БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. VIII

Введение*

1.1. Пусть (E, p, B) —векторное расслоение со слоем R^n и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot,\cdot)$). На векторном расслоении (E, p, B) фиксируем некоторую риманову метрику (см. [8], с. 58—59).

1.2. Пусть (X, χ) — автоморфизм векторного расслоения (E, p, B) ** Потребуем, чтобы существовала функция $a(\cdot): B \to R^+$ такая, что для всякого $b \in B$ имеют место равенство

$$a(\chi^b) = a(b) \tag{B.1.1}$$

и неравенство***

$$\max\left\{\|X(b)\|, \left\|\left[X[b]\right]^{-1}\right\|\right\} \leqslant \exp(a(b)). \tag{B.1.2}$$

1.3. Пусть выполнены все условия предыдущих пунктов. При всяком $m \in N$ положим

$$(X(m), \chi(m)) \underset{def}{=} (X^m, \chi^m). \tag{B.1.3}$$

Полученное таким образом семейство морфизмов $(X(m), \chi(m))$ $(m \in N)$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ удовлетворяет следующему условию, сформулированному во введении к каждой из статей [1—4]: существует функция $a(\cdot): B \to R^+$ такая, что для всяких $b \in B,\ m \in N$ имеет место неравенство

$$\max\left\{\|X(m,b)\|, \left\|\left[X(m,b)\right]^{-1}\right\|\right\} \leqslant \exp(ma(b)) \tag{B.1.4}$$

(где через $X(m,b)$ обозначено сужение на слой $p^{-1}(b)$ отображения $X(m)$ для $X(m) = X^m$ вместо $X(m,b)$ пишем $X^m[b]$).

Более того, так определенное семейство морфизмов $(X(m), \chi(m))$ $(m \in N)$ удовлетворяет условиям а)—в), сформулированным в начале § 3 [4]; напомним здесь содержание этих условий:

а) $(X, \chi) \underset{\mathrm{def}}{=} (X(1), \chi(1))$ - автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$;

б) при всяком $m \in N$ имеют место равенства

$$X(m) = X^m, \chi(m) = \chi^m; \tag{B.1.5}$$

в) существует функция $a(\cdot): B \to R^+$ такая, что

$$a(\chi^m b) = a(b) \quad \text{при всяких } b \in B, m \in Z \tag{B.1.6}$$

(как и в § 3 [4], полагаем, согласно стандартному определению, $\chi_0 \underset{\mathrm{def}}{=} 1_B, \chi^{-m} \underset{\mathrm{def}}{=} (\chi^{-1})^m$ при $m \in N$, и такая, что при всяком $b \in B$ имеет место неравенство (В. 1.2).

1.4. Докажем утверждения, сформулированные в предыдущем пункте. Условие а) (см. п. 1.3) уже наложено в п. 1.2 (где сказано, что (X, χ) — автоморфизм векторного расслоения

---

* Эта статья продолжает цикл [1—7]; наиболее тесно связана со статьями [1, 3, 6, 7] этого цикла. Во введении напоминаются обозначения и утверждения этих статей, используемые в § 1. Формулировки результатов приведены в § 2. Эти формулировки можно понять, не читая введение и § 1.

** Напомним, что это означает следующее: X —гомеоморфизм E на E, χ —гомеоморфизм B на B, выполнено равенство $pX = \chi p$, и при всяком $b \in B$ сужение $X[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $p^{-1}(\chi b)$.

*** Норма линейного отображения слоя на слой определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B). Обозначение $X[b]$ разъяснено в предыдущей сноске.

$(E,\ p,\ B)$). Условие б) выполнено в силу формулы (В.1.3), служащей определением морфизмов $(X(m), \chi(m))$ $(m \in N)$.

Для функции $a(\cdot): B \to R^+$, удовлетворяющей условиям п. 1.2, проведем следующие рассуждения.

При всяком $b \in B$ для функции $a(\cdot): B \to R^+$ выполнено равенство (В.1.1) (это — одно из условий п. 1.2); следовательно, имеет место формула (В.1.6); в самом деле, при всяких $b \in B,\ m \in Z$ имеем:

$$a(\chi^m b) = a(\chi(\chi^{m-1} b)) \underset{(\text{B.1.1})}{=} a(\chi^{m-1} b);$$

применив индукцию по $m \in N$ и по $-m \in \{0\} \cup N$, получаем (В. 1.6). При всяком $b \in B$ для функции $a(\cdot): B \to R^+$ выполнено неравенство (В.1.2) (это — тоже одно из условий п. 1.2). Объединяя это со сказанным в предыдущей фразе, получаем, что условие в) п. 1.3 выполнено.

Таким образом, доказано, что семейство морфизмов $(X(m), \chi(m))$ $(m \in N)$, определенное формулой (В.1.3) (где (X, χ) — автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, удовлетворяющий условиям п. 1.2), удовлетворяет условиям а)—в) п. 1.3. Докажем теперь, что это семейство удовлетворяет при всяких $b \in B,\ m \in N$ неравенству(В.1.4), причем и здесь функция $a(\cdot): B \to R^+$ — та же, что в п. 1.2. Для функции $a(\cdot): B \to R^+$, удовлетворяющей условиям п. 1.2, при всяких $b \in B,\ m \in N$ имеем

$$\begin{gathered}\|X(m,b)\| = \|X^m[b]\| = \left\|X\left[\chi^{m-1}b\right]...X[\chi b]X[b]\right\| \leqslant \\ \leqslant \left\|X\left[\chi^{m-1}b\right]\right\|...\|X[\chi b]\| \cdot \|X[b]\| \underset{(\text{B.1.2})}{\leqslant} \\ \underset{(\text{B.1.2})}{\leqslant} \exp(a(\chi^{m-1}b))...\exp(a(\chi b))\exp(a(b)) \underset{(\text{B.1.6})}{\leqslant} \exp(ma(b)),\end{gathered} \tag{B.1.7}$$

$$\begin{gathered}\left\|[X(m,b)]^{-1}\right\| = \left\|\left[X^m[b]\right]^{-1}\right\| = \left\|\left[X^m[b]\right]^{-1}\left[X[\chi b]\right]^{-1}...\left[X\left[\chi^{m-1}b\right]\right]^{-1}\right\| \leqslant \\ \leqslant \left\|\left[X[b]\right]^{-1}\right\| \cdot \left\|\left[X[\chi b]\right]^{-1}\right\|...\left\|\left[X\left[\chi^{m-1}b\right]\right]^{-1}\right\| \underset{(\text{B.1.2})}{\leqslant} \\ \underset{(\text{B.1.2})}{\leqslant} \exp(a(b))\exp(a(\chi b))...\exp(a(\chi^{m-1}b)) \underset{(\text{B.1.6})}{=} \exp(ma(b)).\end{gathered} \tag{B.1.8}$$

При всяких $b \in B,\ m \in N$ из неравенств (В.1.7), (В.1.8) следует неравенство (В. 1.4). Утверждения, сформулированные в п. 1.3, доказаны.

2.1. Пусть V^n — связное дифференцируемое (класса C^2) n-мерное многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика $\delta(\cdot\ ,\ \cdot)$ (класса C^1). Через (TV^n, π, V^n) обозначаем касательное расслоение многообразия V^n, через TV^n — пространство этого векторного расслоения, стандартным образом наделенное структурой дифференцируемого многообразия. С помощью фиксированной выше римановой метрики многообразие V^n стандартным образом наделяется структурой метрического пространства, которое обозначаем через V^n или, подробнее, через (V^n, ρ), где ρ — расстояние в этом метрическом пространстве. Потребуем, чтобы метрическое пространство (V^n, ρ) было полным.

Через S обозначаем множество всех диффеоморфизмов класса C^1 взаимно-однозначно отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию

$$\max\left\{\left\|\left|df\right|\right\|,\ \left\|\left|(df)^{-1}\right|\right\|\right\} < +\infty, \tag{B.2.1}$$

где

$$\left\|\left|df\right|\right\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \|df_x\|, \tag{B.2.2}$$

$$\left\|\left|(df)^{-1}\right|\right\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \left\|(df_x)^{-1}\right\|, \tag{B.2.3}$$

где df_x — производная отображения f в точке x, а $\| \cdot \|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой на многообразии V^n. Отметим, что

$$\max\left\{\left\|df\right\|,\ \left\|(df)^{-1}\right\|\right\} \geqslant 1 \tag{B.2.4}$$

(доказательство неравенства (B.2.4) очевидно; впрочем, оно подробно проведено в п. 2[6]).

Множество S наделяется структурой метрического пространства следующим образом. Фиксируем (отмечаем) произвольную точку $x_0 \in V^n$ и задаем для всяких $f_1 \in S, f_2 \in S$ расстояние формулой

$$d_S(f_1, f_2) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(f_1 x, f_2 x)} \left\{\min\left\{s(u), \left[1+\rho(x, x_0)\right]^{-1}\right\} + \right.$$
$$\left. + \left\|\varphi_u df_{2x} - df_{1x}\right\| + \left\|(\varphi_u df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\right\|\right\}, \tag{B.2.5}$$

где $G(y_1, y_2)$ — множество всех кусочно-гладких кривых (путей)*, идущих в многообразии V^n из точки y_2 в точку y_1; $s(u)$ — длина кривой (пути) u; $\varphi_u : \pi^{-1}(y_2) \to \pi^{-1}(y_1)$ — параллельный перенос вдоль кривой (пути) $u \in G(y_1, y_2)$ (в п. 2 [6] все это разъяснено подробнее).

В [6, п. 3] доказано, что формула (B.2.5) в самом деле определяет расстояние в S.

Расстояние $d_S(\cdot\ ,\ \cdot)$, *определяемое формулой (B.2.5), индуцирует на* S *ту же топологию, что и расстояние* $d_S(\cdot\ ,\ \cdot)$, *определяемое для всяких* $f_1 \in S, f_2 \in S$ *следующей формулой*:

$$\widetilde{d}_S(f_1, f_2) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(f_1 x, f_2 x)} \left\{\min\left\{s(u), \left[1+\rho(x, x_0\right]^{-1}\right\} + \left\|\varphi_u df_{2x} - df_{1x}\right\|\right\} \tag{B.2.6}$$

(разъяснение обозначений приведено выше после формулы (B.2.5); доказательство того, что расстояние $d_S(\cdot\ ,\ \cdot)$ и расстояние $\widetilde{d}_S(\cdot\ ,\ \cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию, приведено в п. 4 [6]).

Метрическое пространство (S, d_S) *полно (см. [7], предложение 1).*

2.2. В частном случае, когда многообразие V^n замкнутое (т. е. компактное), метрика $\widetilde{d}_S(\cdot\ ,\ \cdot)$ эквивалентна метрике $\widetilde{d}_1(\cdot\ ,\ \cdot)$, определяемой для всяких $f_1 \in S, f_2 \in S$, формулой

$$\widetilde{d}_1(f_1, f_2) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(f_1 x, f_2 x)} \left\{s(u) + \left\|\varphi_u df_{2x} - df_{1x}\right\|\right\} \tag{B.2.7}$$

(доказательство этого утверждения приведено в [6, п. 6]), следовательно, метрики $\widetilde{d}_S(\cdot\ ,\ \cdot)$ и $\widetilde{d}_1(\cdot\ ,\ \cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию (если V^n компактно). Так как (см. выше п. 2.1) метрики $d_S(\cdot\ ,\ \cdot)$ и $\widetilde{d}_S(\cdot\ ,\ \cdot)$ (всегда, не только для замкнутого многообразия V^n) индуцируют на S одну и ту же топологию, то из утверждения, сформулированного в предыдущей фразе, вытекает следующее утверждение.

Если многообразие V^n *замкнутое, то метрика* $\widetilde{d}_1(\cdot\ ,\ \cdot)$, *определенная формулой (B.2.7), индуцирует на* S *ту же топологию, что и метрика* $d_S(\cdot\ ,\ \cdot)$, *определенная формулой (B.2.5).*

2.3. В частном случае $V^n = E^n$ (n-мерное евклидово пространство) формулы (B.2.5) и (B.2.6) и сами по себе записываются проще (см. формулы (79), (80) [6]), и определяемые ими метрики эквивалентны другим, проще определяемым. А именно метрика $\widetilde{d}_S(\cdot\ ,\ \cdot)$, определенная

---

* Кривые (пути) здесь, как и в [7] (в отличие от [6]), обозначаются через u; через u_t обозначается значение отображения $u : [0,1] \to V^n$ в точке t через du_t — значение производной этого отображения в точке t через u_t обозначается $du_t(\tau^{[1]})^{-1}$ 1 (определение отображения $\tau_x^{[n]}$ (обозначаемого там через τ_x) воспроизведено в п. 8 [6]).

формулой (B.2.6), эквивалентна в случае $V^n = E^n$ метрике $\widetilde{d}^{(S)}(\cdot\,,\,\cdot)$, определяемой для всяких $f_1 \in S, f_2 \in S$ формулой

$$\widetilde{d}^{(S)}(f_1, f_2) \underset{\text{def}}{=} \left| f_1 x_0 - f_2 x_0 \right| + \sup_{y \in E^n} \left\| \frac{df_1}{dx}\bigg|_{x=y} - \frac{df_2}{dx}\bigg|_{x=y} \right\| \tag{B.2.8}$$

(это утверждение доказано в п. 9 [6] (см. в цитируемой статье формулу (85) и следующий за ней текст)), следовательно, метрики $\widetilde{d}_S(\cdot\,,\,\cdot)$ и $\widetilde{d}^{(S)}(\cdot\,,\,\cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию (при $V^n = E^n$*)*. Так как (см. выше в п. 2.1) метрики $d_S(\cdot\,,\,\cdot)$ и $\widetilde{d}_S(\cdot\,,\,\cdot)$ всегда (не только в случае $V^n = E^n$*)* индуцируют на S одну и ту же топологию, то из утверждения, сформулированного в предыдущей фразе, вытекает следующее утверждение.

В случае $V^n = E^n$ метрика $\widetilde{d}^{(S)}(\cdot\,,\,\cdot)$, определенная формулой (B.2.8), индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $d_S(\cdot\,,\,\cdot)$, определенная формулой (B.2.5).

§ 1. В этом параграфе используются обозначения, разъясненные во введении.

1. Положим

$$B \underset{\text{def}}{=} S \times V^n,\ E \underset{\text{def}}{=} S \times TV^n,\ p \underset{\text{def}}{=} 1_S \times \pi\,. \tag{1.1}$$

Расстояние в B определяется формулой

$$d_B((f_1, x_1), (f_2, x_2)) \underset{\text{def}}{=} d_S(f_1, f_2) + \rho(x_1, x_2) \tag{1.2}$$

для всяких $f_1 \in S, f_2 \in S,\ x_1 \in V^n,\ x_2 \in V^n$.

Хорошо известно (и легко доказывается), что из полноты метрических пространств (S, d_S) и (V^n, ρ) следует полнота метрического пространства (B, d_B).

Можно определить другое расстояние в B формулой

$$\widetilde{d}_B((f_1, x_1), (f_2, x_2)) \underset{\text{def}}{=} \widetilde{d}_S(f_1, f_2) + (x_1, x_2) \tag{1.2'}$$

для всяких $f_1 \in S, f_2 \in S,\ x_1 \in V^n,\ x_2 \in V^n$.

Так как расстояния $d_S(\cdot\,,\,\cdot)$ и $\widetilde{d}_S(\cdot\,,\,\cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию (см. п. 2.1 введения), то расстояния $d_B(\cdot\,,\,\cdot)$ и $\widetilde{d}_B(\cdot\,,\,\cdot)$, определенные формулами (1.2) и (1.2'), индуцируют на B одну и ту же топологию.

Топологическое пространство E определяется как произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $d_S(\cdot\,,\,\cdot)$; эта топология совпадает с топологией, индуцированной метрикой $\widetilde{d}_S(\cdot\,,\,\cdot)$) на топологическое пространство TV^n, т. е. $E = S \times TV^n$.

Непрерывность отображения $p \underset{\text{def}}{=} 1_S \times \pi : E \to B$ вытекает в силу определения топологии на E и формулы (1.2) из непрерывности отображения $\pi : TV^n \to V^n$. Так определенное расслоение (E, p, B) наделяется структурой векторного расслоения (со слоем R^n) заданием атласа (см. [8], гл. 3, раздел 1; гл. 5, раздел 2)

$$\left\{ g_i : (S \times U_i) \times R^n \to p^{-1}(S \times U_i) \right\}_{i \in I},$$

определенного по атласу $\left\{ h_i : U_i \times R^n \to \pi^{-1}(U_i) \right\}_{i \in I}$ (где I — некоторое множество) векторного расслоения (TV^n, π, V^n) формулой $g_i \underset{def}{=} 1_S \times h_i$ (чтобы придать смысл этой формуле, надо рассмотреть $(S \times U_i) \times R^n$ как $S \times (U_i \times R^n)$). Так определенное векторное расслоение (E, p, B) можно эквивалентным образом определить как векторное расслоение, индуцированное отображением $\mathrm{pr}_2 : S \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и векторным расслоением (TV^n, π, V^n) (см. [8], гл. 2, п. 5.3 и гл. 3, п. 3.1).

Векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$ со слоем R^n и базой B, являющейся полным метрическим пространством, построено. В п. 2.1 введения мы зафиксировали на векторном расслоении (TV^n,π,V^n) некоторую риманову метрику (класса C^1), т. е. зафиксировали гладкое (класса C^1) отображение δ подпространства прямого произведения $TV^n\times TV^n$, состоящего из всех тех точек $(\varepsilon,\varepsilon')$, для которых $\pi\varepsilon=\pi\varepsilon'$, в R такое, что для всякого $x\in V^n$ сужение на $\pi^{-1}(x)\times\pi^{-1}(x)$ отображения δ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(x)$. Рассмотрим подпространство прямого произведения $E\times E$, состоящее из всех тех точек (e,e'), для которых $pe=pe'$.

Зададим отображение этого подпространства в пространство вещественных чисел R формулой

$$\Delta(e,e')\underset{\text{def}}{=}\delta(ue,ue'),\tag{1.3}$$

где через u обозначаем проекцию произведения $E=S\times TV^n$ на второй сомножитель. Обозначим через v проекцию произведения $B=S\times V^n$ на второй сомножитель. Обозначим через u_b сужение u на слой $p^{-1}(b)$. Так как для всякого $b\in B$ отображение u_b есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\pi^{-1}(vb)$, а сужение δ на $\pi^{-1}(vb)\times\pi^{-1}(vb)$ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(vb)$, то для всякого $b\in B$ сужение Δ на $p^{-1}(b)\times p^{-1}(b)$ является скалярным произведением на слое $p^{-1}(b)$. Так как отображения u и δ непрерывны, то отображение Δ непрерывное. Таким образом, мы зафиксировали риманову метрику Δ на векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$.

2. Пусть $f\in S$. Через df обозначаем производную отображения f (в [9], например, она обозначается по другому: f_*).

Пара отображений (df,f) является морфизмом векторного расслоения (TV^n,π,V^n). Так как f — диффеоморфизм V^n на V^n, то существует морфизм

$$((df)^{-1},f^{-1})=(d(f^{-1}),f^{-1}):(TV^n,\pi,V^n)\to(TV^n,\pi,V^n),$$

обратный морфизму (df,f). Следовательно, (df,f) — *автоморфизм векторного расслоения* (TV^n,π,V^n).

Определим отображение $X:E\to E$ следующим образом. Всякое $e\in E$ есть, согласно формуле (1.1), пара $(f,\mathfrak{X})$, где $f\in S,\ \mathfrak{X}\in TV^n$; полагаем

$$Xe=X(f,\mathfrak{x})\underset{\text{def}}{=}(f,(df)\mathfrak{x})\in E.\tag{1.4}$$

Определим далее отображение $\chi:B\to B$ следующим образом. Всякое $b\in B$ есть, согласно формуле (1.1), пара (f,x), где $f\in S,x\in V^n$; полагаем

$$\chi b=\chi(f,x)\underset{\text{def}}{=}(f,fx)\in B.\tag{1.5}$$

Пара отображений (X,χ), определенных формулами (1.4), (1.5), есть автоморфизм векторного расслоения (E,p,B).

Доказательство этого утверждения разобьем на несколько пунктов.

а) Всякое $e\in E$ есть, согласно формуле (1.1), пара $(f,\mathfrak{x})$, где $f\in S,\ \mathfrak{x}\in TV^n$. Имеем для всякого $e\in E$:

$$pXe=pX(f,\mathfrak{x})\underset{(1.4)}{=}p(f,(df)\mathfrak{x})\underset{(1.1)}{=}(1\times\pi)(f,(df)\mathfrak{x})=(f,\pi(df)\mathfrak{x})=$$
$$=(f,f\pi\mathfrak{x})\underset{(1.5)}{=}\chi(f,\pi\mathfrak{x})\underset{(1.1)}{=}\chi p(f,\mathfrak{x})=\chi pe.$$

Таким образом, *доказано равенство*

$$pX=\chi p.\tag{1.6}$$

б) Фиксируем произвольное $b\in B$. Оно есть, согласно формуле (1.1), пара (f,x), где $f\in S,x\in V^n$. Имеем:

$$p^{-1}(b)=p^{-1}((f,x))\underset{(1.1)}{=}(f,\pi^{-1}(x)),$$

$$p^{-1}(\chi b)=p^{-1}(\chi(f,x))\underset{(1.5)}{=}p^{-1}(f,fx)\underset{(1.1)}{=}(f,\pi^{-1}(fx)).$$

Поэтому всякое $e\in p^{-1}(b)$ есть пара $(f,\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x}\in\pi^{-1}(x)$. Сужение $X[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X действует по формуле

$$X[b](f,\mathfrak{x})=X(f,\mathfrak{x})\underset{(1.4)}{=}(f,(df)\mathfrak{x}), \tag{1.7}$$

а так как $\mathfrak{x}\in\pi^{-1}(x)$, то $(df)_{\mathfrak{x}}=(df_x)_{\mathfrak{x}}$. Так как при всяком $x\in V^n$ отображение $df_x:\pi^{-1}(x)\to\pi^{-1}(fx)$ (производная отображения F в точке X*)* линейно, то из формулы (1.7) в силу приведенного в п. 1 определения структуры векторного расслоения для расслоения (E,p,B) вытекает, что отображение $X[b]:p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi b)$ линейно.

Таким образом, доказано, что при всяком $b\in B$ сужение $X[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X есть линейное отображение векторного пространства $p^{-1}(b)$ в векторное пространство $p^{-1}(\chi b)$.

в) Пусть последовательность $\{b_k\}_{k\in N}$ точек пространства B сходится к точке $\overline{b}\in B$*,* т.е.

$$d_B(b_k,\overline{b})\underset{k\to\infty}{\to}0. \tag{1.8}$$

В силу формулы (1.1)

$$b_k=(f_k,y_k),\ f_k\in S,\ y_k\in V^n\quad(k\in N), \tag{1.9}$$

$$\overline{b}=(\overline{f},y),\ \overline{f}\in S,\ y\in V^n. \tag{1.10}$$

Из соотношения (1.8) в силу формулы (1.2) вытекают следующие два соотношения:

$$d_S(f_k,\overline{f})\underset{k\to\infty}{\to}0, \tag{1.11}$$

$$\rho(y_k,y)\underset{k\to\infty}{\to}0. \tag{1.12}$$

Из соотношения (1.11) следует, что $\{f_k\}_{k\in N}$ — фундаментальная последовательность в метрическом пространстве (S,d_S). В статье [7] доказано, что для такой последовательности найдется отображение $f:V^n\to V^n$*,* принадлежащее множеству *S*, такое, что имеет место совокупность следующих трех утверждений:

i) $f_k\underset{k\to\infty}{\to}f$ *равномерно на всяком ограниченном множестве метриче*СКОГО ПРОСТРАНСТВА (V^n,ρ) (доказано в п. в) доказательства предложения 1 [7]);

ii) *у точки y (см. формулу (1.10)) найдется окрестность* W_1*, содержащаяся в некоторой координатной окрестности* $W(y)$*, такая, что** $\hat{d}\hat{f}_{kx}\underset{k\to\infty}{\to}\hat{d}\hat{f}_x$ — *равномерно относительно* $x\in\widehat{W}_1$ *(доказано в п. с) доказа*тельства предложения 1 в [7]); обозначения $\widehat{W}_1,\hat{f}_k,\hat{f}$ подробно разъяснены в п. г) доказательства предложения 1 статьи [7]; здесь коротко напомним: $\widehat{W}_1\subset R^n$ — образ окрестности $\widehat{W}_1$ при координатном отображении $h_y:W(y)\to R^n$ *;* W — некоторая окрестность точки FY, содержащаяся в некоторой координатной окрестности $W(fy)$; $\widehat{W}\subset R^n$ — образ окрестности W при координатном отображении $h_{fy}:W(fy)\to R^n$ отображения $\hat{f}_k$ при всяком натуральном $k\geqslant l_1$, где l_1 — некоторое натуральное число, и $\hat{f}$ определены формулами

$$\hat{f}_k\underset{\text{def}}{=}h_{fy}f_k(h_y)^{-1}\Big|_{h_yW_1}, \tag{1.13.}$$

---

* Символом $\hat{d}$ обозначается производная отображения R^n в R^n, понимаемая как линейное отображение R^n в R^n. Точный смысл обозначения $\hat{d}$ разъяснен в формуле (41) в статье [7]; определение отображений τ^x, фигурирующих в цитируемой формуле, воспроизведено в начале п. е) доказательства предложения 1 в [7].

$$\widehat{f} \underset{\text{def}}{=} h_{fy} f (h_y)^{-1}\Big|_{h_y W_1} . \qquad (1.14)$$

В п. г) доказательства предложения 1 [7] доказано, что окрестность W_1 точки У и окрестность W точки FY могут быть выбраны так, что при всяком натуральном $k \geqslant l_1$, где l_1 — некоторое натуральное число, имеют место включения $f_k W_1 \subset W$, $fW_1 \subset W$, вследствие чего формула (1.13) при всяком натуральном $k \geq l_1$ и формула (1.14) имеют смысл;

iii) $d_S(f_k, f) \underset{k\to\infty}{\to} 0 \qquad (1.15)$

(доказано в п. ц) доказательства предложения 1 в [7]).

Из соотношений (1.11) и (1.15) следует равенство

$$f = \overline{f} . \qquad (1.16)$$

Из соотношения (1.12) следует, что множество точек $\{y_m\}_{m\in N}$ ограничено в метрическом пространстве (V^n, ρ). Из утверждения I) следует поэтому, что $f_k \underset{k\to\infty}{\to} f$ равномерно на множестве $\{y_m\}_{m\in N}$, т. е.

$$\sup_{m\in N} \rho(f_k y_m, f y_m) \underset{k\to\infty}{\to} 0 . \qquad (1.17)$$

В силу непрерывности отображения $f : V^n \to V^n$ из соотношения (1.12) следует соотношение

$$\rho(f y_k, f y) \underset{k\to\infty}{\to} 0 . \qquad (1.18)$$

Имеем

$$\rho(f_k y_k, \overline{f} y) \underset{(1.16)}{=} \rho(f_k y_k, f y) \leqslant \rho(f_k y_k, f y_k) + \rho(f y_k, f y) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{m\in N} \rho(f_k y_m, f y_m) + \rho(f y_k, f y) \overset{(1.17),(1.18)}{\underset{k\to\infty}{\to}} 0 . \qquad (1.19)$$

Имеем далее

$$d_B(\chi b_k, \chi \overline{b}) \overset{(1.9)}{\underset{(1.10)}{=}} d_B(\chi(f_k, y_k), \chi(\overline{f}, y)) \underset{(1.5)}{=} d_B((f_k, f_k y_k), (\overline{f}, \overline{f} y)) \underset{(1.2)}{=}$$
$$\underset{(1.2)}{=} d_S(f_k, \overline{f}) + \rho(f_k y_k, \overline{f} y) \overset{(1.11),(1.19)}{\underset{k\to\infty}{\to}} 0 . \qquad (1.19')$$

Итак, доказано, что из соотношения (1.8) следует соотношение $d_B(\chi b_k, \chi \overline{b}) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, т. е. ДОКАЗАНА НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЯ $\chi : B \to B$, *определенного формулой (1.5).*

г) Пусть теперь дана последовательность $\{e_k\}_{k\in N}$ точек пространства E, сходящаяся к точке $\overline{e} \in E$. В силу формулы (1.1)

$$e_k = (f_k, \mathfrak{y}_k) \ \ (k \in N), \ \ f_k \in S, \ \ \mathfrak{y}_k \in TV^n \quad (k \in N), \qquad (1.20)$$

$$\overline{e} = (\overline{f}, \mathfrak{y}) \quad \overline{f} \in S, \ \ \mathfrak{y} \in TV^n . \qquad (1.21)$$

Положим

$$y_k \underset{\text{def}}{=} \pi \mathfrak{y}_k \quad (k \in N), \quad y \underset{\text{def}}{=} \pi \mathfrak{y} , \qquad (1.22)$$

$$b_k \underset{\text{def}}{=} p e_k \quad (k \in N), \quad \overline{b} \underset{\text{def}}{=} p \overline{e} . \qquad (1.23)$$

При всяком $k \in N$ имеем

$$b_k \underset{(1.23)}{=} p e_k \underset{(1.20)}{=} p(f_k, \mathfrak{y}_k) \underset{(1.1)}{=} (f_k, \pi \mathfrak{y}_k) \underset{(1.22)}{=} (f_k, y_k) . \qquad (1.24)$$

Имеем далее

$$\overline{b} \underset{(1.23)}{=} p\overline{e} \underset{(1.21)}{=} p(\overline{f}, \mathfrak{y}) \underset{(1.1)}{=} (\overline{f}, \pi \mathfrak{y}) \underset{(1.22)}{=} (\overline{f}, y) . \qquad (1.25)$$

Из формулы (1.23) и соотношения $e_k \underset{k\to\infty}{\to} \overline{e}$ в силу непрерывности отображения $p : E \to B$ (см. п. 1) следует соотношение (1.8). Из формул (1.24), (1.25) следуют формулы (1.9), (1.10). Таким образом, выполнены все условия подпункта в).

В условиях (и обозначениях) подпункта в) имеем

$$\hat{d}(\hat{f}_k)_{h_y y_k} - \hat{d}(\hat{f})_{h_y y} = \left[\hat{d}(\hat{f}_k)_{h_y y_k} - \hat{d}(\hat{f})_{h_y y_k}\right] + \left[\hat{d}(\hat{f})_{h_y y_k} - \hat{d}(\hat{f})_{h_y y}\right]. \qquad (1.26)$$

Первая квадратная скобка в правой части равенства (1.26) в силу утверждения *ii*) стремится к нулю при $k \to \infty$ (поскольку из соотношения (1.12) следует, что $y_k \in W_1$ (следовательно, $h_k y_k \in \widehat{W}_1$) при всех натуральных к, больших некоторого числа). Вторая квадратная скобка в правой части равенства (1.26) стремится к нулю при $k \to \infty$ вследствие соотношения (1.12) (так как отображение $\hat{f}$, определенное формулой (1.14), принадлежит классу C^1). Поэтому и левая часть равенства (1.26) стремится к нулю при $k \to \infty$:

$$\hat{d}(\hat{f}_k)_{h_y y_k} \underset{k\to\infty}{\to} \hat{d}(\hat{f})_{h_y y}. \qquad (1.27)$$

Из соотношения $e_k \underset{k\to\infty}{\to} \bar{e}$ следует в силу формул (1.20), (1.21) соотношение $\mathfrak{y}_k \underset{k\to\infty}{\to} \mathfrak{y}$, откуда (поскольку координатное отображение h_y принадлежит классу C^2) в силу формулы (1.22) следует соотношение

$$\tau_{h_y y_k} d(h_y)_{y_k} \mathfrak{y}_k \underset{k\to\infty}{\to} \tau_{h_y y} d(h_y)_y \mathfrak{y}. \qquad (1.28)$$

Хорошо известно (и легко доказывается), что если $A_k \underset{k\to\infty}{\to} A$, $z_k \underset{k\to\infty}{\to} z$, где $A_k \in \mathrm{Hom}(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$ $(k \in N)$, $A \in \mathrm{Hom}(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$ $z_k \in R^n$ $(k \in N)$, $z \in R^n$, то $A_k z_k \underset{k\to\infty}{\to} Az$.
Поэтому из соотношений (1.27), (1.28) следует соотношение

$$\hat{d}(\hat{f}_k)_{h_y y_k} \tau_{h_y y_k} d(h_y)_{y_k} \mathfrak{y}_k \underset{k\to\infty}{\to} \hat{d}(\hat{f})_{h_y y} \tau_{h_y y} d(h_y)_y \mathfrak{y}, \qquad (1.29)$$

которое в силу определения символа $\hat{d}$ (см. формулу (41) статьи [7]), может быть переписано в виде

$$\tau_{\hat{f}_k h_y y_k} d(\hat{f}_k)_{h_y y_k} d(hy)_{y_k} \mathfrak{y}_k \underset{k\to\infty}{\to} \tau_{\hat{f}_k h_y y} d(\hat{f})_{h_y y} d(h_y)_y \mathfrak{y},$$

откуда (поскольку в силу утверждения I) и формул (1.13), (1.14) имеет место соотношение $\hat{f}_k h_k y_k \underset{k\to\infty}{\to} \hat{f} h_y y$), как известно, следует соотношение $d(f_k)_{h_y y_k} d(h_y)_{y_k} \mathfrak{y}_k \underset{k\to\infty}{\to} d(f)_{h_y y} d(h_y)_y \mathfrak{y}$, из которого получаем (поскольку координатное отображение h_{fy} принадлежит классу C^2) соотношение

$$d((h_{fy})^{-1})_{\hat{f}_k h_y y_k} d(\hat{f}_k)_{h_y y_k} d(h_y)_{y_k} \mathfrak{y}_k \underset{k\to\infty}{\to} d((h_{fy})^{-1})_{\hat{f} h_y y} d(\hat{f})_{h_y y} d(h_y)_y \mathfrak{y},$$

совпадающее в силу формул (1.13), (1.14), (1.22) с соотношением

$$(df_k)\mathfrak{y}_k \underset{k\to\infty}{\to} (df)\mathfrak{y}. \qquad (1.30)$$

Имеем: $Xe_k \underset{(1.20)}{=} X(f_k, \mathfrak{y}_k) \underset{(1.4)}{=} (f_k, (df_k)\mathfrak{y}_k), X\bar{e} \underset{(1.21)}{=} X(\bar{f}, \mathfrak{y}) \underset{(1.16)}{=} X(f, \mathfrak{y}) \underset{(1.4)}{=} (f, (df)\mathfrak{y})$, откуда в силу формул (1.11), (1.16), (1.30) следует соотношение $Xe_k \underset{k\to\infty}{\to} X\bar{e}$.

Итак, доказано, что из соотношения $e_k \underset{k\to\infty}{\to} \bar{e}$ следует соотношение $Xe_k \underset{k\to\infty}{\to} X\bar{e}$ т. е. *доказана непрерывность отображения* $X : E \to E$*, определенного формулой (1.4).*

Подведем итог подпунктов а)—г). В этих подпунктах доказано, что (X, χ) есть морфизм векторного расслоения (E, p, B).

д) Определим отображение $\chi_1 : B \to B$, положив для всякого $b = (f, y) \in B$ (где $f \in S$, $y \in V^n$) по определению

$$\chi_1 b = \chi_1(f, y) = (f, f^{-1}y). \qquad (1.31)$$

Для всякого $(f, x) \in B$ (где $f \in S$, $y \in V^n$) имеем:

$$\chi_1 \chi(f, x) \underset{(1.5)}{=} \chi_1(f, fx) \underset{(1.31)}{=} (f, f^{-1}fx) = (f, x),$$

$$\chi \chi_1(f, x) \underset{(1.31)}{=} \chi(f, f^{-1}x) \underset{(1.5)}{=} (f, ff^{-1}x) = (f, x)$$

Тем самым доказано, что $\chi_1\chi=\chi\chi_1=1_B$, т. е. доказано, что $\chi^{-1}:B\to B$ существует и равно отображению $\chi_1:B\to B$, определенному формулой (1.31).

е) Определим отображение $X_1:E\to E$, положив для всякого $e=(f,\eta)\in E$ (где $f\in S,\ \eta\in TV^n$) по определению

$$X_1e=X_1(f,\eta)=(f,(df^{-1})\eta)\,. \tag{1.32}$$

Для всякого $(f,\eta)\in E$ (где $f\in S,\ \eta\in TV^n$) имеем

$$X_1X(f,\eta)\underset{(1.4)}{=}X_1(f,(df)\eta)\underset{(1.32)}{=}(f,(df^{-1})(df)\eta)=(f,\eta),$$
$$XX_1(f,\eta)\underset{(1.32)}{=}X(f,(df^{-1})\eta)\underset{(1.4)}{=}(f,(df)(df^{-1})\eta)=(f,\eta)$$

Тем самым доказано, что $X_1X=XX_1=1_E$ т. е. ДОКАЗАНО, ЧТО $X^{-1}:E\to E$ существует и равно отображению X_1, определенному формулой (1.32).

ж) Пусть последовательность $\{b_k\}_{k\in N}$ точек пространства B сходится в точке $\bar b\in B$. Тогда (см. подпункт в)) имеют место формулы (1.9) — (1.12), утверждение I) подпункта в) и формулы (1.15), (1.16).

Из утверждения I) подпункта в) следует соотношение

$$\rho(f_kf^{-1}y,y)=\rho(f_k(f^{-1}y),f(f^{-1}y))\underset{k\to\infty}{\to}0\,. \tag{1.33}$$

Имеем

$$\rho(f_kf_k^{-1}y_k,f_kf_k^{-1}y)=\rho(y_k,f_kf^{-1}y)\leqslant\rho(y_k,y)+\rho(y,f_kf^{-1}y)\overset{(1.12),(1.33)}{\underset{k\to\infty}{\to}}0\,, \tag{1.34}$$

Из фундаментальности последовательности $\{f_k\}_{k\in N}$ в пространстве (S,d_S) (вытекающей из соотношения (1.11)) следует, что

$$\sup_{k\in N}\left|\!\left|\!\left|(df_k)^{-1}\right|\!\right|\!\right|<+\infty \tag{1.35}$$

(сформулированное утверждение доказано в п. т) доказательства предложения 1 в [7]: см. формулу (93) цитируемой статьи и формулу (B.2.3)). Далее,

$$\rho(f_k^{-1}y_k,f^{-1}y)\leqslant\left\{\sup_{k\in N}\left|\!\left|\!\left|(df_k)^{-1}\right|\!\right|\!\right|\right\}\rho(f_kf^{-1}y_k,f_kf^{-1}y)\,. \tag{1.36}$$

Неравенство (1.36) вытекает из следующего хорошо известного утверждения.

Для всяких $g\in S,\ z_1\in V^n,\ z_1\in V^n$ имеет место неравенство

$$\rho(z_1,z_2)\leqslant\left|\!\left|\!\left|(dg)^{-1}\right|\!\right|\!\right|\rho(gz_1,gz_2)\,. \tag{1.37}$$

Для полноты изложения приведем здесь доказательство сформулированного утверждения. Напомним сначала, что для всяких $y_1\in V^n,\ y_2\in V^n$ расстояние $\rho(y_1,y_2)$ определено формулой

$$\rho(y_1,y_2)\underset{\text{def}}{=}\inf_{u\in G(y_1,y_2)}s(u)\,. \tag{1.38}$$

Здесь $G(y_1,y_2)$ — множество всех кусочно-гладких кривых (путей), идущих в многообразии V^n из точки y_2 в точку y_1. Всюду в этой статье (как и в [6, 7]), под кусочно-гладкой кривой, идущей (путем, идущим) в многообразии V^n из точки y_2 в точку y_1 понимается кусочно-гладкое (т. е. непрерывное, имеющее кусочно-непрерывную производную) отображение И отрезка [0, 1] в многообразие V^n такое, что $u_0=y_2,\ u_1=y_1$ (через u_t обозначается значение отображения и в точке t); производную отображения И в точке Т (понимаемую, как принято в теории дифференцируемых многообразий, т. е. как отображение касательного пространства в касательное пространство) обозначаем через du_t. Через u_t (здесь и в [6, 7]) обозначаем $du_t(\tau_t^{[1]})^{-1}1$, где $\tau_t^{[1]}$ — стандартное отображение, «отождествляющее» касательное пространство многообразия (с краем) [0, 1] с вещественной прямой R (точное определение отображения $\tau_x^{[n]}$ при любом $n\in N$ воспроизведено в [6, п. 8], где оно обозначено, правда, немного иначе: τ_x). Через s (u) обозначаем длину кривой (пути) $u \in G(y_1, y_2)$, определяемую через риманову метрику $\delta(\cdot\ ,\ \cdot)$ известной формулой

$$s(u) \underset{\text{def}}{=} \int_0^1 \left[\delta(\dot u_t, \dot u_t\right]^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 |\dot u_t| dt\,. \tag{1.39}$$

Так как $g \in S$, то $g^{-1} : V^n \to V^n$ — диффеоморфизм класса C^1, поэтому для всяких $z_1 \in V^n$, $z_2 \in V^n$, $u \in G\ (gz_1, gz_2)$ формула $(g^{-1}u)_t \underset{\text{def}}{=} g^{-1}u_t (t \in [0,1])$ определяет кривую (путь) $g^{-1}u \in G(z_1, z_2)$. Следовательно,

$$\rho(z_1, z_2) \underset{(1.38)}{=} \inf_{v \in G(z_1, z_2)} s(u) \leqslant \inf_{u \in G(gz_1, gz_2)} s(g^{-1}u)\,. \tag{1.40}$$

Для всякого $u \in G\ (gz_1, gz_2)$ имеем

$$s(g^{-1}u) \underset{(1.39)}{=} \int_0^1 \left|(g^{-1}u_t)\cdot\right| dt = \int_0^1 \left|d(g^{-1})_{u_t} u_t\right| dt \leqslant \int_0^1 \left\|d(g^{-1})_{u_t}\right\| \cdot |u_t| dt \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_{x \in V^n} \left\|d(g^{-1})_x\right\|) \int_0^1 |u_t| dt \overset{(\text{в}.2.2)}{\underset{(1.39)}{=}} \left\|\left|d(g^{-1})\right|\right\| s(u) = \left\|\left|d(g^{-1})\right|\right\| s(u)\,. \tag{1.41}$$

Равенство $\left\|\left|d(g^{-1})\right|\right\| = \left\|\left|(dg)^{-1}\right|\right\|$ для всякого диффеоморфизма g, отображающего V^n на V^n, доказывается следующим образом: так как $(dg_x)^{-1} = d(g^{-1})_{gx}$ для всякого $x \in V^n$ то

$$\left\|\left|(dg)^{-1}\right|\right\| \underset{(\text{в}.2.3)}{=} \sup_{x \in V^n} \left\|(dg)^{-1}\right\| = \sup_{x \in V^n} \left\|d(g^{-1})_{gx}\right\| =$$

$$= \sup_{g^{-1}z \in V^n} \left\|d(g^{-1})_z\right\| = \sup_{x \in V^n} \left\|d(g^{-1})_z\right\| \underset{(\text{в}.2.2)}{=} \left\|\left|d(g^{-1})\right|\right\|.$$

Из формулы (1.41) следует $\inf_{u \in G(gz_1, gz_2)} s(g^{-1}u) \leqslant \left\|\left|(dg)^{-1}\right|\right\| \inf_{u \in G(gz_1, gz_2)} s(u) \underset{(1.38)}{=} \left\|\left|(dg)^{-1}\right|\right\| \rho(gz_1 gz_2)$, откуда в силу неравенства (1.40) следует неравенство (1.37.). Утверждение, содержащее формулу (1.37), доказано.

Из неравенства (1.36) и соотношений (1.34), (1.35) следует соотношение

$$\rho(f_k^{-1} y_k, f^{-1} y) \underset{k \to \infty}{\to} 0\,. \tag{1.42}$$

При всяком $k \in N$ имеем

$$\chi^{-1} b_k = \chi_1 b_k \underset{(1.9)}{=} \chi_1(f_k, y_k) \underset{(1.31)}{=} (f_k, f_k^{-1} y_k)\,. \tag{1.43}$$

Далее,

$$\chi^{-1} \overline{b} = \chi_1 \overline{b} \underset{(1.10)}{=} \chi_1(\overline{f}, y) \underset{(1.31)}{=} (\overline{f}, \overline{f}^{-1} y) \underset{(1.16)}{=} (f, f^{-1} y) \tag{1.44}$$

При всяком $k \in N$ имеем

$$d_B(\chi^{-1} b_k, \chi^{-1} \overline{b}) \overset{(1.2)}{\underset{(1.43),(1.44)}{=}} d_S(f_k, f) + \rho(f_k^{-1} y_k, f^{-1} y) \tag{1.44'}$$

откуда в силу соотношений (1.11), (1.16), (1.42) следует соотношение $d_B(\chi^{-1} b_k, \chi^{-1} \overline{b}) \underset{k \to \infty}{\to} 0$. Это соотношение выведено из соотношения *(1.8). Таким образом, доказана непрерывность отображения* $\chi^{-1} : B \to B$.

з) Напомним известное утверждение. Пусть (X, χ) — морфизм векторного расслоения (E, p, B), причем отображения $X : E \to E$, $\chi : B \to B$ имеют обратные: $X^{-1} : E \to E$, $\chi^{-1} : B \to B$ и отображение $\chi^{-1} : B \to B$ непрерывно. Тогда (X^{-1}, χ^{-1}) — морфизм векторного расслоения (E, p, B) и, следовательно, (X, χ) —автоморфизм векторного расслоения (E, p, B).

Для полноты изложения приведем доказательство сформулированного утверждения.

α) Имеют место равенства $pX^{-1} = \chi^{-1} \chi p X^{-1} = \chi^{-1} p X X^{-1} = \chi^{-1} p$.

β) Поэтому для всякого $b \in B$ сужение $X^{-1}\Big|_{p^{-1}(b)}$ *на* слой $p^{-1}(b)$ отображения X^{-1} есть отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^{-1}b)$, следовательно,

$$X\left[\chi^{-1}b\right]X^{-1}\Big|_{p^{-1}(b)} = XX^{-1}\Big|_{p^{-1}(b)} = 1_{p^{-1}(b)}, \tag{1.45}$$

$$X^{-1}\Big|_{p^{-1}(b)} X\left[\chi^{-1}b\right] = X^{-1}X\left[\chi^{-1}b\right] = 1_{p^{-1}(\chi^{-1}b)}, \tag{1.46}$$

(напомним, что через $X\left[\chi^{-1}b\right]$ обозначается сужение на слой $p^{-1}(\chi^{-1}b)$ отображения X*;* для других отображений в формулах (1.45), (1.46) применено стандартное обозначение для сужения на подмножество). Для всякого $b \in B$ отображение $X^{-1}\Big|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^{-1}b)$ является, согласно формулам (1.45), (1.46), обратным к отображению $X\left[\chi^{-1}b\right] : p^{-1}(\chi^{-1}b) \to p^{-1}(b)$, которое линейно, так как (X, χ) —морфизм векторного расслоения (E, p, B); следовательно, и отображение $X^{-1}\Big|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^{-1}b)$ линейно (при всяком $b \in B$*)*.

γ*)* Пусть* $e_k \underset{k\to\infty}{\to} \bar{e}$, *ГДЕ* $e_k \in E \quad (k \in N)$, $\bar{e} \in E$. Тогда

$$pe_k \underset{k\to\infty}{\to} p\bar{e}, \tag{1.47}$$

$$\chi^{-1}pe_k \underset{k\to\infty}{\to} \chi^{-1}p\bar{e}, \tag{1.48}$$

так как отображения $p : E \to B$ и $\chi^{-1} : B \to B$ непрерывны по условию.

Возьмем такие карты (из атласа векторного расслоения (E, p, B) *):* $g_i : V_i \times R^n \to p^{-1}(V_i),\ g_j : V_j \times R^n \to p^{-1}(V_j)$, что $p\bar{e} \in V_i,\ \chi^{-1}p\bar{e} \in V_j$. Так как $V_i,\ V_i$ — открытые множества в пространстве B*,* то из соотношений (1.47), (1.48) следует существование такого $l \in N$, что при всяком натуральном $k \geqslant l$ имеем: $pe_k \in V_i, \chi^{-1}pe_k \in V_j$.

Определим отображения

$$A_k(\cdot) \underset{\text{def}}{=} pr_2 g_j^{-1} X g_j(\chi^{-1}pe_k,\ \cdot) \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n) \tag{1.49}$$

(при всяком натуральном $k \geqslant l$) и

$$\bar{A}(\cdot) \underset{\text{def}}{=} pr_2 g_j^{-1} X g_j(\chi^{-1}p\bar{e},\ \cdot) \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n), \tag{1.50}$$

где pr_2 — проекция произведения $V_i \times R^n$ на второй сомножитель.

Из соотношения (1.48) в силу непрерывности отображений $g_j,\ X,\ g_i^{-1},\ pr_2$ следует (пишем A_k вместо $A_k(\cdot)$ и $\bar{A}$ вместо $\bar{A}(\cdot)$) соотношение

$$A_k \underset{k\to\infty}{\to} \bar{A}. \tag{1.51}$$

Отображение $\bar{A} \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ невырождено, так как отображение $X\left[\chi^{-1}p\bar{e}\right] : p^{-1}(\chi^{-1}p\bar{e}) \to p^{-1}(p\bar{e})$ имеет обратное (это доказано в подпункте β)). Хорошо известно (и легко доказывается), что из соотношения (1.51) в силу невырожденности отображения $\bar{A}$ следует соотношение $A_k^{-1} \underset{k\to\infty}{\to} \bar{A}^{-1}$, из которого в силу формул (1.49), (1.50) следует соотношение

---

* В некоторых рассуждениях в этой статье используется то обстоятельство, что топологическое пространство E удовлетворяет первой аксиоме счетности. Это на самом деле так, поскольку (*E, p, B*) – локально тривиальное расслоение со слоем R^n, а база *B* – метрическое пространство. Но можно было бы этим и не пользоваться, а писать вместо счетной последовательности $\{e_k\}_{k\in N}$ «направленную последовательность» $\{e\ \alpha\ \ \{\alpha \in A$, где *A* – направленное множество.

$$X^{-1}e_k \underset{k\to\infty}{\to} X^{-1}\bar{e}. \qquad (1.52)$$

Тем самым доказано, что из соотношения $e_k \underset{k\to\infty}{\to} \bar{e}$ следует соотношение (1.52), т. е. доказана непрерывность отображения $X^{-1}: E \to E$.

Из утверждений, доказанных в подпунктах α)—γ), следует, что (X^{-1}, χ^{-1}) — морфизм векторного расслоения (E, p, B). Утверждение доказано.

и) В подпунктах а)—г), итог которых подведен в конце подпункта г), доказано, что (X, χ) (где X, χ определены формулами (1.4), (1.5)) есть морфизм векторного расслоения (E, p, B). В подпунктах д)— ж) доказано, что отображения $\chi: B \to B$, $X: E \to E$ имеют обратные $\chi^{-1}: B \to B$, $X^{-1}: E \to E$ и что отображение $\chi^{-1}: B \to B$ непрерывно. В силу утверждения, сформулированного и доказанного в подпункте з), отсюда следует, что (X, χ) (где X, χ определены формулами (1.4), (1.5)) есть автоморфизм векторного расслоения (E, p, B).

3. Докажем теперь существование функции $a(\cdot): B \to R^+$, удовлетворяющей для всякого $b \in B$ условиям (В.1.1) и (В.1.2).

Определим функцию $a(\cdot)$ следующим образом. Всякое $b \in B$ есть пара (f, x), где $f \in S$, $x \in V^n$. Положим

$$a(b) = a((f,x)) \underset{\text{def}}{=} \ln\max\left\{\left\|\left|df\right|\right\|, \left\|\left|(df)^{-1}\right|\right\|\right\}. \qquad (1.53)$$

Так как $f \in S$, то $a(b) \underset{(1.53)}{\overset{(\text{В.2.1})}{<}} +\infty, a(b) \underset{(1.53)}{\overset{(\text{В.2.4})}{\geqslant}} 0$ для всякого $b \in B$. Таким образом, формулой (1.53) определено отображение $a(\cdot): B \to R^+$. Из формулы (1.53) видно, что $a((f,x))$ зависит только от f (от x не зависит), откуда в силу формулы (1.5) следует, что для функции $a(\cdot)$ при всяком $b \in B$ выполнено равенство (В.1.1) (т. е. что функция $a(\cdot): B \to R^+$ инвариантна относительно отображения $\chi: B \to B$). Из определения римановой метрики на векторном расслоении (E, p, B) (см. фразу, содержащую формулу (1.3)) следует, что отображение $X: E \to E$, определенное формулой (1.4), и функция $a(\cdot): B \to R^+$, определенная формулой (1.53), удовлетворяют при всяком $b \in B$ неравенству (В.1.2).

Итак, построено векторное расслоение (E, p, B) со слоем R^n и базой В (В — полное метрическое пространство с расстоянием $d_B(\cdot\,,\,\cdot)$). На этом векторном расслоении построена риманова метрика Δ.

Таким образом, выполнены все условия п. 1.1 введения. Построены также автоморфизм (X, χ) этого векторного расслоения и функция $a(\cdot): B \to R^+$ такая, что для всякого $b \in B$ имеют место формулы (В.1.1) и (В. 1.2). Таким образом, выполнены все условия п. 1.2 введения. Положив, как в п. 1.3 введения,

$$(X(m),\ \chi(m)) \underset{\text{def}}{=} (X^m, \chi^m) \qquad (1.54)$$

при всяком $m \in N$, получаем семейство морфизмов векторного расслоения (E, p, B). Это семейство морфизмов удовлетворяет условию, сформулированному во введении статьи [1] и воспроизведенному в п. 1.3 введения (последнее утверждение доказано в п. 1.4 введения).

Следовательно, для этого семейства морфизмов выполнены условия лемм 1—5 и теорем 1—3 [1].

В следующем параграфе приводятся формулировки теорем 1—3 [1] специально для построенного здесь семейства морфизмов. Эти формулировки даются так, чтобы их можно было понять, не заглядывая ни во введение, ни в § 1, ни в предыдущие статьи цикла. Для доказательства теорем, приводимых в § 2, осталось сделать два простых замечания.

З а м е ч а н и е 1. В доказательствах теорем 1—3 [1] использовалась на самом деле не полнота метрического пространства В, а следующее условие: В — топологическое пространство, метризуемое и полное относительно некоторой метрики. Это замечание в совокупности с приведенным в п. 1 § 1 замечанием о том, что метрики $d_B(\cdot\,,\,\cdot)$ *и* $\tilde{d}_B(\cdot\,,\,\cdot)$

индуцируют на В одну и ту же топологию, позволяет формулировать результаты в § 2 с помощью метрики $\tilde{d}_S(\cdot\ ,\ \cdot)$ (которая определяется более короткой формулой, чем метрика $d_S(\cdot\ ,\ \cdot)$).

Замечание 2. В приведенной в этом параграфе конструкции пространство (S, d_S) можно заменить пространством (S_j, d_1) (где j — произвольный элемент множества $\boldsymbol{S}$**).** Прежде чем описывать эту замену, напомним некоторые сведения.

1. Для всякого $j \in S$ множество S_j определяется как подмножество множества $\boldsymbol{S}$**,** состоящее из диффеоморфизмов, удовлетворяющих неравенству (в [6] формула (54)) $\sup\limits_{x \in V^n} \rho(fx, jx) < +\infty$.

В множестве S_j вводится расстояние $d_1(\cdot\ ,\ \cdot)$ (в [6] формула (55)) такое, что метрическое пространство (S_j, d_1) полно (см. [7], предложение 2). В множестве S_j вводится также другое расстояние $\tilde{d}_1(\cdot\ ,\ \cdot)$, определяемое формулой (в [6] формула (56)):

$$\tilde{d}_1(f_1, f_2) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(f_1 x, f_2 x)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u df_{2x} - df_{1x} \right\| \right\}$$

(при всяких $f_1 \in S_j$, $f_2 \in S_j$; смысл обозначений разъяснен выше после формулы (В.2.5)).

При всяком $j \in S$ метрика $d_1(\cdot\ ,\ \cdot)$ и метрика $\tilde{d}_1(\cdot\ ,\ \cdot)$ индуцируют на S_j одну и ту же топологию (см. [6], п. 5).

При всяком $j \in S$ топология, индуцированная на S_j метрикой $d_1(\cdot\ ,\ \cdot)$, сильнее топологии, индуцированной на S_j метрикой $d_S(\cdot\ ,\ \cdot)$; это следует из неравенства

$$d_S(g, h) \leqslant d_1(g, h), \tag{1.55}$$

верного для всяких $g \in S_j$, $h \in S_j$ (см. [6], формулу (58)).

Закончив на этом напоминание нужных сведений, опишем те изменения, которые нужно проделать в тексте этого параграфа, предшествующем замечанию 2, чтобы перейти от пространств (S, d_S), $(S, \tilde{d}_S)$ к пространствам (S_j, d_1), $(S_j, \tilde{d}_1)$.

2. Фиксируем произвольное $j \in S$. 1) В п. 1 § 1 а) заменяем *S* на S_j, всюду, где *S* не индекс; б) индекс *S* заменяем (всюду, кроме тех случаев, когда *S* есть индекс у 1) индексом 1; в) символ 1_S заменяем символом 1_{S_j}; г) первую ссылку на п. 2.1 введения (эта ссылка идет сразу после формулы (1.2')) заменяем ссылкой на п. 1 замечания 2.

2) В п. 2 § 1 заменяем *S* на S_j всюду до формулы (1.11). Формула (1.11) заменится формулой

$$d_1(f_k, \overline{f}) \underset{k \to \infty}{\to} 0, \tag{1.56}$$

из которой в силу неравенства (1.55) следует формула

$$d_S(f_k, \overline{f}) \underset{k \to \infty}{\to} 0; \tag{1.57}$$

ссылки на формулу (1.11) будем всюду, где они встречаются, трактовать как ссылки на одну из формул (1.56), (1.57).

3) В текст § 1 после формулы (1.11) до замечания 2 внесем следующие изменения: а) индекс *S* заменим индексом 1 в формулах (1.19'), (1.44') и в замечании 1 (и только в этих местах); б) букву $\boldsymbol{S}$ заменим на S_j в фразе, содержащей формулы (1.20), (1.21), в подпунктах д), е) п. 2 и в п. 3 (повсюду, где она встречается в указанных местах) и только в этих местах.

Подчеркнем, что в остальном текст оставляем без изменений.

§ **2**. Пусть $\boldsymbol{V^n}$ — связное полное n-мерное риманово многообразие*. Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов F класса C^1, отображающих (взаимно-однозначно) $\boldsymbol{V^n}$ на $\boldsymbol{V^n}$ и удовлетворяющих условию**

$$\sup_{x\in V^n}\max\left\{\left\|df_x\right\|,\left\|(df_x)^{-1}\right\|\right\}<+\infty\,.$$

Через $\widetilde{d}$ обозначается расстояние в S, определяемое формулой

$$\widetilde{d}(f,g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{\min\left\{s(u),\left[1+\rho(x,x_0)\right]^{-1}\right\}+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|\right\};\tag{2.1}$$

здесь x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n; $G(y,z)$ — множество всех кусочно-гладких кривых (путей) и, идущих в многообразии V^n из точки z в точку у, $\rho(\cdot\,,\,\cdot)$ — расстояние на V^N; $s(u)$ —длина кривой (пути) $\boldsymbol{u}$; $\varphi_u:T_zV^n\to T_yV^n$ — преобразование, состоящее в параллельном перенесении вдоль кривой (пути) $u\in G\,(y,z)$ (через T_xV^n обозначается касательное пространство многообразия V^n в точке x).

Через $S\times V^n$ обозначается произведение топологических пространств S (с топологией, индуцированной метрикой $\widetilde{d}(\cdot\,,\,\cdot)$) и V^n.

Для всяких $f\in S,\ x\in V^n,\ k\in\{1,...,n\}$ определяется показатель Ляпунова***:

$$\lambda_{n-k+1}((f,x))=\min_{R^k\in G_k(T_xV^n)}\max_{\mathfrak{X}\in R^k_*}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\left|df_x^m\mathfrak{X}\right|,\tag{2.2}$$

где $G_k(T_xV^n)$ — множество всех k-мерных векторных подпространств касательного пространства T_xV^n, а через R^k_* обозначается $R^k\setminus\{0\}$.

Теорема 1. При всяком $i\in\{1,...,n\}$ функция $\lambda_i(\cdot):S\times V^n\to R$ есть бэровская функция второго класса.

Теорема 2. В пространстве $S\times V^n$ найдется всюду плотное множество D типа G_δ такое, что при всяком $i\in\{1,...,n\}$ функция* $\lambda_i\big|_D(\cdot):D\to R$ непрерывна.

Теорема 3. В пространстве $S\times V^n$ найдется всюду плотное множество С типа G_δ такое, что при всяком $i\in\{1,...,n\}$ функция $\lambda_i(\cdot):S\times V^n\to R$ полунепрерывна сверху в каждой точке $(f,x)\in C$.

Замечание 1. Если V^n компактно (т. е. V^n — замкнутое многообразие), то метрика $\widetilde{d}(\cdot\,,\,\cdot)$, определенная формулой (2.1), индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\widetilde{d}_1(\cdot\,,\,\cdot)$, определяемая формулой

$$\widetilde{d}_1(f,g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{s(u)+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|\right\}.$$

Замечание 2. Пусть $V^n=E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\widetilde{d}(\cdot\,,\,\cdot)$, определенная формулой (2.1), индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\widetilde{\widetilde{d}}(\cdot\,,\,\cdot)$, определяемая формулой**: $\widetilde{\widetilde{d}}(f,g)=\left|fx_0-gx_0\right|+\sup_{x\in E^n}\left\|df_x-dg_x\right\|$.

---

* Предполагается, что многообразие принадлежит классу C^2, риманова метрика – классу C^1.

** $\|\ \cdot\ \|$— норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой. Через df_x обозначается производная отображения f в точке x.

*** В силу (1.1), (1.3) — (1.5), (1.54) формула (2.2) есть конкретизация (для построенного в § 1 этой статьи семейства морфизмов) формулы, приведенной в [1, с. 1408] и подробно обсужденной в [4, § 1]. Многие авторы вместо λ_{n-k+1} пишут λ_k.

* Через $\lambda_i\big|_D(\cdot)$ обозначается сужение функции $\lambda_i(\cdot)$ на множество D.

Для всякого $j \in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов F, удовлетворяющих условию $\sup_{x \in V^n} \rho(fx, jx) < +\infty$ (Если V^n компактно (т. е. замкнутое многообразие), то S_j=S для всякого $j \in S$.)

Через $\widetilde{d}_1$ обозначается расстояние в S_j, определяемое формулой

$$\widetilde{d}_1(f,g) = \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx,gx)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u dg_x - df_x \right\| \right\}. \tag{2.3}$$

Через $S_j \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_j (с топологией, индуцированной метрикой $\widetilde{d}_1(\cdot\ ,\ \cdot)$) и V^n.

Для всякого $j \in S$ для всяких $j \in S_j$, $x \in V^n$, $k \in \{1,...n\}$ определяется показатель Ляпунова формулой (2.2).

Для всякого $j \in S$ имеют место следующие три теоремы.

Теорема 1_j. При всяком $i \in \{1,...n\}$ функция $\lambda_i(\cdot): S_j \times V^n \to R$ есть бэровская функция второго класса.

Теорема 2_j. В пространстве $S_j \times V^n$ найдется всюду плотное множество D_j типа G_δ такое, что при всяком $i \in \{1,...n\}$ функция $\lambda_i\big|_{D_j}(\cdot): D_j \to R$ непрерывна.

Теорема 3_j. *В* пространстве $S_j \times V^n$ найдется всюду плотное множество C_j типа G_δ такое, что при всяком $i \in \{1,...n\}$ функция $\lambda_i(\cdot): S_j \times V^n \to R$ полунепрерывна сверху в каждой точке $(f,x) \in C_j$.

Замечание. Пусть $V^n = E^n$. Тогда формула (2.3) записывается в виде***: $\widetilde{d}_1(f,g) = \sup_{x \in E^n} \left(|fx - gx| + \|df_x - dg_x\| \right)$.

Дополнение к статье

Подобно тому как заменой пространства $(S, \widetilde{d}_S)$ пространством $(S_j, \widetilde{d}_1)$ получена здесь модификация результатов этой статьи о классах Бэра и о типичности полунепрерывности сверху показателей Ляпунова диффеоморфизмов в пространстве $(S, \widetilde{d}_S)$, можно получить модификацию теорем [3] об автономных системах дифференциальных уравнений.

Для этого, зафиксировав произвольное векторное поле J класса C^1 на V^N, удовлетворяющее условию $\|\nabla J\| < +\infty$ рассмотрим множество S_j всех векторных полей F класса C^1 на V^n удовлетворяющих условию $\| \nabla F \| < +\infty$ и дополнительному условию $\|F - J\| < +\infty$.
Здесь приняты следующие обозначения:

$$\| \nabla H \| \underset{def}{=} \sup_{x \in V^n} \| \nabla H(x) \|, \|H\| \underset{def}{=} \sup_{x \in V^n} |H(x)|$$

для всякого векторного поля H класса C^1 на V^n.
Множество S_J наделим структурой метрического пространства, определив расстояние между всякими векторными полями $F \in S_J$, $G \in S_J$ формулой $d_1(F,G) \underset{def}{=} \|F - G\| + \|\nabla(F - G)\|$. Частный случай этой конструкции (случай $J = 0$) рассмотрен в [3], § 1 п. 5 (множество S_J при $J = 0$ обозначалось в [3] через S , а расстояние, обозначенное здесь через $d_1(\cdot,\cdot)$, обозначалось в [3] через $d_1(\cdot,\cdot)$.

** В случае $V^n = E^n$ все касательные пространства стандартным образом отождествляются с E^n; после этого отождествления разность $df_x - dg_x$ (и норма этой разности) приобретает смысл.

*** См. предыдущую сноску.

Примечание. В [1], с. 1416, строка 4 сверху, вместо [3] должно быть [5]. В [4], в левой части второго равенства формулы (32) вместо $\mu_k^{(m,q)}$ должно быть $\mu_k^{(m,q)}(b)$.

Литература

1. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408—1416.

2. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. II.—Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1587—1598.

3. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 10, с. 1766—1785.

4. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IV.—Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 3, с. 431—468.

5. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. V—Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1394—1410.

6. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VI.—Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 957—978.

7. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VII —Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 957—978.

8. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970.

9. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.— М.: Мир, 1970.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 2 марта 1982 г.