(63)}{\overset{(62)}{\subset}} V_m. \tag{203}$$

При всяких $r \in (0, \bar{s})$, $m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$, $z \in W_{m-1}$, $u \in G(fz, g_r z)$ имеем ($h_m fz$, $h_m g_r z$ определены, так как имеют место включения (202), (203)):

$$\varphi_u d(g_r)_z - df_z = \eta_{m, h_m fz}^{-1} \Big[(\eta_{m. h_m fz} \varphi_u \eta_{m, h_m g_r z}^{-1} -$$

$$-1_{R^n}) \eta_{m, h_m g_r z} (d(g_r)_z) \eta_{m-1, h_{m-1} z}^{-1} + \eta_{m, h_m g_r z} (d(g_r)_z) \eta_{m-1, h_{m-1} z}^{-1} -$$

$$-\eta_{m, h_m fz} (df_z) \eta_{m-1, h_{m-1} z}^{-1} \Big] \eta_{m-1, h_{m-1} z} \tag{204}$$

(напомним, что отображения $\eta_{k,y}$ определены формулой (41)). При всяких $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,...,\overline{t}\}$, $z\in W_{m-1}$ имеет место равенство:

$$\eta_{m,h_m fz}(df_z)\eta^{-1}_{m-1,h_{m-1}z}=\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{h_{m-1}z}, \tag{205}$$

в самом деле,

$$\eta_{m,h_m fz}(df_z)\eta^{-1}_{m-1,h_{m-1}z}\underset{(41)}{=}\tau^{[n]}_{h_m fz}d(h_m)_{fz}(df_z)(d(h_{m-1})_z)^{-1}(\tau^{[n]}_{h_{m-1}z})^{-1}\underset{(38)}{=}$$

$$\underset{(38)}{=}\tau^{[n]}_{h_m fz}d(\widehat{f}_m)_{h_{m-1}z}(\tau^{[n]}_{h_{m-1}z})^{-1}\overset{(38)}{\underset{(82)}{=}}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{h_{m-1}z};$$

заменив в этих выкладках f на g_r, f_m на $\widehat{g}_{m,r}$ и заменив ссылку на формулу (38) ссылкой на формулу (62), получаем равенство

$$\eta_{m,h_m g_r z}(d(g_r)_z)\eta^{-1}_{m-1,h_{m-1}z}=\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_{h_{m-1}z} \tag{206}$$

(при всяких $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,...,\overline{t}\}$, $z\in W_{m-1}$).

При всяких $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,...,\overline{t}\}$, $z\in W_{m-1}$, $u\in G(fz,g_r z)$ из равенства (204) в силу равенств (205), (206) следует равенство

$$\varphi_u d(g_r)_z-df_z=\eta^{-1}_{m,h_m fz}\Big[(\eta_{m,h_m fz}\varphi_u\eta^{-1}_{m,h_m g_r z}-$$

$$-1_{R^n})\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y+\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y-\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y]\eta_{m-1,y}, \tag{207}$$

где

$$y\underset{\mathrm{def}}{=}h_{m-1}z, \tag{208}$$

$$h_m fz\overset{(38)}{\underset{(208)}{=}}f_m y. \tag{209}$$

При всяких $r\in(0,\overline{s})$, $m\in\{1,...,\overline{t}\}$, $z\in W_{m-1}$, $u\in G(fz,g_r z)$ имеем (определив y формулой (208))

$$\|\varphi_u d(g_r)_z-df_z\|\underset{\mathrm{def}}{=}\sup_{\mathfrak{X}\in\pi_*^{-1}(z)}\{[\delta((\varphi_u d(g_r)_z-df_z)\mathfrak{X},(\varphi_u d(g_r)_z-$$

$$-df_z)\mathfrak{X}]^{\frac{1}{2}}\left[\delta(\mathfrak{X},\mathfrak{X})\right]^{-\frac{1}{2}}\}=\sup_{\mathfrak{X}\in\pi_*^{-1}(z)}\{[g^{(m)}_{ij}(h_m fz)(\eta_{m,h_m fz}(\varphi_u d(g_r)_z-$$

$$-df_z)\eta^{-1}_{m-1,y}\eta_{m-1,y}\mathfrak{X})^i(\eta_{m,h_m fz}(\varphi_u d(g_r)_z-$$

$$-df_z)\eta^{-1}_{m-1,y}\eta_{m-1,y}\mathfrak{X})^i]^{\frac{1}{2}}[g^{(m-1)}_{ij}(y)(\eta_{m-1,y}\mathfrak{X})^i(\eta_{m-1,y}\mathfrak{X})^i]^{-\frac{1}{2}}\}\underset{(113)}{=}$$

$$\underset{(113)}{=}\left\|\eta_{m,h_m fz}(\varphi_u d(g_r)_z-df_z)\eta^{-1}_{m-1,y}\right\|^{h_m fz,m}_{y,m-1}\overset{(207)}{\underset{(209)}{=}}$$

$$\overset{(207)}{\underset{(209)}{=}}\left\|(\eta_{m,h_m fz}\varphi_u\eta^{-1}_{m,h_m g_r z}-1_{R^n})\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y-\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y\right\|^{\widehat{f}_m y,m}_{y,m-1}\leqslant$$

$$\leqslant\|I\|^{\widehat{f}_m y,m}_c\left\|\eta_{m,h_m fz}\varphi_u\eta^{-1}_{m,h_m g_r z}-1_{R^n}\right\|_c\times$$

$$\times\|I\|^c_{\widehat{f}_m y,m}\left\|\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y\right\|^{\widehat{f}_m y,m}_{y,m-1}+\left\|\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r}-\widehat{f}_m)_y\right\|^{\widehat{f}_m y,m}_{y,m-1}, \tag{210}$$

где

$$\|I\|^{u,m}_c\underset{\mathrm{def}}{=}\sup_{a\in R^n_*}\left\{|a|_{u,m}(|a|_c)^{-1}\right\},\|I\|^c_{u,m}\underset{def}{=}\sup_{a\in R^n_*}\left\{|a|_c(|a|_{u,m})^{-1}\right\}.$$

Напомним, что норма $|a|_{u,m}$ определена формулой (116). При написании в формуле (210) равенства, помеченного номером формулы (113), использовано, кроме самой формулы (113), еще и равенство $\eta_{m-1,y}\pi_*^{-1}(z)=R_*^n$, вытекающее из определения отображений $\eta_{m-1,y}$(см. формулу (41)) в силу невырожденности линейных отображений $\tau_y^{[n]}$ и $d(h_{m-1})_z)$.

При всяком $m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}$ имеем

$$P_{1,m}\underset{\text{def}}{=}\sup_{u\in S_q^c(0)}\left\|I\right\|_c^{u,m}<+\infty, \tag{211}$$

$$P_{2,m}\underset{\text{def}}{=}\sup_{u\in \overline{S_q^c(0)}}\left\|I\right\|_c^{u,m}<+\infty, \tag{212}$$

так как функции $g_{ij}^{(m)}(\cdot):h_mV_m\to R$ непрерывны, а $\overline{S_q^c(0)}$ —компактнее множество, причем $\overline{S_q^c(0)}\underset{(24)}{\subset}h_mV_m$.

Положим

$$P\underset{\text{def}}{=}\max_{k\in\langle 1,2\rangle,m\in\langle 1,...,\bar{t}\rangle}P_{k,m}. \tag{213}$$

При всяких $r\in(0,\bar{s})$, $m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}$, $z\in W_{m-1}$ (определив y формулой (208)) имеем

$$\left\|\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m}\leqslant\left\|\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m}+\left\|\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r}-\widehat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m} \tag{214}$$

При всяких $m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}$, $z\in W_{m-1}$ (определив y формулой (208)) имеем:

$$\left\|\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m}\underset{(113)}{=}\sup_{a\in R_*^n}\{[g_{ij}^{(m)}(\widehat{f}_m y)(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y a)^i(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y a)^i]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times[g_{ij}^{m-1}(y)a^ia^j]^{-\frac{1}{2}}\}\underset{(40)}{=}\sup_{a\in R_*^n}\{[\delta(\eta_{m,\widehat{f}_m y}^{-1}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y a,\eta_{m,\widehat{f}_m y}^{-1}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y a)]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times[\delta(\eta_{m-1,y}^{-1}a,\eta_{m-1,y}^{-1}a)]^{-\frac{1}{2}}\}, \tag{215}$$

$$\eta_{m,\widehat{f}_m,y}^{-1}\underset{(41)}{=}(d(h_m)_{h_m^{-1}\widehat{f}_m y})^{-1}(\tau_{\widehat{f}_m y}^{[n]})^{-1}, \tag{216}$$

$$\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y\underset{(82)}{=}\tau_{\widehat{f}_m y}^{[n]}d(\widehat{f}_m)_y(\tau_{\widehat{f}_m y}^{[n]})^{-1}, \tag{217}$$

$$\eta_{m,\widehat{f}_m y}^{-1}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y\overset{(216)}{\underset{(217)}{=}}(d(h_m)_{h_m^{-1}\widehat{f}_m y})^{-1}d(\widehat{f}_m)_y(\tau_y^{[n]})^{-1}\underset{(38)}{=}$$

$$\underset{(38)}{=}df_{h_{m-1}^{-1}y}d(h_{m-1}^{-1})_y(\tau_y^{[n]})^{-1}\underset{(41)}{=}df_{h_{m-1}^{-1}y}\eta_{m-1,y}^{-1}, \tag{218}$$

$$\left\|\widehat{d}(\widehat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m}\overset{(215)}{\underset{(218)}{=}}\sup_{a\in R_*^n}\{[\delta(df_{h_{m-1}^{-1}y}\eta_{m-1,y}^{-1}a,df_{h_{m-1}^{-1}y}\eta_{m-1,y}^{-1}a)]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times[\delta(\eta_{m-1,y}^{-1}a,\eta_{m-1,y}^{-1}a)]^{-\frac{1}{2}}\}\underset{(41)}{=}\sup_{\text{Ј}\in\pi_*^{-1}(h_{m-1}^{-1}y)}\{[\delta(df_{h_{m-1}^{-1}y}\text{ӕ},df_{h_{m-1}^{-1}y}\text{ӕ})]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times[\delta(\text{ӕ},\text{ӕ})]^{-\frac{1}{2}}\}=\left\|df_{h_{m-1}^{-1}y}\right\|\leqslant\left\|\left|df\right|\right\|. \tag{219}$$

При всяких $r\in(0,\bar{s})$, $m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}$, $z\in W_{m-1}$ (определив y формулой (208)) имеем

$$\left\|\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r})_y\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m}\overset{(214)}{\underset{(219)}{\leqslant}}\left\|\left|df\right|\right\|+\left\|\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r}-\widehat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m}. \tag{220}$$

При всяких $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $z \in W_{m-1}$ имеем (положив, как и в формуле (208), $y = h_{m-1}z$) $f_m y \underset{(208)}{=} f_m h_{m-1} z \underset{(64)}{\in} \overline{S_q^c(0)}$, откуда в силу (211) —(213) следуют неравенства

$$\|I\|_c^{\hat{f}_m y, m} \leqslant P, \tag{221}$$

$$\|I\|_{\hat{f}_m y, m}^c \leqslant P, \tag{222}$$

При всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $z \in W_{m-1}$ $u \in G(fz, g_r z)$ имеем (определив y формулой (208))

$$\|\varphi_u d(g_r)_z - df_z\| \underset{(220)-(222)}{\overset{(210)}{\leqslant}} P^2(\|\|df\|\| +$$

$$+\left\|\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m})\left\|\eta_{m,h_m fz}\varphi_u \eta^{-1}_{m,h_m g_r z} - 1_{R^n}\right\|_c +$$

$$+\left\|\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m}. \tag{223}$$

31. Положим

$$\bar{\theta} \underset{\text{def}}{=} 20\bar{\delta}(1+20\bar{\delta})^{-1}P^{-2}. \tag{224}$$

При всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ для компактного множества $K_m \subset V_m$, определенного формулой (92), возьмем (опираясь на утверждение п. 29) число $\aleph K_m(\bar{\theta}) > 0$ такое, что для всяких точек $z_1 \in K_m$, $z_2 \in K_m$ для всякой кривой (пути) $u \in G(z_1, z_2)$, лежащей в K_m и имеющей длину $s(u) < \aleph K_m(\bar{\theta})$, имеет место неравенство

$$\left\|\eta_{m,h_m z_1}\varphi_u \eta^{-1}_{m,h_m z_2} - 1_{R^n}\right\|_c \underset{(201)}{\overset{(41)}{<}} \bar{\theta}. \tag{225}$$

Положим

$$\aleph \underset{def}{=} \min_{m\in\{1,...,\bar{t}\}} \aleph_{K_m}(\bar{\theta}) > 0 \tag{226}$$

Возьмем $\omega \in (0,\bar{\bar{\alpha}})$ (напомним, что $\bar{\bar{\alpha}} = \min\{\beta, \bar{\alpha}\}$, где $\bar{\alpha} \in (0,\bar{s})$ (см. начало п. 21), а число β>0 таково, что при всяком $r \in (0,\beta)$ имеют место неравенства (111), (112)) такое, что*

$$\chi(\omega) < \min\left\{\aleph, \frac{1}{4}\varepsilon, \frac{1}{4}\varepsilon_1\right\}, \tag{227}$$

где $\chi(\cdot):(0,\bar{s}) \to \mathbf{R}^+$— функция, обладающая свойствами, указанными в формулировке утверждения п. 14 (одно из этих свойств: $\chi(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$, поэтому нужное $\omega \in (0,\bar{\bar{\alpha}})$ существует).

При всяких $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $z \in W_{m-1}$ возьмем кривую (путь) $v(\omega, z) \in G(fz, g_\omega z)$, лежащую в K_m и удовлетворяющую неравенству

$$s(v(\omega,z)) \leqslant \chi(\omega) \tag{228}$$

(такая кривая существует в силу утверждения п. 14).

Таким образом, при всяких $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $z \in W_{m-1}$ кривая (путь) $v(\omega,z) \in G(fz, g_\omega z)$ лежит в K_m и имеет длину

---

* Числа $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ определены в п. 2.

$$s(v(\omega,z)) \underset{(228)}{\leqslant} \chi(\omega) \underset{(227)}{<} \min\left\{\aleph, \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}, \frac{1}{4}\varepsilon_1\right\} \underset{(226)}{\leqslant}$$

$$\underset{(226)}{\leqslant} \min\left\{\aleph_{K_m}(\bar{\theta}), \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}, \frac{1}{4}\varepsilon_1\right\}, \tag{229}$$

следовательно, имеет место неравенство

$$\left\|\eta_{m,h_m fz}\varphi_{v(\omega,z)}\eta^{-1}_{m,h_m g_\omega z} - 1_{R^n}\right\|_c \underset{(225)}{<} \bar{\theta}. \tag{230}$$

При всяких $m \in \left\{1,...,\bar{t}\right\}$, $z \in W_{m-1}$ имеем (определив y формулой (208))

$$\left\|\varphi_{v(\omega,z)}d(g_\omega)_z - df_z\right\| \underset{(223)}{\leqslant} P^2(\left\|df\right\| +$$

$$+\left\|\hat{d}(\hat{g}_{m,\omega} - \hat{f}_m)_y\right\|^{\hat{f}_m y,m}_{y,m-1})\left\|\eta_{m,h_m fz}\varphi_{v(\omega,z)}\eta^{-1}_{m,h_m g_\omega z} - 1_{R^n}\right\|_c +$$

$$+\left\|\hat{d}(\hat{g}_{m,\omega} - \hat{f}_m)_y\right\|^{\hat{f}_m y,m}_{y,m-1} \overset{(111)}{\underset{(230)}{\leqslant}} P^2(\left\|df\right\| + 20\bar{\delta}\left\|df\right\|)\bar{\theta} + 20\bar{\delta}\left\|df\right\| \underset{(224)}{=}$$

$$\underset{(224)}{=} 40\bar{\delta}\left\|df\right\| \underset{(5)}{<} \frac{1}{2}\min\{\bar{\varepsilon}, \varepsilon_1\}. \tag{231}$$

Так как $v(\omega,z) \in G(fz, g_\omega z)$ при всяких $m \in \left\{1,...,\bar{t}\right\}$, $z \in W_{m-1}$, то имеет место неравенство

$$\max_{m\in\{1,...,\bar{t}\}} \sup_{z\in W_{m-1}} \inf_{u\in G(fz,g_\omega z)} \{s(u) + \left\|\varphi_u d(g_\omega)_z - df_z\right\|\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{m\in\{1,...,\bar{t}\}} \sup_{z\in W_{m-1}} \{s(v(\omega,z)) + \left\|\varphi_{v(\omega,z)}d(g_\omega)_z - df_z\right\|\} \overset{(229)}{\underset{(231)}{\leqslant}}$$

$$\overset{(229)}{\underset{(231)}{\leqslant}} \frac{1}{4}\min\{\bar{\varepsilon}, \varepsilon_1\} + \frac{1}{2}\min\{\bar{\varepsilon}, \varepsilon_1\} < \min\{\bar{\varepsilon}, \varepsilon_1\}. \tag{232}$$

Имеем

$$\tilde{d}_S(f, g_\omega) \overset{(194)}{\underset{(200)}{\leqslant}} \max_{m\in\{1,...,\bar{t}\}} \sup_{z\in W_{m-1}} \inf_{u\in G(fz,g_\omega z)} \{s(u) +$$

$$+\left\|\varphi_u d(g_\omega)_z - df_z\right\|\} \underset{(232)}{<} \min\{\bar{\varepsilon}, \varepsilon_1\}. \tag{233}$$

32. *Положим*

$$b' \underset{\text{def}}{=} (g_\omega, x). \tag{234}$$

Так как (см. последнюю фразу п. 27) $g_\omega \in S$ (поскольку $\omega \in (0, \bar{\bar{\alpha}})$), $x \in V^n$, то $b' \in B$ (напомним, что $\mathrm{B} = \mathrm{S} \times V^n$, согласно формуле (1.1) [8]).

Имеем

$$\hat{d}_B(b, b') \overset{(1)}{\underset{(234)}{=}} \hat{d}_B((f,x),\ (g_\omega, x)) = \hat{d}_S(f, g_\omega) \underset{(233)}{<} \min\{\bar{\varepsilon}, \varepsilon_1\} \tag{235}$$

(второе равенство в этой цепочке следует из формулы (1.2') [8]), следовательно,

$$b' \in W_{\bar{\varepsilon}, \tilde{d}_B}(b) \subset W(b) \tag{236}$$

(см. п. 2).

В силу определения отображения $\chi : B \to B$ (см. $[8]$, фраза, содержащая формулу (1.5)) имеем

$$\chi^k b' \underset{(234)}{=} \chi^k(g_\omega, x) = (g_\omega, g^k_\omega x) \tag{237}$$

для всякого $k \in N \bigcup \{0\}$. Для всякого $k \in \left\{0,...,\bar{t}\right\}$ имеет место равенство

$$g_\omega^h x \underset{(89)}{=} f^k x \tag{238}$$

Для всякого $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ имеем

$$x^k b' \underset{(237)}{=} (g_\omega, g_\omega^h x) \underset{(238)}{=} (g_\omega, f^h x), \tag{239}$$

$$\chi^k b \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} (f, f^k x) \tag{240}$$

Так как $p = 1_S \times \pi$ (см. формулу (1.1) статьи [8]), то при всяком $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ имеют место равенства:

$$p^{-1}(\chi^k b') \underset{(239)}{=} (g_\omega \pi^{-1}(f^k x)), \tag{241}$$

$$p^{-1}(\chi^k b) \underset{(240)}{=} (f, \pi^{-1}(f^h x)). \tag{242}$$

При всяких $k \in \{0,...,\bar{t}\}$, $\mathfrak{h} \in \pi^{-1}(f^k x)$ положим

$$\psi_k(g_\omega, \eta) \underset{def}{=} (f, \eta); \tag{243}$$

так как при всяком $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ имеют место равенства (241), (242), то формула (243) определяет при всяком $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ отображение

$$\psi_k : p^{-1}(\chi^k b') \to p^{-1}(\chi^k b). \tag{244}$$

Из формул (241) — (243) следует в силу определения векторного расслоения (E, p, B) и римановой метрики Δ на нем, приведенного в п. 1 § 1 статьи [8], что при всяком $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ отображение (244), определенное формулой (243), является изоморфизмом слоя $p^{-1}(\chi^k b')$ (как евклидово пространство) на слой $p^{-1}(\chi^k b)$ (как евклидово пространство) .

При всяком $i \in \{1,...,n\}$ имеем

$$\psi_0^{-1}\xi_i \underset{(4)}{=} \varphi_0^{-1}(f, \mathfrak{x}_i) \underset{(243)}{=} (g_\omega, \mathfrak{x}_i). \tag{245}$$

Так как $\tilde{d}_s(f, g_\omega) \underset{(233)}{<} \varepsilon_1$, то в силу определения числа ε_1 (см. п. 2) при всяком $i \in \{1,...,n\}$ имеет место включение

$$(g_\omega, \mathfrak{x}_i) \in U(\xi_i). \tag{246}$$

При всяком $i \in \{1,...,n\}$ имеет место включение

$$\psi_0^{-1}\xi_i \overset{(245)}{\underset{(246)}{\in}} U(\xi_i). \tag{247}$$

В силу определения отображения $X : E \to E$ (см. [8], фраза, содержащая формулу (1.4)) при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ для сужения $X\left[\chi^{m-1}b'\right]$ на слой $p^{-1}(\chi^{m-1}b') \underset{(241)}{=} (g_\omega, \pi^{-1}(f^{m-1}x))$ отображения X имеет место формула

$$X[\chi^{m-1}b'](g_\omega, \mathfrak{x}) = X(g_\omega, \mathfrak{x}) = (g_\omega, (dg_\omega)\mathfrak{x}) \tag{248}$$

для всякого $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(f^{m-1}x)$. При всяких $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(f^{m-1}x)$ имеем

$$(dg_\omega)\mathfrak{x} \underset{(89)}{\in} \pi^{-1}(f^m x), \tag{249}$$

$$\psi_m X\left[\chi^{m-1}b'\right](g_\omega, \mathfrak{x}) \underset{(248)}{=} \psi_m(g_\omega, (dg_\omega)\mathfrak{x} \overset{(243)}{\underset{(249)}{=}} (f, (dg_\omega)\mathfrak{x}). \tag{250}$$

При всяких $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(f^{m-1}x)$ имеем

$$Y_m\psi_{m-1}(g_\omega,\mathfrak{x}) \underset{(243)}{=} Y_m(f,\mathfrak{x}) \underset{(10)}{=} (f,Z_m\mathfrak{x}) \underset{(90)}{=} (f,d(g_\omega)\mathfrak{x}). \tag{251}$$

Так как при всяком $k\in\{0,...,\bar{t}\}$ имеет место равенство (241), то из того, что при всяких $m\in\{1,...,\bar{t}\}$, $\mathfrak{x}\in\pi^{-1}(f^{m-1}x)$ имеют место равенства (250), (251), следует, что при всяком $m\in\{1,...,\bar{t}\}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\chi^{m-1}b') \arrow[r, "{X[\chi^{m-1}b']}"] \arrow[d, "\varphi_{m-1}"] & p^{-1}(\chi^{m}b') \arrow[d, "\varphi_m"] \\ p^{-1}(\chi^{m-1}b') \arrow[r, "Y_m"] & p^{-1}(\chi^{m}b') \end{tikzcd} \tag{252}$$

коммутативна.

Подведем итог. Указана точка $b'\in W(b)$ (см. формулы (234) ,(236)). Для всякого $k\in\{0,...,\bar{t}\}$ построен изоморфизм слоев (как евклидовых пространств) $\psi_k : p^{-1}(\chi^k b')\to p^{-1}(\chi^k b)$ (см. формулу (244) и следующую за ней фразу), причем выполнены следующие требования:

i) $\psi_0^{-1}\xi_i\in U(\xi_i)$ *при всяком* $i\in\{1,...,n\}$ (см. фразу, содержащую формулу (247));

ii) при всяком $m\in\{1,...,\bar{t}\}$ диаграмма (252) коммутативна.

Лемма 1 доказана.

В соответствии с замечанием 2, приведенным в конце § 1 статьи [8], можно в конструкции [8, § 1] заменить пространство (S, d_S) пространством (S_j, d_1), где j— произвольный элемент множества S; как доказано в [5, п. 6], топология, индуцируемая на S метрикой $d_1(\cdot,\cdot)$, совпадает с топологией, индуцируемой на S метрикой $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, определение которой воспроизведено в цитируемом замечании в [8].

Лемма 2. *Для всякого* $j\in S$ *семейство морфизмов*

$$\big(X(m),\chi(m)\big):(E,p,B)\to(E,p,B)\quad (m\in N),$$

построенное в *[*8, § 1, замечание 2*],* исходя из многообразия V^n класса C^3 с римановой метрикой $\delta(\cdot,\cdot)$ класса C^2, является насыщенным.

Доказательство. Пусть дано $j\in S$. Внесем в доказательство леммы 1 следующие изменения:

1) в пп. 1, 2, 32 Заменим S на S_j, $\tilde{d}_S$ на $\tilde{d}_1$, опустим первую фразу п. 28;

2) левую часть неравенства (194) заменим на $\tilde{d}_1(f,g_r)$ (тогда нестрогое неравенство (194) останется верным: оно превратится в равенство (согласно формуле (56) статьи [6]));

3) левую часть первого неравенства цепочки (233) заменим на $\tilde{d}_1(f,g_\omega)$; принадлежность отображения g_ω множеству S_j вытекает из так измененной цепочки (233) (назовем так измененную цепочку (233 mod)), потому что $f\in S_j$, $g_\omega\in S$; в самом деле,

$$\sup_{z\in V^n}\rho(g_\omega z, jz)\leqslant \sup_{z\in V^n}\rho(fz, jz)+\sup_{z\in V^n}\rho(fz, g_\omega z),$$

$$\sup_{z\in V^n}\rho(fz, jz)<+\infty \text{ (так как } f\in S_j),$$

$$\sup_{z\in V^n}\rho(fz, g_\omega z)\leqslant \sup_{z\in V^n}\inf_{u\in G(fz,g_\omega z)}\left\{s(u)+\left\|\varphi_u d(g_\omega)_z - df_z\right\|\right\} =$$

$$=\widetilde{d}_1(f, g_\omega)\underset{(233\,\mathrm{mod})}{<}+\infty.$$

Указанные изменения* превращают доказательство леммы 1 в доказательство леммы 2. Лемма 2 доказана.

§ 2. ТЕОРЕМЫ

В силу лемм, доказанных в предыдущем параграфе, семейства морфизмов

$$(X(m),\chi(m)):(E,p,B)\to(E,p,B)\quad (m\in N),$$

построенные в [8, § 1]** и в [8, § 1, замечание 2], удовлетворяют условиям теоремы статьи [4]. Ниже приводятся формулировки теоремы статьи [4] применительно к семействам морфизмов, построенным в [8, § 1] и в [8, § 1, замечание 2]. Эти формулировки даются так, чтобы их можно было понять, не заглядывая ни в § 1, ни в предыдущие статьи цикла. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие. Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f:V^n\to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x\in V^n}\max\left\{\left\|df_x\right\|,\left\|(df_x)^{-1}\right\|\right\}<+\infty.$$

В множестве S определяется расстояние

$$\widetilde{d}(f,g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{\min\left\{s(u),\left[1+\rho(x,x_0)\right]^{-1}\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\|\varphi_u dg_x - df_x\right\|\right\};$$

здесь x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n; $G(y,z)$ — множество всех кусочно-гладких кривых (путей) u, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; $s(u)$ — длина кривой (пути) u; $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние между точками многообразия V^n; φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль кривой (пути) u.

Для всяких $f\in S$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\dots,n\}$ показатель Ляпунова определяется формулой

$$\lambda_{n-k+1}(f,x)=\min_{R^k\in G_k(T_xV^n)}\ \max_{\mathfrak{x}\in R^k_*}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|df^m\mathfrak{x}\right|,$$

где $G_h(T_xV^n)$ — множество всех k-мерных векторных подпространств касательного пространства T_xV^n многообразия V^n в точке $x, R^k_*=R^k\setminus\{0\}$.

Через $S\times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $\widetilde{d}(\cdot,\cdot)$) и топологического пространства V^n.

* Сведения из [8], на которые имеются ссылки, будем понимать с изменениями, указанными в [8, замечание 2 в конце § 1].

** Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика – классу C^2.

Теорема. *В пространстве* $S\times V^n$ *найдется всюду плотное множество* C *типа* G_δ *такое, что для всяких* $(f,x)\in C$, $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ *имеет место альтернатива: либо* $\lambda_{n-k}(f,x)=\lambda_{n-k+1}(f,x)$, *либо подпространство*

$$l^k(f,x)\underset{\text{def}}{=}E\left\{\mathfrak{x}\in T_xV^n:\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|df^m\mathfrak{x}\right|\leqslant\lambda_{n-k+1}(f,x)\right\}$$

интегрально отделено от своего алгебраического дополнения l^{n-k} *в пространстве* T_xV^n, *т. е. существуют числа* $\alpha>0$, $\beta>0$ *такие, что для всяких* $\mathfrak{x}\in l^{n-k}$, $\mathfrak{y}\in l^k(f,x)$ *и всяких целых чисел* $t\geqslant s\geqslant 0$ *выполнено неравенство*

$$\left|df^t\mathfrak{x}\right|\cdot\left|df^s\mathfrak{y}\right|\geqslant\alpha\left\{\exp\left[\beta(t-s)\right]\right\}\left|df^s\mathfrak{x}\right|\cdot\left|df^t\mathfrak{y}\right|.$$

Замечание 1. Если V^n компактно (т. е. V^n — замкнутое многообразие), то метрика $\tilde{d}(\cdot\,,\,\cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_1(\cdot\,,\,\cdot)$, определяемая формулой

$$\tilde{d}_1(f,g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{s(u)+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|\right\}.$$

Замечание 2. Пусть $V^n=E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\tilde{d}(\cdot\,,\,\cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{\tilde{d}}(\cdot\,,\,\cdot)$, определяемая формулой*: $\tilde{\tilde{d}}(f,g)=\left|fx_0-gx_0\right|+\sup_{x\in E^n}\left\|df_x-dg_x\right\|$.

Для всякого $j\in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов ***f***, удовлетворяющих условию $\sup_{x\in V^n}\rho(fx,jx)<+\infty$ (если V^n компактно (т. е. замкнутое многообразие), то $S_j=S$ для всякого $j\in S$).

Через $\tilde{d}_1$ обозначается расстояние в S_j, определяемое формулой

$$\tilde{d}_1(f,g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{s(u)+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|\right\}.$$

Через $S_j\times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_{jj} (с топологией, индуцированной метрикой $\tilde{d}_1(\cdot\,,\,\cdot)$) и топологического пространства V^n.

Для всякого $j\in S$ имеет место следующая

Теорема*j*. В пространстве $S_j\times V^n$ найдется всюду плотное множество C_j типа G_δ такое, что для всяких $(f,x)\in C_j$, $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ имеет место альтернатива: либо $\lambda_{n-k}(f,x)=\lambda_{n-k+1}(f,x)$, либо подпространство

$$l^k(f,x)\underset{def}{=}E\left\{\mathfrak{x}\in T_xV^n:\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|df^m\mathfrak{x}\right|\leqslant\lambda_{n-k+1}(f,x)\right\}$$

---

* В случае $V^n=E^n$ касательные пространства стандартным образом отождествляются с E^n; после этого отождествления разность df_x-dg_x (и норма этой разности) приобретает смысл.

интегрально отделено от своего алгебраического дополнения l^{n-k} в пространстве $T_x V^n$, т. е. существуют числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{n-k}, \mathfrak{y} \in l^k(f, x)$ и всяких целых чисел $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\left|df^t \mathfrak{X}\right| \cdot \left|df^s \mathfrak{y}\right| \geqslant \alpha \left\{\exp\left[\beta(t-s)\right]\right\} \left|df^s \mathfrak{X}\right| \cdot \left|df^t \mathfrak{y}\right|.$$

Замечание. Пусть $V^n = E^n$. Тогда формула, определяющая расстояние $\widetilde{d}_1(\cdot\,,\,\cdot)$, записывается в виде: $\widetilde{d}_1(f, g) = \sup\limits_{x \in E^n}\left(\left|fx - gx\right| + \left\|df_x - dg_x\right\|\right)$.

Литература

1. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408—1416.
2. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. II. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1587—1598.
3. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 10, с. 1766—1785.
4. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IV. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 3, с. 431—468.
5. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. V.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1394—1410.
6. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VI.—Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 804—821.
7. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VII.—Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 957—978.
8. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VIII.—Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 8, с. 1330—1345.
9. Х ь ю з м о л л е р Д. Расслоенные пространства.—М.: Мир, 1970.
10. Л е н г С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий.—М.: 1967.

Московский государственный университет
им.М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
15 марта 1982