УДК 517.926.4

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. IV

Введение. Как и в предыдущих статьях цикла (см. [1—3]), рассматриваем семейство морфизмов

$$(X(m),\ \chi(m)) : (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$$

($m \in \mathbf{N}$) некоторого векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ со слоем $\mathbf{R}^n$; база B — полное метрическое пространство; на векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ фиксируем некоторую риманову метрику (см. [4], с. 58—59); предполагаем, что отображения $X(m)$ невырождены на слоях, т. е. что при всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ линейное отображение

$$X(m,\ b) : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi(m)\, b),$$

определяемое как сужение на слой $p^{-1}(b)$ отображения $X(m)$, имеет обратное:

$$[X(m,\ b)]^{-1} : p^{-1}(\chi(m)\, b) \to p^{-1}(b);$$

более того, требуем, чтобы существовала функция $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$ такая, чтобы для всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ выполнялось неравенство

$$\max\,(\| X(m,\ b) \|,\ \ \| [X(m,\ b)]^{-1} \|) \leqslant \exp\,(m a(b)) \tag{1}$$

(где нормы линейных операторов стандартным образом определяются через нормы в слоях, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой).

В § 1, 2 изложение ведется, исходя из заданного семейства морфизмов

$$(X(m),\ \chi(m)) : (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$$

($m \in \mathbf{N}$), удовлетворяющего сформулированным выше требованиям. В § 3 на это семейство накладываются дополнительные ограничения. § 1 и § 2 носят вспомогательный характер. Формулировка основного результата содержится в § 4.

§ 1. Некоторые определения и обозначения, которыми мы будем пользоваться в следующих параграфах, воспроизведены из [1].

Показатели Ляпунова определяются при всяких $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ формулой

$$\lambda_k(b) \underset{\mathrm{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\mathbf{R}^n)} \ \max_{\substack{\xi \in \mathbf{R}^{n-k+1} \\ \xi \neq 0}} \ \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{m} \ln |\, X(m,\ b)\, \xi\,| \tag{2}$$

здесь $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$, $G_k(\mathbf{R}^n)$ — грассманово многообразие k-мерных линейных пространств пространства $G_k(\mathbf{R}^n)$; под встречающимся далее выражением $X_{\mathbf{R}^k}(s,\ b)$ понимается сужение линейного оператора $X(s,\ b) : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi(s)\, b)$ на линейное подпространство $\mathbf{R}^k$ пространства $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$; очевидно, $\lambda_1(b) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(b)$).

Доказательство корректности приведенного, определения (доказательство утверждения о том, что в формуле (2) можно писать max вместо sup и min вместо inf, т. е. что соответствующие sup и inf достигаются) изложено в [1] (п. 4 доказательства леммы 5); там использована редукция к утверждениям, доказанным в [5] для классической ситуации. Хотя приведенное в [1] доказательство является вполне исчерпывающим, здесь мы приведем непосредственное доказательство этого утверждения. Сделаем это потому, что в дальнейшем изложении нам часто придется пользоваться некоторыми вспомогательными утверждениями по существу столь же первоначального характера, как и это, но не всегда в готовом виде встречающимися в литературе в удобной для нас форме. В такой ситуации естественно изложить и доказательство этого утверждения не редукцией к известным, а непосредственно. Кроме того, не исключено, что эквивалентность определения показателей Ляпунова формулой (2) определению показателей Ляпунова, получаемому непосредственным перенесением на рассматриваемую ситуацию оригинального определения Ляпунова (см. [5]), могла показаться не столь очевидной. Проведем это перенесение и подробно докажем эту эквивалентность.

О п р е д е л е н и е 1.

$$\lambda_k(b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\mathbf{R}^n)} \sup_{\substack{\xi \in \mathbf{R}^{n-k+1} \\ \xi \neq 0}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\,\xi| \tag{3}$$

(здесь $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$, $G_k(\mathbf{R}^n)$ — грассманово многообразие k-мерных линейных подпространств векторного пространства $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$).

Формула (3) отличается от формулы (2) только тем, что вместо $\min$ стоит $\inf$, а вместо $\max$ стоит $\sup$; ниже мы докажем (иначе, чем в [1], что $\inf$ (соответственно $\sup$) в формуле (3) достигается, и его поэтому можно заменить на $\min$ (соответственно на $\max$).

О п р е д е л е н и е 2. Пусть фиксировано произвольное $b \in B$.

Среди всех базисов $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ векторного пространства $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$ возьмем такой, для которого сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\,\xi_i|$$

принимает наименьшее значение (такой базис называется нормальным) Изменим, если нужно, нумерацию векторов $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ чтобы сделать ее такой, что

$$\lambda\,(b,\ \xi_i) \geqslant \lambda\,(b,\ \xi_{i+1})\ \ (i \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}),$$

где

$$\lambda\,(b,\ \xi) \underset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\,\xi|. \tag{4}$$

Положим по определению

$$\lambda_k^*(b) \underset{\text{def}}{=} \lambda\,(b,\ \xi_k)\ \ (k \in \{1,\ \ldots,\ n\}).$$

Ниже докажем, что $\lambda_k^*(b) = \lambda_k(b)$ при всяких $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$.

Определение 2 настолько близко по форме к определению Ляпунова (см. [5]; Ляпунов называл — $\lambda_k^*(b)$ характеристичными числами), что его естественно считать непосредственным перенесением определения Ляпунова на рассматриваемую здесь ситуацию. Нам нужно доказать корректность определения 2, т. е. доказать, что:

а) при всяком $b \in B$ существует базис $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ векторного пространства $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda\,(b,\ \xi_i) \inf_{\{\xi_1{}',\ \ldots,\ \xi_n{}'\} \in \Xi} \sum_{i=1}^{n} \lambda\,(b,\ \xi_i{}')$$

(где Ξ — множество всех базисов векторного пространства $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$) (такой базис называется н о р м а л ь н ы м);

б) для всяких $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, число $\lambda\,(b,\ \xi_i)$ не зависит от выбора нормального базиса, если векторы ξ_i нормального базиса занумерованы в порядке невозрастания чисел $\lambda\,(b,\ \xi_i)$.

Прежде чем доказывать утверждения а) и б), докажем несколько предложений.

П р е д л о ж е н и е 1. *Из неравенства* (*1*) *следует*: *для всякого ненулевого вектора* $\xi \in p^{-1}(b)$

$$\lambda\,(b,\ \xi) \underset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\,\xi|$$

есть число (а не $+\infty$ *или* $-\infty$*), причем это число принадлежит отрезку* $[-a\,(b),\ a\,(b)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . С одной стороны,

$$X(m,\ b)\leqslant \|\,X(m,\ b)\,\|\cdot|\,\xi\,|\underset{(1)}{\leqslant}\exp\,(ma\,(b))\cdot|\,\xi\,|,$$

откуда

$$\lambda\,(b,\ \xi)\underset{\mathrm{def}}{=}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\ln|\,X(m,\ b)\,\xi\,|\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\left(a\,(b)+\frac{1}{m}\ln|\,\xi\,|\right)=a\,(b).$$

С другой стороны,

$$|\,X(m,\ b)\,\xi\,\|\geqslant\|\,[X(m,\ b)]^{-1}\,\|^{-1}|\,\xi\,|\underset{(1)}{\geqslant}$$

$$\underset{(1)}{\geqslant}\exp\,(-ma\,(b))\cdot|\,\xi\,|,$$

откуда

$$\lambda\,(b,\ \xi)\underset{\mathrm{def}}{=}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\ln|\,X(m,\ b)\,\xi\,\|\geqslant$$

$$\geqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\left(-a\,(b)+\frac{1}{m}\ln|\,\xi\,|\right)=-a\,(b).$$

Предложение 1 доказано.

Всюду далее в § 1, 2 неравенство (1) будет предполагаться выполненным.

П р е д л о ж е н и е 2. *Для всякого ненулевого вектора* $\xi\in p^{-1}(b)$ *и всякого вещественного числа* $\alpha\neq 0$ *показатель* $\lambda\,(b,\ \xi)\underset{\mathrm{def}}{=}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\ln|\,X(m,\ b)\,\xi\,|$ *удовлетворяет равенству*

$$\lambda\,(b,\ \alpha\xi)=\lambda\,(b,\ \xi).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о .

$$\lambda\,(b,\ \alpha\xi)\underset{\mathrm{def}}{=}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\ln|\,X(m,\ b)\,\alpha\xi\,|=$$

$$=\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\ln\,(|\,\alpha\,|\cdot|\,X(m,\ b)\,\xi\,|)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\left(\frac{1}{m}\ln|\,\alpha\,|+\right.$$

$$\left.\frac{1}{m}\ln|\,X(m,\ b)\,\xi\,|\right)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\ln|\,X(m,\ b)\,\xi\,|\underset{\mathrm{def}}{=}\lambda\,(b,\ \xi).$$

Предложение 2 доказано.

П р е д л о ж е н и е 3. *Для всяких двух векторов* ξ, $\eta\in p^{-1}(b)$ *таких, что* $\xi\neq 0$, $\eta\neq 0$, $\xi+\eta\neq 0$, *имеет место неравенство*

$$\lambda\,(b,\ \xi+\eta)\leqslant\max\,(\lambda\,(b,\ \xi),\ \lambda\,(b,\ \eta)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о .

$$\lambda(b,\ \xi+\eta) \underset{\text{def}}{=} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)(\xi,\ \eta)| =$$
$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\xi + X(m,\ b)\eta| \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln (|X(m,\ b)\xi| + |X(m,\ b)\eta|) \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln [2\max (|X(m,\ b)\xi|,\ \ |X(m,\ b)\eta|)] =$$
$$= \varlimsup_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{m} \ln 2 + \frac{1}{m} \ln [\max (|X(m,\ b)\xi|,\ \ |X(m,\ b)\eta|)] \right\} =$$
$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln [\max (|X(m,\ b)\xi|,\ \ |X(m,\ b)\eta|)] =$$
$$= \varlimsup_{m\to\infty} \max \left(\frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\xi|,\ \ \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\eta| \right) =$$
$$= \max \left(\varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\xi|,\ \ \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\eta| \right) =$$
$$= \max (\lambda(b,\ \xi),\ \lambda(b,\ \eta))$$
(предпоследнее неравенство вытекает из легко проверяемого равенства
$$\varlimsup_{m\to\infty} \max (a_m,\ b_m) = \max (\varlimsup_{m\to\infty} a_m,\ \ \varlimsup_{m\to\infty} b_m),$$
справедливого для всяких двух последовательностей вещественных чисел $\{a_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, $\{b_m\}_{m\in\mathbf{N}}$. Предложение 3 доказано.

П р е д л о ж е н и е 4. *Если для некоторых двух векторов* ξ, $\eta \in p^{-1}(b)$ *таких, что* $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\xi+\eta \neq 0$, *выполнено строгое неравенство*
$$\lambda(b,\ \xi) > \lambda(b,\ \eta),$$
то $\lambda(b,\ \xi+\eta) = \lambda(b,\ \xi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку из предложения 3 следует, что
$$\lambda(b,\ \xi+\eta) \leqslant \max(\lambda(b,\ \xi),\ \lambda(b,\ \eta)) = \lambda(b,\ \xi),$$
то из предположения $\lambda(b,\ \xi+\eta) \neq \lambda(b,\ \xi)$ вытекало бы строгое неравенство $\lambda(b,\ \xi+\eta) < \lambda(b,\ \xi)$. Но тогда мы имели бы
$$\max(\lambda(b,\ \xi+\eta),\ \lambda(b,\ \eta)) < \lambda(b,\ \xi)$$
(напомним, что $\lambda(b,\ \eta) < \lambda(b,\ \xi)$, а отсюда в силу предложения 3 — неравенство
$$\lambda(b,\ \xi) \leqslant \max(\lambda(b,\ \xi+\eta),\ \lambda(b,\ -\eta)) =$$
$$= \max(\lambda(b,\ \xi+\eta),\ \lambda(b,\ \eta)) < \lambda(b,\ \xi)$$
(мы воспользовались здесь равенством $\lambda(b,\ -\eta) = \lambda(b,\ \eta)$, вытекающим из предложения 2); полученное противоречие доказывает, что предположение $\lambda(b,\ \xi+\eta) \neq \lambda(b,\ \xi)$ неверно. Предложение 4 доказано.

П р е д л о ж е н и е 5. *При всяком фиксированном* $b \in B$ *функция* $\lambda(b,\ \cdot): p^{-1}(b) \to \mathbf{R}$, *определенная формулой* (*4*), *принимает не более* n *различных значений* (*здесь* $p_*^{-1}(в)$ — *множество ненулевых векторов слоя* $p^{-1}(в)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим противное, т. е. предположим, что при некотором $b \in B$ найдутся векторы $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n+1} \in p_*^{-1}(b)$, для которых все числа $\lambda(b,\ \xi_i)$ ($i \in \{1,\ \ldots,\ n+1\}$) различны. Поскольку $\dim p^{-1}(b) = n < n+1$, то, изменив, если нужно, нумерацию векторов ξ_i, можно добиться того, чтобы вектор ξ_{n+1} можно было представить в виде

$$\xi_{n+1}=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\xi_i$$

где $\alpha_i\in\mathbf{R}$, причем $\alpha_i\neq 0$ при всяком $i\in\{1,\ \ldots,\ s\}$ ($s\leqslant n$), а векторы $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_s\}$ линейно независимы. В силу предложения 2 имеют место равенства

$$\lambda\,(b,\ \alpha_i\xi_i)=\lambda\,(b,\ \xi_i)\ (i\in\{1,\ \ldots,\ s\}).\tag{5}$$

В частности,

$$\lambda\,(b,\ \alpha_1\xi_1)=\lambda\,(b,\ \xi_1).$$

Предположим, что при некотором натуральном $r<s$ имеет место равенство

$$\lambda\left(b,\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\xi_i\right)=\max_{i\in\{1,\ \ldots,\ r\}}\lambda\,(b,\ \xi_i).\tag{6}$$

Поскольку

$$\lambda\,(b,\ \alpha_{r+1}\xi_{r+1})=\lambda\,(b,\ \xi_{r+1})\neq$$
$$\neq\max_{i\in\{1,\ \ldots,\ r\}}\lambda\,(b,\ \xi_i)=\lambda\left(b,\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\xi_i\right),$$

то в силу предложения 4 имеет место равенство

$$\lambda\left(b,\ \sum_{i=1}^{r+1}\alpha_i\xi_i\right)=$$
$$=\max\left(\lambda\left(b,\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\xi_i\right),\ \lambda\,(b,\ \alpha_{r+1}\xi_{r+1})\right)\underset{(5)-(6)}{=}$$
$$\underset{(5)-(6)}{=}\max\,(\max_{i\in\{1,\ \ldots,\ r\}}\lambda\,(b,\ \xi_i),\ \lambda\,(b,\ \xi_{r+1}))=$$
$$=\max_{i\in\{1,\ \ldots,\ r+1\}}\lambda\,(b,\ \xi_i).$$

Тем самым доказано по индукции равенство

$$\lambda\left(b,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\xi_i\right)=\max_{i\in\{1,\ \ldots,\ k\}}\lambda\,(b,\ \xi_i)$$

при всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ s\}$; положив в этом равенстве $k=s$, получаем

$$\lambda\,(b,\ \xi_{n+1})=\max_{i\in\{1,\ \ldots,\ s\}}\lambda\,(b,\ \xi_i),$$

следовательно, число $\lambda\,(b,\ \xi_{n+1})$ равно одному из чисел $\lambda\,(b,\ \xi_i)$ ($i\in\{1,\ \ldots,\ s\}\subset\{1,\ \ldots,\ n\}$), что противоречит сделанному предположению том, что все числа $\lambda\,(b,\ \xi_i)$ ($i\in\{1,\ \ldots,\ n+1\}$) различны. Предложение 5 доказано.

Пусть дано произвольное $b\in B$. Существование базиса $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda\,(b,\ \xi_i)=\inf_{\{\xi_1',\ \ldots,\ \xi_n'\}\in\Xi}\sum_{i=1}^{n}\lambda\,(b,\ \xi_i')$$

(где Ξ — множество всех базисов векторного пространства $\mathbf{R}^n=p^{-1}(b)$), т. е. нормального базиса, вытекает из предложения 5. В самом деле, из предложения 5 следует, что отображение Ξ в $\mathbf{R}$, ставящее в соответствие базису $\{\xi_1',\ \ldots,\ \xi_n'\}\in\Xi$ вещественное число $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda\,(b,\ \xi_i')$, принимает конечное множество значений и, следовательно, точная нижняя грань этого отображения достигается — совпадает с минимумом. Таким образом, утверждение а) доказано.

П р е д л о ж е н и е 6. *Для всяких* $b\in B$, $\eta\in p_*^{-1}(b)$ *и всякого нормального базиса*

$\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ *векторного пространства* $p^{-1}(b)$ *имеет место следующее утверждение*: *вектор* η *принадлежит векторному подпространству пространства* $p^{-1}(b)$, *порожденному множеством тех вектору* ξ_i *базиса* $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$, *для которых* $\lambda(b,\ \eta) \geqslant \lambda(b,\ \xi_i)$.

Доказательство. В самом деле, если в разложении $\eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$ по базису $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ какой-то коэффициент $\alpha_s \neq 0$, то, заменив в базисе $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ вектор ξ_s вектором η, снова получим базис, поскольку всякий вектор базиса $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ линейно выражается через векторы $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{s-1},\ \eta,\ \xi_{s+1},\ \ldots,\ \xi_n$:

$$\xi_i = \xi_i\ \ (i \neq s),\ \xi_s = \alpha_s^{-1}\left(\eta - \sum_{i \neq s} \alpha_i \xi_i\right).$$

Но если $\lambda(b,\ \eta) < \lambda(b,\ \xi_s)$, то этот новый базис имеет меньшую, чем у базиса $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$, сумму показателей, что противоречит нормальности базиса $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$. Следовательно, для всякого $s \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ такого, что $\lambda(b,\ \xi_s) > \lambda(b,\ \eta)$, коэффициент α_s равен нулю. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. *Пусть* $b \in B$ *и пусть* $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ *и* $\{\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n\}$ — *два нормальных базиса векторного пространства* $p^{-1}(b)$. *Пусть нумерация векторов этих базисов такова*, *что*

$$\begin{gathered}\lambda(b,\ \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(b,\ \xi_n),\\ \lambda(b,\ \eta_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(b,\ \eta_n).\end{gathered} \tag{7}$$

Тогда $\lambda(b,\ \xi_i) = \lambda(b,\ \eta_i)$ *при всяком* $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место неравенство

$$\lambda(b,\ \xi_k) \neq \lambda(b,\ \eta_k).$$

Пусть для определенности

$$\lambda(b,\ \xi_k) > \lambda(b,\ \eta_k) \tag{8}$$

(в случае противоположного неравенства в дальнейших рассуждениях надо поменять ролями базисы $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ и $\{\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n\}$). При всяких $i \geqslant k$, $j \leqslant k$ имеют место неравенства

$$\lambda(b,\ \eta_i) \underset{(7)}{\leqslant} \lambda(b,\ \eta_k) \underset{(8)}{<} \lambda(b,\ \xi_k) \underset{(7)}{\leqslant} \lambda(b,\ \xi_j).$$

Поэтому в силу предложения 6 $n-k+1$ линейно независимых векторов η_i $(i \geqslant k)$ принадлежат векторному подпространству пространства $p^{-1}(b)$, порожденному $n-k < n-k+1$ векторами ξ_j $(j \geqslant k+1)$. Это противоречие выведено из предположения, что предложение 7 неверно. Предложение 7 доказано.

Доказав предложение 7, мы тем самым доказали и утверждение б). Корректность определения 2 теперь полностью доказана.

Из предложения 5 непосредственно следует, что в формуле (3) $\sup$ и $\inf$ достигаются и поэтому вместо них можно писать соответственно $\max$ и $\min$, т. е. определение $\lambda_k(b)$ формулой (3) совпадает с определением $\lambda_k(b)$ формулой (2).

Напомним, что $\lambda_k^*(b)$ введено в определении 2.

Лемма. *При всяких* $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство*

$$\lambda_k(b) = \lambda_k^*(b).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть фиксировано произвольное $b \in B$. Выберем в $p^{-1}(b)$ нормальный базис $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, занумеровав векторы ξ_i в порядке невозрастания показателей:

$$\lambda(b, \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(b, \xi_n). \tag{9}$$

Тогда, согласно определению 2,

$$\lambda_k^*(b) \underset{\mathrm{def}}{=} \lambda(b, \xi_k) \quad (k \in \{1, \ldots, n\}). \tag{10}$$

При всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ обозначим через $\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ векторное подпространство векторного пространства $p^{-1}(b)$, порожденное векторами $\xi_k, \ldots, \xi_n$. Так как векторы $\xi_k, \ldots, \xi_n$ линейно независимы, то $\dim \mathbf{R}_0^{n-k+1} = n-k+1$. Из предложений 2, 3 следует, что при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ для всякого ненулевого вектора $\xi \in \mathbf{R}_0^{n-k+1}$ выполнено неравенство

$$\lambda(b, \xi) \leqslant \max_{i \in \{k, \ldots, n\}} \lambda(b, \xi_i) \underset{(9)}{=} \lambda(b, \xi_k) \underset{(10)}{=} \lambda_k^*(b).$$

Следовательно,

$$\lambda_k(b) \underset{(3),\ (4)}{\leqslant} \sup_{\substack{\xi \in \mathbf{R}_0^{n-k+1} \\ \xi \neq 0}} \lambda(b, \xi) \leqslant \lambda_k^*(b) \tag{11}$$

при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Предположим, что при некотором $k \in \{1, \ldots, n\}$ $\lambda_k(b) \neq \lambda_k^*(b)$, тогда в силу (11) имеет место строгое неравенство

$$\lambda_k(b) < \lambda_k^*(b).$$

Согласно формулам (3), (4) это означает, что существует $(n-k+1)$-мерное векторное подпространство $\mathbf{R}_1^{n-k+1}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ такое, что

$$\sup_{\substack{\xi \in \mathbf{R}_1^{n-k+1} \\ \xi \neq 0}} \lambda(b, \xi) < \lambda_k^*(b) \underset{(10)}{=} \lambda(b, \xi_k).$$

Из этого неравенства в силу предложения 6 и неравенства (9) вытекает что $(n-k+1)$-мерное векторное пространство $\mathbf{R}_1^{n-k+1}$ содержится в $(n-k)$-мерном векторном пространстве, порожденном векторами ξ_j $(j \in \{k+1, \ldots, n\})$. Мы вывели это противоречие из предположения, что при некотором $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место неравенство $\lambda_k(b) \neq \lambda_k^*(b)$. Лемма доказана.

Введем одно обозначение. Если для некоторого $b \in B$ и некоторого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ имеет место строгое неравенство $\lambda_{n-k}(b) > \lambda_{n-k+1}(b)$, то положим по определению

$$\mathbf{R}_0^k(b) \underset{\mathrm{def}}{=} E(\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(b, \xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)) \tag{12}$$

(напомним использованное здесь стандартное обозначение: в правой части (12) стоит множество всех тех точек ξ, принадлежащих слою $p^{-1}(b)$, для которых $\lambda(b, \xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)$). Напомним при этом, что $\lambda(b, \xi)$ при всяком $\xi \neq 0$ $(\xi \in p^{-1}(b))$ определено формулой (4). Заметим здесь, что в подобных случаях мы пишем 0; педантичнее было бы писать 0_b, где 0_b — нуль векторного пространства $p^{-1}(b)$). Такое обозначение часто встречается в тексте этого цикла статей (например, в формулах (2), (3)); мы надеемся, что оно не может вызвать недоразумений. Еще одно пояснение к формуле (12): мы полагаем, по определению $\lambda(b, 0) = -\infty$, что находится в согласии с (4) и формулой $\ln 0 = -\infty$; благодаря этому определению $0 \in \mathbf{R}_0^k(b)$ (поясним один раз подробнее: если не пользоваться упомянутым выше упрощением, то вместо $\lambda(b, 0) = -\infty$

надо было бы написать $\lambda(b,\ 0_b) = -\infty$, а вместо $0 \in \mathbf{R}_0^k(b)$ — $0_b \in \mathbf{R}_0^k(b)$. Отсюда и из предложений 2, 3 следует, что множество $\mathbf{R}_0^k(b)$), определенное формулой (12), есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$. Условие $\lambda_{n-k}(b) > \lambda_{n-k+1}(b)$ для установления этого факта, конечно, не используется. Это условие нужно для оправдания постановки верхнего индекса k в обозначении $\mathbf{R}_0^k(b)$ (верхний индекс у буквы $\mathbf{R}$ имеет в нашем изложении стандартный смысл — он равен размерности векторного пространства, обозначенного этой буквой). Дело в том, что имеет место следующее

Предложение 8. *При всяких* $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *размерность векторного подпространства*

$$E_k(b) \underset{\text{def}}{=} E(\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(b,\ \xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)) \tag{13}$$

слоя $p^{-1}(b)$ *удовлетворяет неравенству* $\dim E_k(b) \geqslant k$. *При этом* $\dim E_n(b) = n$, *а если* $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, *то* $\dim E_k(b) = k$ *в том и только в том случае, если имеет место строгое неравенство*

$$\lambda_{n-k}(b) > \lambda_{n-k+1}(b) \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ — произвольный нормальный базис слоя $p^{-1}(b)$, занумерованный в порядке невозрастания показателей:

$$\lambda(b,\ \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(b,\ \xi_n).$$

В силу предложения 6 векторное пространство $E_k(b)$ содержится в векторном подпространстве слоя $p^{-1}(b)$, порожденном теми векторами ξ_i нормального базиса $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$, для которых

$$\lambda(b,\ \xi_i) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b),$$

а, с другой стороны, векторное пространство $E_k(b)$ в силу (13) содержит все векторы ξ_i, удовлетворяющие этому неравенству. Тем самым получено следующее описание векторного подпространства $E_k(b)$ слоя $p^{-1}(b)$.

Обозначим через I_k множество всех тех $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, для которых $\lambda(b,\ \xi_i) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)$; $E_k(b)$ совпадает с векторным подпространством слоя $p^{-1}(b)$, порожденным векторами ξ_i ($i \in I_k$). Поскольку векторы ξ_i ($i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$) линейно независимы, то $\dim E_k(b) = \operatorname{card} I_k$ (через $\operatorname{card} A$ обозначается мощность (число элементов) множества A) для всякого $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Для всякого $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место включение

$$I_k \supset \{n-k+1,\ \ldots,\ n\},$$

так как

$$\lambda_{n-k+1}(b) = \lambda(b,\ \xi_{n-k+1}) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(b,\ \xi_n).$$

При написании этой цепочки, состоящей из равенства и неравенств, мы воспользовались тем, что в силу определения 2 и доказанной выше леммы для всякого $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место равенство $\lambda_i(b) = \lambda(b,\ \xi_i)$ учитывая, что векторы ξ_i занумерованы в порядке невозрастания показателей. В силу тех же причин для всякого $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ имеют место следующие соотношения:

$$\lambda(b,\ \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(b,\ \xi_{n-k}) = \lambda_{n-k}(b) \geqslant \lambda_{n-k+1}(b),$$

из которых следует, что если $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, то $\{1,\ \ldots,\ n-k\} \bigcap I_k = \varnothing$ в том и только в том случае, если выполнено условие (14). Отметим, что если условие (14) выполнено, то

$$\mathbf{R}_0^k(b) \underset{\text{def}}{=} E_k(b) = EV\{\xi_{n-k+1},\ \ldots,\ \xi_n\}$$

(векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$ порожденное векторами $\xi_{n-k+1},\ \ldots,\ \xi_n$). Так как при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеют место включения

$$\{1, \ldots, n\} \supset I_k \supset \{n-k+1, \ldots, n\},$$

а $\operatorname{card}\{n-k+1, \ldots, n\} = k$, то имеет место следующая совокупность утверждений:

1) при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место неравенство $\operatorname{card} I_k \geqslant k$;

2) $\operatorname{card} I_n = \operatorname{card}\{1, \ldots, n\} = n$;

3) при $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ равенство $\operatorname{card} I_k = k$ имеет место в том и только в том случае, если $\{1, \ldots, n-k\} \bigcap I_k = \varnothing$.

Напомним два утверждения, доказанные выше:

4) $\dim E_k(b) = \operatorname{card} I_k$ (при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$);

5) при $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ равенство $\{1, \ldots, n-k\} \bigcap I_k = \varnothing$ имеет место в том и только в том случае, если выполнено условие (14). Объединением утверждений 1)—5) заканчивается доказательство предложения 8.

При всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ определим функцию

$$v_k(\cdot) : G_k(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$$

(где под $\mathbf{R}^n$ понимается слой $p^{-1}(b)$; $G_k(\mathbf{R}^n)$ ·— грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$) формулой

$$v_k(\mathbf{R}^k) \underset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\xi \in \mathbf{R}^k \\ \xi \neq 0}} \lambda(b, \xi) = \max_{\substack{\xi \in \mathbf{R}^k \\ \xi \neq 0}} \lambda(b, \xi). \tag{15}$$

Напомним, что $\lambda(b, \xi)$ определено формулой (4), а $\sup$ достигается вследствие предложения 5, и поэтому вместо $\sup$ можно писать $\max$.

П р е д л о ж е н и е 9. *При всяких* $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *справедливы следующие три утверждения.*

1. *Найдется* $\mathbf{R}^n = G_k(\mathbf{R}^n)$, *где* $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$, *для которого*

$$v_k(\mathbf{R}^k) = \lambda_{n-k+1}(b).$$

2. *Для всякого другого* $\mathbf{R}^n = G_k(\mathbf{R}^n)$ *имеет место неравенство*: $v_k(\mathbf{R}^k) \geqslant \lambda_{n-k}(b)$.

3. *Если для некоторого* $b \in B$ *и некоторого* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *выполнено строгое неравенство* (*14*), *то* $\mathbf{R}_0^k(b)$), *определенное формулой* (12) *является единственной точкой минимума функции* $v_k(\cdot)$, *определенной формулой* (*15*), *причем*

$$v_k(\mathbf{R}_0^k(b)) = \lambda_{n-k+1}(b),$$

$$v_k(\mathbf{R}^k) \geqslant \lambda_{n-k}(b) > \lambda_{n-k+1}(b)$$

при всяком $\mathbf{R}^k \neq \mathbf{R}_0^k(b)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. На протяжении всего доказательства считаем фиксированным нормальным базис $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ слоя $p^{-1}(b)$, занумерованный в порядке невозрастания показателей:

$$\lambda(b, \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(b, \xi_n).$$

1. Положим $\mathbf{R}^k = EV\{\xi_{n-k+1}, \ldots, \xi_n\}$ (векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$, порожденное векторами $\xi_{n-k+1}, \ldots, \xi_n$). Тогда

$$v_k(\mathbf{R}^k) = \lambda_{n-k+1}(b).$$

Докажем это. В силу доказанной выше леммы

$$\lambda_{n-k+1}(b) = \lambda(b, \xi_{n-k+1}),$$

а так как $\lambda(b, \xi_{n-k+1}) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(b, \xi_n)$, то для всякого ненулевого вектора $\xi \in \mathbf{R}^k = EV\{\xi_{n-k+1}, \ldots, \xi_n\}$ в силу предложений 2, 3 имеет место неравенство

$$\lambda(b,\ \xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b).$$
Отсюда в силу формулы (15) вытекает неравенство
$$v_k(\mathbf{R}^k) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b).$$
Так как ненулевой вектор ξ_{n-k+1} принадлежит $\mathbf{R}^k = EV\{\xi_{n-k+1},\ \ldots,\ \xi_n\}$, а $\lambda(b,\ \xi_{n-k+1}) = \lambda_{n-k+1}(b)$, то в силу (15) имеет место неравенство
$$v_k(\mathbf{R}^k) \geqslant \lambda_{n-k+1}(b).$$
Сопоставлением этого неравенства с доказанным выше неравенством $v_k(\mathbf{R}^k) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)$ заканчивается доказательство утверждения 1.

2. Пусть $\mathbf{R}^n = G_k(\mathbf{R}^n)$ ($\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$) таково, что
$$v_k(\mathbf{R}^k) < \lambda_{n-k}(b).$$
Поскольку
$$\lambda(b,\ \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(b,\ \xi_{n-k}) = \lambda_{n-k}(b)$$
(мы снова воспользовались доказанной выше леммой и условием на нумерацию векторов ξ_i), то в силу формулы (15) и предложения 6 из неравенства $v_k(\mathbf{R}^k) < \lambda_{n-k}(b)$ вытекает включение
$$\mathbf{R}^k \subset EV\{\xi_{n-k+1},\ \ldots,\ \xi_n\}.$$
Строгое включение здесь невозможно по причине совпадения размерностей
$$(\dim \mathbf{R}^k = k = \dim EV\{\xi_{n-k+1},\ \ldots,\ \xi_n\}),$$
следовательно,
$$\mathbf{R}^k = EV\{\xi_{n-k+1},\ \ldots,\ \xi_n\}.$$
Тем самым доказано, что для всякого $\mathbf{R}^k \neq EV\{\xi_{n-k+1},\ \ldots,\ \xi_n\}$ имеет место неравенство
$$v_k(\mathbf{R}^k) \geqslant \lambda_{n-k}(b).$$
Для $\mathbf{R}^k = EV\{\xi_{n-k+1},\ \ldots,\ \xi_n\}$ в п. 1 доказано равенство
$$v_k(\mathbf{R}^k) = \lambda_{n-k+1}(b).$$
Утверждение 2 доказано.

3. Если для некоторого $b \in B$ и некоторого $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ выполнено строгое неравенство (14), то $\mathbf{R}_0^k(b)$, определенное формулой (12), совпадает с $EV\{\xi_{n-k+1},\ \ldots,\ \xi_n\}$ (это отмечено в доказательстве предложения 8); а тогда в силу доказанного в п. 1 имеет место равенство
$$v_k(\mathbf{R}_0^k(b)) = \lambda_{n-k+1}(b)$$
и в силу доказанного в п. 2 имеет место неравенство
$$v_k(\mathbf{R}^k) \geqslant \lambda_{n-k}(b) > \lambda_{n-k+1}(b)$$
для всякого $\mathbf{R}^k \neq \mathbf{R}_0^k(b)$. Утверждение 3 доказано. Предложение 9 доказано.

§ 2. Лемма 1. *Пусть для некоторого $b \in B$ и некоторого $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ имеет место строгое неравенство*
$$\lambda_{n-k}(b) > \lambda_{n-k+1}(b).$$
Тогда справедливы следующие утверждения.

A) Существует $m_0 \in \mathbf{N}$ такое, что для всякого $m \geqslant m_0$, для всякого k-мерного векторного подпространства $\mathbf{R}^k$ слоя $p^{-1}(b)$, отличного от подпространства $\mathbf{R}_0^k(b)$, определенного формулой (12), имеет место строгое неравенство[*]

---

[*] Через $X_{\mathbf{R}^k}$ обозначается сужение оператора X на подпространство $\mathbf{R}^k$.

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b)\|>\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m+t,\ b)\|.$$

Б) *При всяком* $\mathbf{R}^k\neq\mathbf{R}_0^k(b)$, *при всяком* $m\in\mathbf{N}$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b)\|\geqslant\lambda_{n-k}(b).$$

В) *Числовая последовательность*

$$\left\{\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m+t,\ b)\|\right\}_{m\in\mathbf{N}} \qquad (16)$$

монотонно не возрастает и при $m\to\infty$ *сходится к* $\lambda_{n-k+1}(b)$.

Доказательство 1. Пусть $\mathbf{R}^k$ — произвольное k-мерное векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$, отличное от $\mathbf{R}_0^k(b)$. Возьмем произвольный] нормированный вектор $\xi\in\mathbf{R}^k$. Для всякого $m\in\mathbf{N}$ имеем

$$\begin{gathered}\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b)\|\geqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(t,\ b)\|\geqslant\\ \geqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|X(t,\ b)\xi|\underset{(4)}{=}\lambda(b,\ \xi).\end{gathered} \qquad (17)$$

В формуле (17) первое неравенство вытекает из определения верхнего предела, второе— из определения нормы линейного оператора

$$\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b)\|\underset{\text{def}}{=}\sup_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^k\\ |\xi|=1}}|X(t,\ b)\xi|.$$

Второе неравенство в (17) верно и для всякого ненулевого (не обязательно нормированного) вектора $\xi\in\mathbf{R}^k$, потому что в силу предложения 2 имеет место равенство $\lambda(b,\ \xi)=\lambda(b,\ |\xi|^{-1}\xi)$. Следовательно, неравенство

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b)\|\geqslant\lambda(b,\ \xi)$$

имеет место для всякого ненулевого вектора $\xi\in\mathbf{R}^k$. Отсюда

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b)\|\geqslant\sup_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^k\\ |\xi|=1}}\lambda(b,\ \xi)\underset{(15)}{=}v_k(\mathbf{R}^k). \qquad (18)$$

В силу утверждения 3 предложения 9 при всяком $\mathbf{R}^k\neq\mathbf{R}_0^k(b)$ имеет место неравенство

$$v_k(\mathbf{R}^k)\geqslant\lambda_{n-k}(b). \qquad (19)$$

Утверждение Б) доказываемой леммы следует из формул (18) и (19).

2. а) Подставив в (18) $\mathbf{R}^k=\mathbf{R}_0^k(b)$ и воспользовавшись утверждением предложения 9, получаем неравенства

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m+t,\ b)\|\geqslant v_k(\mathbf{R}_0^k(b))=\lambda_{n-k+1}(b).$$

Таким образом, последовательность (16) ограничена снизу числом $\lambda_{n-k+1}(b)$.

б) При всяком $m\in\mathbf{N}$ имеет место следующая формула:

$$\begin{gathered}\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+1+t}\ln\|X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m+1+t,\ b)\|=\\ =\sup_{t\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m+t,\ b)\|\leqslant\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m+t,\ b)\|,\end{gathered}$$

означающая, что последовательность (16) монотонно не возрастает.

в) Для всякого $\xi\in\mathbf{R}_0^k(b)$ имеет место формула

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\ln|X(m,\ b)\,\xi|\underset{(4)}{=}\lambda(b,\ \xi)\underset{(12)}{\leqslant}\lambda_{n-k+1}(b).$$

Следовательно, для всяких $\varepsilon>0$, $\xi\in\mathbf{R}_0^k(b)$ найдется $C(\varepsilon,\ \xi)\in\mathbf{R}$ такое, что при всяком $m\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$|X(m,\ b)\,\xi|\leqslant C(\varepsilon,\ \xi)\exp[(\lambda_{n-k+1}(b)+\varepsilon)\,m]. \tag{20}$$

Выберем в каждом из слоев $p^{-1}(b)$, $p^{-1}(\chi(m)\,b)$ ($m\in\mathbf{N}$) векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ произвольный ортонормированный базис (ортонормированный в смысле евклидовой структуры, индуцированной в этом слое фиксированной в начале статьи римановой метрикой векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$). Выбор, этих базисов индуцирует при каждом $m\in\mathbf{N}$ изоморфизм

$$\varphi_m : p^{-1}(\chi(m)\,b)\to p^{-1}(b)$$

(изоморфизм слоев как евклидовых пространств). Рассмотрим при каждом $m\in\mathbf{N}$ линейный оператор $Y_m:\mathbf{R}_0^k(b)\to p^{-1}(b)$, определенный формулой

$$Y_m\underset{\text{def}}{=}\exp[-(\lambda_{n-k+1}(b)+\varepsilon)\,m]\,\varphi_m X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m,\ b). \tag{21}$$

Так как φ_m при каждом $m\in\mathbf{N}$ — изоморфизм слоев как евклидовых пространств, то из неравенства (20), выполненного для всяких $\varepsilon>0$, $\xi\in\mathbf{R}_0^k(b)$, $m\in\mathbf{N}$, следует неравенство

$$|Y_m\xi|\leqslant C(\varepsilon,\ \xi)$$

(для всяких $\varepsilon>0$, $\xi\in\mathbf{R}_0^k(b)$, $m\in\mathbf{N}$). Отсюда в силу теоремы Банаха—Штейнгауза (см. [6] с. 21), примененной к семейству линейных операторов $\{Y_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ (при всяком $m\in\mathbf{N}$ линейный оператор Y_m действует из конечномерного векторного пространства $\mathbf{R}_0^k(b)$ в конечномерное векторное пространство $p^{-1}(b)$, следовательно, при всяком $m\in\mathbf{N}$ линейный оператор Y_m непрерывен; конечномерные евклидовы векторные пространства полны; поэтому все условия теоремы Банаха—Штейнгауза здесь выполнены), следует: для всякого $\varepsilon>0$ найдется $C_\varepsilon\in\mathbf{R}^+$ такое, что $\|Y_m\|\leqslant C_\varepsilon$ при всяком $m\in\mathbf{N}$. Последнее утверждение в силу формулы (21), служащей определением операторов Y_m, и вследствие того, что Y_m при всяком $m\in\mathbf{N}$ — изоморфизм евклидовых пространств, эквивалентно следующему утверждению: для всякого $\varepsilon>0$ найдется $C_\varepsilon\in\mathbf{R}^+$ такое, что

$$\|X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m,\ b)\|\leqslant C_\varepsilon\exp[(\lambda_{n-k+1}(b)+\varepsilon)\,m] \tag{22}$$

при всяком $m\in\mathbf{N}$.

Сделаем небольшое отступление. Мы вывели утверждение, содержащее формулу (22), из утверждения, содержащего формулу (20), сославшись на теорему Банаха—Штейнгауза. Можно обойтись и без этой теоремы, рассуждая следующим (тоже хорошо известным) образом: возьмем какой-нибудь ортонормированный базис $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_k\}$ векторного пространства $\mathbf{R}_0^k(b)$ (слой $p^{-1}(b)$, а вместе с ним и его векторное подпространство $\mathbf{R}_0^k(b)$ наделены евклидовой структурой, поскольку на $(E,\ p,\ B)$ задана риманова метрика); разложив произвольный вектор $\xi\in\mathbf{R}_0^k(b)$ по этому базису, получим

$$|X(m,\ b)\,\xi|=\left|X(m,\ b)\left(\sum_{i=1}^k(\xi,\ \xi_i)\,\xi_i\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^k(\xi,\ \xi_i)X(m,\ b)\,\xi_i\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^k|(\xi,\ \xi_i)|\,|X(m,\ b)\,\xi_i|\leqslant|\xi|\sum_{i=1}^k|X(m,\ b)\,\xi_i|$$

(при выводе последнего неравенства мы воспользовались оценкой $|(\xi,\ \xi_i)|\leqslant|\xi|$). Отсюда

$$\| X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m,\ b) \| \leqslant \sum_{i=1}^{k} | X(m,\ b)\,\xi_i |; \tag{23}$$

из (23) и (20) следует неравенство (22), если положить $C_\varepsilon \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} C(\varepsilon,\ \xi_i)$. Отступление закончено.

Итак, доказано (притом двумя способами) утверждение, содержащее формулу (22). Из этого утверждения следует: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется m_ε (можно положить $m_\varepsilon \underset{\text{def}}{=} [\varepsilon^{-1} \ln C_\varepsilon] + 1$, где $[x]$ — целая часть x) такое, что для всякого $m > m_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{m} \ln \| X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m,\ b) \| \leqslant \frac{1}{m} \ln C_\varepsilon + \lambda_{n-k+1}(b) + \varepsilon < \lambda_{n-k+1}(b) + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $m_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такое, что для $m = m_\varepsilon + 1$ имеет место неравенство

$$\sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_0^k(b)}(m+t,\ b) \| \leqslant \lambda_{n-k+1}(b) + 2\varepsilon.$$

В сочетании с доказанными выше (в подпунктах а) и б)) двумя утверждениями (о монотонном невозрастании последовательности (16) и ее ограниченности снизу числом $\lambda_{n-k+1}(b)$) это означает, что при $m \to \infty$ последовательность (16) сходится к $\lambda_{n-k+1}(b)$. Утверждение В) леммы 1 доказано.

3. Утверждение А) леммы 1 непосредственно вытекает из утверждений Б) и В) этой леммы. Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Пусть для некоторого* $b \in B$ *и некоторого* $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *имеет место строгое неравенство*

$$\lambda_{n-k}(b) > \lambda_{n-k+1}(b).$$

Пусть заданы произвольное $m \in \mathbf{N}$, *произвольное* $\varepsilon > 0$ *и произвольная окрестность* U *точки* $\mathbf{R}_0^k(b)$ *в грассмановом многообразии* $G_k(\mathbf{R}^n)$, *где* $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$. *Тогда найдется* $s = s(m,\ \varepsilon,\ U) \in \mathbf{N}$ *такое, что для всякого* $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n) \setminus U$ *(где* $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$*) имеет место неравенство*

$$\max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ s\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \| > \lambda_{n-k}(b) - \varepsilon. \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда найдутся $m \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$ и замкнутое множество F в грассмановом многообразии $G_k(\mathbf{R}^n)$ (где $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$), не содержащее точку $\mathbf{R}_0^k(b)$, такие, что для всякого $s \in \mathbf{N}$ найдется $\mathbf{R}_s^k \in F$ такое, что имеет место неравенство

$$\max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ s\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_s^k}(m+t,\ b) \| \leqslant \lambda_{n-k}(b) - \varepsilon. \tag{25}$$

Так как F — замкнутое множество в $G_k(\mathbf{R}^n)$, а $G_k(\mathbf{R}^n)$ — компакт, то F — компакт и, следовательно, из последовательности $\{\mathbf{R}_s^k\}_{s \in \mathbf{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой (обозначим его через $\widehat{\mathbf{R}}^k$) принадлежит F. Фиксируем произвольное $q \in \mathbf{N}$; для всякого $s \geqslant q$ имеет место неравенство

$$\max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_s^k}(m+t,\ b) \| \leqslant \max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ s\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_s^k}(m+t,\ b) \|,$$

из которого в силу (25) вытекает неравенство

$$\max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_s^k}(m+t,\ b) \| \leqslant \lambda_{n-k}(b) - \varepsilon. \tag{26}$$

Перейдя в (26) к пределу по выбранной выше подпоследовательности, получим (воспользовавшись тем, что при всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$, $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ функция $\psi^{(k)}_{b,\, m,\, q}(\cdot) : G_k(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$, определенная равенством

$$\psi^{(k)}_{b,\, m,\, q}(\mathbf{R}^k) \underset{\text{def}}{=} \max_{t \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\, b) \|,$$

непрерывна) неравенство

$$\max_{t \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\widehat{\mathbf{R}}^k}(m+t,\, b) \| \leqslant \lambda_{n-k}(b) - \varepsilon.$$

Так как последнее неравенство доказано для всякого $q \in \mathbf{N}$, то

$$\sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\widehat{\mathbf{R}}^k}(m+t,\, b) \| \leqslant \lambda_{n-k}(b) - \varepsilon < \lambda_{n-k}(b).$$

Поскольку $\widehat{\mathbf{R}}^k \in F$, а $\mathbf{R}^k_0(b) \notin F$, то $\widehat{\mathbf{R}}^k \neq \mathbf{R}^k_0(b)$. Получено противоречие с утверждением Б) леммы 1. Лемма 2 доказана.

По векторному расслоению $(E,\, p,\, B)$ *для* всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ построим некоторое локально тривиальное расслоение со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$ и базой B, уже использовавшееся в пп. 3, 4 доказательства леммы 3 работы [1]; здесь опишем это расслоение в несколько иной форме, поэтому следующий далее (до формулировки леммы 3) текст можно использовать также и как пояснение к указанному тексту в [1].

Векторное расслоение $(E,\, p,\, B)$ со слоем $\mathbf{R}^n$ у нас фиксировано. Фиксируем произвольное $k \in \{1, \ldots, n\}$. Для всякого $b \in B$ обозначим через $S^{(k)}_b$ множество всех k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$. Через $S^{(k)}$ обозначим объединение всех этих множеств:

$$S^{(k)} \underset{\text{def}}{=} \bigcup_{b \in B} S^{(k)}_b.$$

Пусть задана произвольная точка $\hat{b} \in B$ и произвольное k-мерное векторное подпространство $\widehat{\mathbf{R}}^k$ слоя $p^{-1}(\hat{b})$ векторного расслоения $(E,\, p,\, B)$. Всякому базису $\{\hat{\xi}_1,\, \ldots,\, \hat{\xi}_k\}$ векторного пространства $\widehat{\mathbf{R}}^k$ и всякому набору окрестностей $U(\hat{\xi}_1)$ точек $\hat{\xi}_1$ ($i \in \{1,\, \ldots,\, k\}$) ($\hat{\xi}_1$ при всяком $i \in \{1,\, \ldots,\, k\}$ есть точка топологического пространства E, а $U(\hat{\xi}_1)$ есть окрестность этой точки в топологическом пространстве E) сопоставим множество всех тех k-мерных подпространств $\mathbf{R}^k$ слоев $p^{-1}(b)$ векторного расслоения $(E,\, p,\, B)$, которые обладают следующим свойством:

$$\mathbf{R}^k \bigcap U(\hat{\xi}_1) \neq \varnothing \text{ при всяком } i \in \{1,\, \ldots,\, k\}.$$

Объявив сопоставленную таким образом каждой точке $\widehat{\mathbf{R}}^k$ множества $S^{(k)}$ совокупность содержащих эту точку подмножеств множества $S^{(k)}$ базисом окрестностей этой точки, мы наделяем $S^{(k)}$ структурой топологического пространства. Далее через $S^{(k)}$ обозначается это топологическое пространство.

Определим отображение $p^{(k)} : S^{(k)} \to B$, положив для всякого $b \in B$, для всякого $s \in S^{(k)}_b$ по определению $p^{(k)}(s) = b$.

Непосредственно из определений вытекает, что так определенное расслоение $(S^{(k)},\, p^{(k)},\, B)$ является локально тривиальным расслоением со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$. При всяком $k \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$ естественно наделяется структурой левого $GL(n,\, \mathbf{R})$-пространства: если $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in GL(n,\, \mathbf{R})$, то $\varphi\mathbf{R}^k$ есть по определению образ множества $\mathbf{R}^k$ при отображении φ. Непосредственно из определений вытекает, что локально тривиальное расслоение $(S^{(k)}, p^{(k)}, B)$ есть расслоенное пространство со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$, ассоциированное с тем же локально тривиальным главным $GL(n, \mathbf{R})$-расслоением, с которым ассоциировано векторное расслоение (E, p, B) (см. [4] с. 69, 72—73, 97—98).

Л е м м а 3. *Пусть для некоторого* $b_0 \in B$ *и некоторого* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *имеет место строгое неравенство*

$$\lambda_{n-k}(b_0) > \lambda_{n-k+1}(b_0).$$

Тогда для всяких $m \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$, *для всякой окрестности* V *точки** $\mathbf{R}_0^k(b_0)$ *в пространстве* $S^{(k)}$ *найдется окрестность* W *точки* b_0 *в пространстве* B *такая, что для всякого* $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(W) \setminus V$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\, b) \| > \lambda_{n-k}(b_0) - \varepsilon,$$

где $b = p^{(k)}(\mathbf{R}^k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. При всяких $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\xi_k^{(m,\,q)} : S^{(k)} \to \mathbf{R}$, определенная равенством

$$\xi_k^{(m,\,q)} \underset{\mathrm{def}}{=} \max_{t \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\, b) \|$$

(где $b = p^{(k)}(\mathbf{R}^k)$), непрерывна. Это (впрочем, довольно очевидное) утверждение доказано в пп. 1—3 доказательства леммы 3 из [1].

2. Предположим, что условие леммы 3 выполнено, а заключение — нет. Если учесть, что B — метрическое пространство (и, следовательно, удовлетворяет первой аксиоме счетности), то можно сформулировать отрицание заключения леммы 3 следующим образом.

Найдутся $m_0 \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_0 > 0$ и открытая окрестность V_0 точки $\mathbf{R}_0^k(b_0)$ в пространстве $S^{(k)}$ такие, что найдется последовательность $\{\mathbf{R}_i^k\}_{i \in \mathbf{N}}$ ($\mathbf{R}_i^k \in S^{(k)}$ при всяком $i \in \mathbf{N}$) такая, что:

$$p^{(k)}(\mathbf{R}_i^k) \underset{i \to \infty}{\to} b_0$$

$\mathbf{R}_i^k \in V_0$ (при всяком $i \in \mathbf{N}$), при всяком $i \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m_0+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_i^k}(m_0+t,\, b_i) \| \leqslant \lambda_{n-k}(b_0) - \varepsilon_0, \tag{27}$$

где $b_i = p^{(k)}(\mathbf{R}_i^k)$ $(i \in \mathbf{N})$. Так как $(S^{(k)}, p^{(k)}, B)$ является, локально тривиальным расслоением с компактным слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$, а $p^{(k)}(\mathbf{R}_i^k) \underset{i \to \infty}{\to} b_0$, то из последовательности $\{\mathbf{R}_i^k\}_{i \in \mathbf{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для простоты изложения эту сходящуюся подпоследовательность будем обозначать $\{\mathbf{R}_i^k\}_{i \in \mathbf{N}}$ (как до сих пор обозначали последовательность), а ее предел обозначим через $\widehat{\mathbf{R}}^k$. Так как ни при каком $i \in \mathbf{N}$ точка $\mathbf{R}_i^k$ не принадлежит открытому множеству V_0, то

$$\widehat{\mathbf{R}}^k \notin V_0 \tag{28}$$

Поскольку $p^{(k)}(\mathbf{R}_i^k) \underset{i \to \infty}{\to} b_0$, то (в силу непрерывности проекции $p^{(k)}$) $p^{(k)}(\widehat{\mathbf{R}}^k) \underset{i \to \infty}{=} b_0$. Из неравенства (27) следует, что при всяком $q \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

---

* Напомним, что $\mathbf{R}_0^k(b)$ определено формулой (12).

$$\xi_k^{(m_0,\,q)}(\mathbf{R}_i^k) = \max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}} \frac{1}{m_0+t}\ln\|X_{\mathbf{R}_i^k}(m_0+t,\ b_i)\| \leqslant \lambda_{n-k}(b_0)-\varepsilon_0, \tag{29}$$

где $b_i = p^{(k)}(\mathbf{R}_i^k)$.

Так как при всяком $q\in\mathbf{N}$ функция $\xi_k^{(m_0,\,q)}(\cdot): S^{(k)}\to\mathbf{R}$ непрерывна (см. п. 1 доказательства), то из утверждения, содержащего неравенство (29), следует, что при всяком $q\in\mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\xi_k^{(m_0,\,q)}(\widehat{\mathbf{R}}^k) \underset{\text{def}}{=} \max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}} \frac{1}{m_0+t}\ln\|X_{\widehat{\mathbf{R}}^k}(m_0+t,\ b_0)\| \leqslant \lambda_{n-k}(b_0)-\varepsilon_0 \tag{30}$$

(напомним, что $p^{(k)}(\widehat{\mathbf{R}}^k) \underset{i\to\infty}{=} b_0$). Неравенство (30) выполнено при всяком $q\in\mathbf{N}$, поэтому

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}} \frac{1}{m_0+t}\ln\|X_{\widehat{\mathbf{R}}^k}(m_0+t,\ b_0)\| \leqslant \lambda_{n-k}(b_0)-\varepsilon_0 < \lambda_{n-k}(b_0)$$
$$(p^{(k)}(\widehat{\mathbf{R}}^k) = b_0). \tag{31}$$

Так как V_0 — окрестность точки $\mathbf{R}_0^k(b_0)$, то из (28) следует, что $\widehat{\mathbf{R}}^k \neq \mathbf{R}_0^k(b_0)$. Поэтому неравенство (31) противоречит утверждению Б) леммы 1. Лемма 3 доказана.

З а м е ч а н и е . Лемма 3 может быть усилена так, что усиление будет содержать в себе лемму 2. А именно справедлива следующая лемма 3′, доказательство которой мы опускаем по двум причинам: во-первых, лемма 3′ нигде в этой статье не будет использована, во-вторых, ее доказательство незначительно отличается от приведенного выше доказательства леммы 3.

Л е м м а 3′. *Пусть для некоторого $b_0\in B$ и некоторого $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ имеет место строгое неравенство*

$$\lambda_{n-k}(b_0) > \lambda_{n-k+1}(b_0).$$

Тогда для всяких $m\in\mathbf{N}$, $\varepsilon>0$ и всякой окрестности V точки $\mathbf{R}_0^k(b_0)$ в пространстве $S^{(k)}$ найдутся окрестность W точки b_0 в пространстве B и число $s\in\mathbf{N}$ такие, что для всякого $\mathbf{R}^k\in[p^{(k)}]^{-1}(W)\setminus V$ имеет место неравенство

$$\max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,s\}} \frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b)\| > \lambda_{n-k}(b_0)-\varepsilon,$$

где $b = p^{(k)}(\mathbf{R}^k)$.

Вместо осуществленного в этом параграфе плана изложения можно было бы осуществить такой план: после доказательства леммы 1 формулируется лемма 3′, дается ее доказательство (как уже было сказано, отличающееся от доказательства леммы 3 лишь в незначительных деталях), затем формулируется лемма 2 в качестве следствия леммы 3′.

В следующей далее лемме 4 речь идет о функциях

$$\mu_k^{(m)}(\cdot): B\to\mathbf{R}\ \ (m\in\mathbf{N},\ k\in\{1,\ \ldots,\ n\}),$$

определенных в [1]. Воспроизведем их определение:

$$\left.\begin{aligned} \mu_k^{(m)}(b) &\underset{\text{def}}{=} \lim_{q\to\infty}\mu_k^{(m,\,q)}(b),\\ \mu_k^{(m,\,q)}(b) &\underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(\mathbf{R}^n)} \max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}} \frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b)\| \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

(где под $\mathbf{R}^n$ понимается слой $p^{-1}(b)$). В [1] доказана корректность этого определения, т. е. доказано (лемма 1 и следующая за ее доказательством фраза в статье [1]), что при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $m\in\mathbf{N}$ существует $\lim\limits_{q\to\infty}\mu_k^{(m,\,q)}(b)$.

Заметим, что если следовать другому плану изложения, начало которого содержится в приведенном выше замечании, содержащем формулировку леммы 3′, то без леммы 4 можно обойтись; с другой стороны, изложение, как нам кажется, несколько выигрывает от помещения здесь леммы 4, представляющей некоторый самостоятельный интерес.

Отметим, что в отличие от лемм 1—3 этого параграфа, в которых было наложено условие (14), в лемме 4 не накладывается никаких условий, кроме сформулированных во введении к этой статье.

Л е м м а 4. *При всяких* $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$ *имеет место равенство*

$$\mu_k^{(m)}(b) = \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)} \sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|$$

где $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Прежде чем доказывать эту лемму, поясним в ней утверждается, в частности, что $\inf$ в выражении

$$\inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)} \sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|,$$

где $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$, достигается (т. е. в этом выражении вместо $\inf$ можно писать $\min$). Перейдем теперь непосредственно к доказательству сформулированной леммы.

Фиксируем произвольные $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$. Всюду далее в доказательстве этой леммы через $\mathbf{R}^n$ обозначается слой $p^{-1}(b)$.

1. Так как при всяком $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$, при всяком $q \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \| \leqslant \sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|,$$

то при всяком $q \in \mathbf{N}$ имеет место следующее утверждение:

$$\mu_k^{(m,\ q)}(b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)} \max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)} \sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|.$$

Отсюда в силу первой из формул (32) следует неравенство

$$\mu_k^{(m)}(b) \leqslant \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)} \sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|. \tag{33}$$

2. Так как для всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ функция $\psi_{b,\ m,\ q}^{(k)}(\cdot) : G_k(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ определенная равенством

$$\psi_{b,\ m,\ q}^{(k)}(\mathbf{R}^k) \underset{\text{def}}{=} \max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|,$$

непрерывна, то (напомним, что $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$ у нас сейчас фиксированы) при всяком $q \in \mathbf{N}$ имеем: $\inf$ во второй из формул (32) достигается в некоторой точке $\mathbf{R}_q^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$ (такая точка при данном $q \in \mathbf{N}$ может быть не единственной; берем любую из них). Из последовательности $\{\mathbf{R}_q^k\}_{q \in \mathbf{N}}$ выберем подпоследовательность $\{\mathbf{R}_{q_i}^k\}_{i \in \mathbf{N}}$, сходящуюся к некоторой точке $\tilde{\mathbf{R}}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$ (такой выбор возможен, так как $G_k(\mathbf{R}^n)$ — компакт). Для всякого $q \in \mathbf{N}$, для всякого $q_i \geqslant q$ имеем

$$\max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_{q_i}^k}(m+t,\ b) \| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q_i\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_{q_i}^k}(m+t,\ b) \| = \mu_k^{(m,\ q_i)}(b)$$

(напомним, что последнее равенство вытекает из приведенного выше определения $\mathbf{R}_q^k$). Перейдя здесь при всяком фиксированном $q \in \mathbf{N}$ к пределу при $i \to \infty$ (пользуясь отмеченной выше непрерывностью функций $\psi^{(k)}_{b,\,m,\,q}(\cdot): G_k(\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$, получаем: при всяком $q\in\mathbf{N}$ имеет место

$$\max_{t\in\{0,\,1,\,\dots,\,q\}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\tilde{\mathbf{R}}_k}(m+t,\ b)\|\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{i\to\infty}\mu_k^{(m,\,q_i)}(b)=\lim_{q\to\infty}\mu_k^{(m,\,q)}(b)\underset{(32)}{=}\lim_{i\to\infty}\mu_k^{(m)}(b).$$

Перейдя в последней формуле к пределу при $q\to\infty$, получаем неравенство

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}}\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\tilde{\mathbf{R}}^k}(m+t,\ b)\|\leqslant\mu_k^{(m)}(b),$$

сопоставлением которого с доказанным выше неравенством (33) заканчивается доказательство леммы 4.

§ 3. Наложим на семейство морфизмов $(X(m),\ \chi(m))$ $(m\in\mathbf{N})$ векторное расслоения $(E,\ p,\ B)$ некоторые ограничения.

Векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$ по-прежнему предполагается таким как указано во введении, а требования, предъявленные во введении к семейству морфизмов $(X(m),\ \chi(m))$ $(m\in\mathbf{N})$ этого векторного расслоения, заменяются теперь следующими:

а) $(X(1),\ \chi(1))$ — изоморфизм векторного расслоения* $(E,\ p,\ B)$. Вместо $X(1)$, $\chi(1)$, $X(1,\ b)$ иногда будем писать X, χ, $X[b]$ соответственно**

б) При всяком $m\in\mathbf{N}$ имеют место равенства

$$X(m)=X^m,\ \chi(m)=\chi^m.$$

Положив по определению

$$X(0)\underset{\text{def}}{=}1_E,\ \chi(0)\underset{\text{def}}{=}1_B,$$
$$X(-m)\underset{\text{def}}{=}(X^{-1})^m,\ \chi(-m)\underset{\text{def}}{=}(\chi^{-1})^m$$

(при всяком $m\in\mathbf{N}$), получаем семейство морфизмов $(X(m),\ \chi(m))=(X^m,\ \chi^m)$ $(m\in\mathbf{Z})$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$; при этом $\{\chi^m\}_{m\in\mathbf{Z}}$ (или, короче χ^m) — динамическая система (с дискретным временем) на B, $\{X^m\}_{m\in\mathbf{Z}}$ (или, короче, X^m) — динамическая система (с дискретным временем) на E (последняя называется в литературе линейным расширением первой).

в) Существует функция $a(\cdot): B\to\mathbf{R}^+$, инвариантная относительно динамической системы χ^m (т. е. такая, что $a(\chi^m b)=a(b)$ при всяких $b\in B$, $m\in\mathbf{Z}$) и такая, что для всякого $b\in B$ имеет место неравенство

$$\max(\|X[b]\|,\ \|[X[b]]^{-1}\|)\leqslant\exp(a(b)).$$

Из требований а)—в) индукцией по $m\in\mathbf{N}$ непосредственно выводится что для функции $a(\cdot)$, о которой говорится в требовании в), имеет место неравенство (1). Таким образом, наложенные здесь требования а)—в) являются усилением требований,

---

* Это означает следующее: $X(1)$ — гомеоморфизм E на E, $\chi(1)$ — гомеоморфизм B на B, $pX(1)=\chi(1)p$, причем сужение $X(1,\ b)$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения $X(1)$ при всяком $b\in B$ есть невырожденное линейное отображение слоя $p^{-1}(b)$ на слой $p^{-1}(\chi(1)b)$.

** Подчеркнем, что $X(m)$, $X[b]$ и Xe обозначают в этой статье совсем разные объекты: $X(m)$ — отображение $E\to E$, $X[b]$ — сужение на слой $p^{-1}(b)$ отображения X (таким образом, $X[b]$ при всяком $b\in B$ есть линейное отображение $p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi b)$; Xe — образ точки $e\in E$ при отображении X, таким образом, Xe при всяком $e\in E$ есть точка пространства E). В статье [2] встречалось обозначение $F^t(b)$ для того объекта, который здесь мы обозначили бы символом $F^t[b]$; для обозначения сужения на слой $p^{-1}(b)$ отображения X здесь введена квадратная скобка.

наложенных во введении на семейство морфизмов $(X(m),\ \chi(m))$ $(m\in\mathbf{N})$.

Каждое из семейств морфизмов, построенных в [2], удовлетворяет требованиям а)—в); фактически это было проверено (хотя и не сформулировано там явно) в [2] при описании конструкций этих семейств. То же самое относится к каждому из семейств морфизмов $(X(m),\ \chi(m))$ $(m\in\mathbf{N})$, построенных в [3], кроме семейства, построенного там в § 3.

Требование а) выполнено: для семейства, построенного в § 1 [2], непосредственно в силу определений, для семейств, построенных в § 4 [2] и в пп. 1—3 § 4 [3] также непосредственно в силу определений, а для остальных семейств (кроме построенного в § 3 [2]) — в силу теорем существования, единственности и непрерывной дифференцируемости по начальному значению решений дифференциальных уравнений.

Требование б) для всех семейств, построенных в [2, 3] (кроме семейств, построенных в § 3 и в пп. 4, 5 § 4 [3]), вытекает непосредственно из определений (с учетом известного тривиально доказываемого утверждения о том, что сдвиг решения автономного дифференциального уравнения является решением того же уравнения).

Требование в) для каждого семейства (кроме семейств, построенных в § 3 и в пп. 4, 5 § 4 [3]) выполняется с той же самой функцией $a(\cdot): B\to\mathbf{R}^+$, которая для каждого из этих семейств построена в [2, 3]; это требование там всюду проверено; инвариантность, относительно χ^m построенной для каждого из этих семейств функции $a(\cdot): B\to\mathbf{R}^+$ вытекает непосредственно из отмеченного в каждой из конструкций свойства функции $a(\cdot)$, состоящего в том, что значение $a(\cdot)$ в точке пространства $B=S_i\times\mathfrak{B}$ (в [2]) или пространства $B=S\times V^n$ (в [3]) зависит только от проекции I точки на первый сомножитель произведения $B=S_i\times\mathfrak{B}$ (или $B=S\times V^n$), но не от проекции на второй сомножитель.

Теперь изложим модификацию конструкции § 3 (и п. 4, § 4) статьи [3], которая позволит включить неавтономные системы в рассматриваемую теперь схему. В сущности, излагаемая ниже модификация служит основой (более последовательного, чем в § 3 [3], изучения неавтономных систем с позиций динамических систем.

Итак, изложим модификацию конструкции § 3 [3]. Построив векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$ и риманову метрику на нем точно так же, как в § 3 [3], отображения $X(m)$ и $\chi(m)$ $(m\in\mathbf{N})$ определим теперь иначе. Всякое $e\in E$ есть пара $(F(t),\ \varepsilon)$, где $F(t)\in S_{g_x^t}$, $\varepsilon\in TV^n$; полагаем по определению при всяком $m\in\mathbf{Z}$

$$X(m)\,e=X(m)\,(F(t),\ \varepsilon)\underset{\text{def}}{=}(F(m+t),\ df^m\varepsilon)$$

$f^m=f(m,\ 0)$, (не степень!), где $f(\theta,\ \tau)$ — оператор Коши дифференциального уравнения $\dot{x}=F(t,\ x)$, т. е. отображение, ставящее в соответствие значению всякого решения дифференциального уравнения при $t=\tau$ значение того же решения при $t=\theta$). Всякое $b\in B$ есть пара $(F(t),\ x)$, где $F(t)\in S_{g_x^t}$, $x\in V^n$; полагаем по определению при всяком $m\in\mathbf{Z}$

$$\chi(m)\,b=\chi(m)\,(F(t),\ x)\underset{\text{def}}{=}(F(m+t),\ f^m x).$$

Так определенное семейство морфизмов удовлетворяет требованиям а)—в), сформулированным в начале этого параграфа. Требование а) выполнено в силу теорем существования, единственности и непрерывной дифференцируемости по начальному значению решений дифференциальных уравнений. Требование б) вытекает непосредственно из только что приведенного определения отображений $X(m)$ и $\chi(m)$. Требование в) выполняется с той же самой функцией $a(\cdot): B\to\mathbf{R}^+$, определенной формулой

$$a\,(F(t),\,x) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\substack{x\in V^n\\ t\in\mathbf{R}}} \|\nabla F(t,\,x)\|,$$

что и в § 3 [3]. Инвариантность функции $a(\cdot)$ относительно определенной выше динамической системы χ^m вытекает непосредственно из только что воспроизведенного определения этой функции.

Таким образом установлено, что семейства морфизмов, удовлетворяющие требованиям а)—в), сформулированным в начале этого параграфа, охватывают все объекты, рассмотренные в [2, 3].

О п р е д е л е н и е 1. Назовем семейство морфизмов

$$(X(m),\,\chi(m)) : (E,\,p,\,B) \to (E,\,p,\,B)$$

($m\in\mathbf{N}$), удовлетворяющее требованиям а) — в), насыщенным, если для всякой точки $b\in B$, не являющейся неподвижной или периодической точкой динамической системы[*] χ^m, для всякого $\varepsilon>0$, для всякого базиса $\{\xi_1,\,\ldots,\,\xi_k\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i ($i\in\{1,\,\ldots,\,n\}$) (в пространстве E) найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $t\in\mathbf{N}$ и всяких невырожденных линейных операторов

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b) \to p^{-1}(\chi^m b)$$

($m\in\{1,\,\ldots,\,t\}$) таких, что при всяком $m\in\{1,\,\ldots,\,t\}$ имеет место неравенство

$$\|Y_m(X[\chi^{m-1}b])^{-1} - I\| + \|X[\chi^{m-1}b]\,Y_m^{-1} - I\| < \delta,$$

найдется точка $b'\in B$ такая, что[**] $d\,(b',\,b)<\varepsilon$, и для всякого $m\in\{0,\,1,\,\ldots,\,t\}$ найдется изоморфизм

$$\psi_m : p^{-1}(\chi^m b') \to p^{-1}(\chi^m b)$$

(изоморфизм слоев как евклидовых пространств) такой, что:

i) $\psi_0^{-1}\xi_i \in U(\xi_i)$ при всяком $i\in\{1,\,\ldots,\,n\}$;

ii) диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
p^{-1}(\chi^{m-1}b') & \xrightarrow[X[\chi^{m-1}b']]{} & p^{-1}(\chi^m b') \\
\downarrow\psi_{m-1} & & \downarrow\psi_m \\
p^{-1}(\chi^{m-1}b) & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}(\chi^m b)
\end{array}$$

коммутативна при всяком $m\in\{1,\,\ldots,\,t\}$.

Следующее определение, принадлежащее Перрону, приведем в форме, удобной для дальнейшего изложения.

О п р е д е л е н и е 2. Скажем, что семейство морфизмов $(X(m),\,\chi(m)) : (E,\,p,\,B)\to(E,\,p,\,B)$ ($m\in\mathbf{N}$) интегрально разделено с индексом $k\in\{1,\,\ldots,\,n-1\}$ в точке $b\in B$, если выполнена следующая совокупность условий:

i) имеет место строгое неравенство $\lambda_{n-k}(b)>\lambda_{n-k+1}(b)$;

ii) для некоторого[***] алгебраического дополнения[****] $\mathbf{R}^{n-k}$ векторного подпространства[*****] $\mathbf{R}_0^k(b)$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют числа[******] $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для

---

[*] Иными словами, точка $b\in B$ предполагается такой, что при всяком $m\neq 0$ **имеет** место неравенство $\chi(m)\,b\neq b$.

[**] $d\,(\cdot,\,\cdot)$ — расстояние между точками метрического пространства B.

[***] Определение перейдет в эквивалентное, если в этом месте слово «всякого» заменить словом «некоторого».

[****] Алгебраические дополнения $\mathbf{R}^{n-k}$ векторного подпространства $\mathbf{R}_0^k(b)$ слоя $p^{-1}(b)$ обозначаются далее так:

$$\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b)\ominus\mathbf{R}_0^k(b).$$

[*****] Напомним, что $\mathbf{R}_0^k(b)$ определено выше формулой (12).

всяких ненулевых векторов $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k(b)$, для всяких целых, неотрицательных[*] чисел t, s таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X(t)\,\xi| \cdot |X(s)\,\xi|^{-1} \geqslant \alpha \exp[\beta\,(t-s)] \cdot |X(t)\,\eta| \cdot |X(s)\,\eta|^{-1}.$$

§ 4. Теорема. *Пусть* $(X(m),\ \chi(m)):(E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$ $(m \in \mathbf{N})$ — *насыщенное*[**] *семейство морфизмов. Тогда в пространстве* B *найдется всюду плотное множество* C *типа* G_δ, *обладающее свойством: для всяких* $b \in C$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *имеет место альтернатива: либо*

$$\lambda_{n-k}(b) = \lambda_{n-k+1}(b),$$

либо рассматриваемое семейство морфизмов интегрально разделено[***] *с индексом* k *в точке* b.

Доказательство. 1. Для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $m \in \mathbf{N}$ обозначим через C_m^k множество точек непрерывности функции $\mu_k^{(m)}(\cdot): B \to \mathbf{R}$ (определение функций $\mu_k^{(m)}(\cdot)$) воспроизведено выше (см. формулу (32)). В [1] доказано (см. доказательство теоремы 3 в [1]), что множество C, определенное формулой

$$C \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{k \in \{1,\ \ldots,\ n\} \\ m \in \mathbf{N}}} C_m^k,$$

есть множество типа G_δ, всюду плотное в B.

2. Предположим, что найдутся $b_0 \in C$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ такие, что имеет место строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}(b_0) > \lambda_{n-k+1}(b_0), \tag{34}$$

но рассматриваемое семейство морфизмов не является интегрально разделенным с индексом k в точке b_0 (напомним, что из определения показателей Ляпунова следует, что $\lambda_1(b) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(b)$ для всякого $b \in B$, поэтому неравенство (34) эквивалентно неравенству $\lambda_{n-k}(b_0) \neq \lambda_{n-k+1}(b_0)$). Отсюда следует, что b_0 — не неподвижная и не периодическая точка динамической системы χ^m (если $b \in B$ — неподвижная или периодическая точка динамической системы χ^m, то из рассуждений, используемых обычно при доказательстве теоремы Флоке, вытекает, что рассматриваемое семейство морфизмов интегрально разделено в точке b со всяким индексом k, для которого $\lambda_{n-k}(b) \neq \lambda_{n-k+1}(b)$).

3. Сформулируем следующее вспомогательное утверждение, в котором не используется насыщенность рассматриваемого семейства морфизмов.

Если для некоторого $b_0 \in B$ и некоторого $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ выполнено строгое неравенство (34), а рассматриваемое семейство морфизмов не является интегрально разделенным с индексом k в точке b_0, то для всякого $\delta > 0$ и некоторого $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b_0) \ominus \mathbf{R}_0^k(b_0)$ найдется ненулевой вектор $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, найдется $t_\delta \in \mathbf{N}$ и найдутся невырожденные[****] линейные операторы

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$$
$$(m \in \{1,\ \ldots,\ t_\delta\}),$$

удовлетворяющие следующим двум требованиям:

[******] Числа α и β зависят от $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k(b)$.

[*] В силу условия, содержащего формулу (1) (см. введение), это определение перейдет в эквивалентное, если слова «целых неотрицательных» заменить словом «натуральных».
[**] См. определение 1, § 3.
[***] См. определение 2, § 3.
[****] То есть имеющие $\mathrm{Ker} = \{0\}$.

а) при всяком $m \in \{1, \ \ldots, \ t_\delta\}$ имеет место неравенство

$$\| Y_m (X[\chi^{m-1} b_0])^{-1} - I \| + \| X[\chi^{m-1} b_0] Y_m^{-1} - I \| < \delta, \tag{35}$$

$$\text{б) } Y_{t_\delta} Y_{t_\delta - 1} \ \ldots \ Y_1 \xi \in X(t_\delta) \mathbf{R}_0^k(b_0). \tag{36}$$

Остальная часть п. 3 состоит из доказательства сформулированного утверждения.

Отрицание интегральной разделенности рассматриваемого семейства морфизмов с индексом k в точке b_0 состоит в следующем. Для некоторого $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b_0) \ominus \mathbf{R}_0^k(b_0)$, для всяких чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ найдутся ненулевые векторы $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k(b_0)$ и найдутся натуральные числа t, s $(t \geqslant s)$ такие, что

$$| X(t) \xi | \cdot | X(s) \xi |^{-1} < \alpha \exp [\beta (t - s)] \cdot | X(t) \eta | \cdot | X(s) \eta |^{-1}$$

(векторы ξ и η зависят от $(\mathbf{R}^{n-k}, \ \alpha, \ \beta)$, но для краткости эта зависимость не отражена в обозначениях).

Пусть задано произвольное $\delta > 0$; фиксируем

$$\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b_0) \ominus \mathbf{R}_0^k(b_0).$$

А. Предположим сначала, что

$$\inf_{t \in \mathbf{N}} \measuredangle (X(t) \, \mathbf{R}^{n-k}, \ X(t) \, \mathbf{R}_0^k(b_0)) = 0, \tag{37}$$

где угол между векторными подпространствами определяется, как обычно, как $\inf$ углов между векторами из этих подпространств (эти углы по определению всегда $\in [0, \ \pi]$). Тогда найдутся ненулевые векторы $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k(b_0)$ и число $t_\delta \in \mathbf{N}$, для которых

$$\measuredangle (X(t_\delta) \, \xi, \ X(t_\delta) \, \eta) < \frac{1}{2} \delta. \tag{38}$$

Положим

$$Y_m \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} X[\chi^{m-1} b_0] & \text{при} \quad m \in \{1, \ \ldots, \ t_\delta - 1\}, \\ Z X[\chi^{m-1} b_0] & \text{при} \quad m = t_\delta, \end{cases} \tag{39}$$

где Z — ортогональное преобразование слоя $p^{-1}(\chi^{t_\delta} b_0)$ обладающее свойствами: вектор $Z X(t_\delta) \, \xi$ коллинеарен вектору $X(t_\delta) \, \eta$,

$$\| Z - I \| + \| Z^{-1} - I \| < \delta. \tag{40}$$

Существование такого ортогонального преобразования Z вытекает из неравенства (38). В качестве Z можно взять линейное преобразование слоя $p^{-1}(\chi^{t_\delta} b_0)$, сужение которого на плоскость векторов $X(t_\delta) \, \xi$, $X(t_\delta) \, \eta$ есть поворот, переводящий вектор $| X(t_\delta) \, \xi |^{-1} \cdot X(t_\delta) \, \xi$ в вектор $| X(t_\delta) \, \eta |^{-1} \cdot X(t_\delta) \, \eta$, а сужение на ортогональное дополнение к этой плоскости—тождественное преобразование; тогда неравенство (40) вытекает из неравенств: $\| Z - I \| < \dfrac{\delta}{2}$, $\|| Z^{-1} - I \| < \dfrac{\delta}{2}$, вытекающих из этого построения Z в силу неравенства (38). Напомним здесь, что если U — поворот евклидовой плоскости на угол $\dfrac{\delta}{2}$, то для всякого вектора ζ, лежащего на единичной окружности (т. е. такого, что $| \zeta | = 1$), имеем: $| (U - I) \, \zeta | = | U \xi - I |$ меньше длины кратчайшей дуги единичной окружности, соединяющей точки ζ и $U \zeta$, а эта длина равна $\dfrac{\delta}{2}$; следовательно, $\| U - I \| < \dfrac{\delta}{2}$; аналогично $\| U^{-1} - I \| < \dfrac{\delta}{2}$.

При всяком $m \in \{1, \ \ldots, \ t_\delta\}$ неравенство (35) следует из равенства (39) (для таких m левая часть (35) равна нулю). При $m = t_\delta$ неравенство (35) вследствие равенства (39) совпадает с неравенством (40). Таким образом, для построенных операторов Y_m (35) выполнено при всяком $m \in \{1, \ldots, t_\delta\}$. Для построенных операторов Y_m вектор

$$Y_{t_\delta} Y_{t_\delta - 1} \ldots Y_1 \xi \underset{(39)}{=} Z X(t_\delta)\, \xi$$

коллинеарен вектору

$$X(t_\delta)\, \eta \in X(t_\delta)\, \mathbf{R}_0^k(b_0),$$

следовательно, включение (36) имеет место.

Б. Пусть теперь

$$\inf_{t \in \mathbf{N}} \measuredangle (X(t)\, \mathbf{R}^{n-k},\ X(t)\, \mathbf{R}_0^k(b_0)) > 0. \tag{41}$$

Для всяких $\gamma \in \mathbf{R}^+$, $m \in \mathbf{N}$ определим линейный оператор

$$Z_{m,\gamma} : p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$$

следующим образом:

а) сужение линейного оператора $Z_{m,\gamma}$ на векторное подпространство $X(m-1)\, \mathbf{R}^{n-k}$ совпадает с сужением линейного оператора $X[\chi^{m-1} b_0]$ на то же подпространство;

б) сужение линейного оператора $Z_{m,\gamma}$ на векторное подпространство $X(m-1)\, \mathbf{R}_0^k(b_0)$ совпадает с сужением линейного оператора $(\exp\gamma) \times X[\chi^{m-1} b_0]$ на (то же) подпространство $X(m-1)\, \mathbf{R}_0^k(b_0)$. Так как при всяком $m \in \mathbf{N}$

$$p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) = X(m-1)\, \mathbf{R}^{n-k} \oplus X(m-1)\, \mathbf{R}_0^k(b_0),$$

то условиями а) и б) линейные операторы $Z_{m,\gamma}$ определены. Из неравенства (41) следует, что

$$\sup_{m \in \mathbf{N}} (\| Z_{m,\gamma} (X[\chi^{m-1} b_0])^{-1} - I \| + \| X[\chi^{m-1} b_0]\, Z_{m,\gamma}^{-1} - I \|) \underset{\gamma \to 0}{\to} 0. \tag{42}$$

Чтобы доказать, что из (41) следует (42), проведем следующие рассуждения. Возьмем при всяком $m \in \mathbf{N}$ произвольный изоморфизм φ_m евклидова пространства $p^{-1}(\chi^m b_0)$ на евклидово пространство $p^{-1}(b_0)$. Из определения операторов $Z_{m,\gamma}$ следует, что при всяких $m \in \mathbf{N}$, $\gamma \in \mathbf{R}^+$ линейный оператор

$$W_{m,\gamma} \underset{\text{def}}{=} \varphi_m Z_{m,\gamma} (X[\chi^{m-1} b_0])^{-1} \varphi_m^{-1} : p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

обладает следующими свойствами:

а) его сужение на векторное подпространство $\mathbf{R}_m^{n-k} \underset{\text{def}}{=} \varphi_m X(m)\, \mathbf{R}^{n-k}$ есть единичный оператор;

б) его сужение на векторное подпространство $\mathbf{R}_m^k \underset{\text{def}}{=} \varphi_m X(m)\, \mathbf{R}_0^k(b_0)$ есть оператор умножения на число $\exp\gamma$. Имеем

$$\begin{gathered} \| W_{m,\gamma} - I \| = \| \varphi_m Z_{m,\gamma} (X[\chi^{m-1} b_0])^{-1} \varphi_m^{-1} - I \| = \\ = \| \varphi_m (Z_{m,\gamma} (X[\chi^{m-1} b_0])^{-1} - I)\, \varphi_m^{-1} \| = \| Z_{m,\gamma} (X[\chi^{m-1} b_0])^{-1} - I \| \end{gathered} \tag{43}$$

и аналогично

$$\| W_{m,\gamma}^{-1} - I \| = \| (X[\chi^{m-1} b_0])\, Z_{m,\gamma}^{-1} - I \|. \tag{44}$$

В силу (43), (44) левая часть соотношения (42) равна

$$\sup_{m \in \mathbf{N}} (\| W_{m,\gamma} - I \| + \| W_{m,\gamma}^{-1} - I \|).$$

Поэтому если соотношение (42) не имеет места, то для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ найдутся последовательность неотрицательных вещественных чисел $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ стремящаяся к нулю, и последовательность натуральных чисел $\{m_i\}_{i \in \mathbf{N}}$; такие, что для всякого $i \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$(\| W_{m_i,\gamma_i} - I \| + \| W^{-1}_{m_i,\gamma_i} - I \| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0. \tag{45}$$

Пусть $\{i_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ — последовательность натуральных чисел такая, что последовательности

$$\{\mathbf{R}^{n-k}_{m_{i_j}}\}_{j\in\mathbf{N}} \text{ и } \{\mathbf{R}^{k}_{m_{i_j}}\}_{j\in\mathbf{N}}$$

(подпространства $\mathbf{R}^{n-k}_m$ и $\mathbf{R}^k_m$ слоя $p^{-1}(b_0)$ определены выше: см. свойства а) и б) операторов $W_{m,\gamma}$) сходятся; пределы этих последовательностей обозначим соответственно $\overline{\mathbf{R}}^{n-k}$ и $\overline{\mathbf{R}}^{k}$; такая последовательность $\{i_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ существует в силу компактности грассмановых многообразий. Из (41) следует, что $\overline{\mathbf{R}}^{n-k} \bigcap \overline{\mathbf{R}}^{k} = \{0\}$, а так как

$$\dim p^{-1}(b_0) = n,\ \dim \overline{\mathbf{R}}^{n-k} = n-k,\ \dim \overline{\mathbf{R}}^{k} = k,$$

то $p^{-1}(b_0) = \overline{\mathbf{R}}^{n-k} \oplus \overline{\mathbf{R}}^{k}$.

Из того, что $\gamma_i \underset{i\to\infty}{\to} 0$, и свойств а) и б) операторов $W_{m,\gamma}$ следует поэтому, что

$$W_{m_{i_j},\gamma_{i_j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} I,$$

а это противоречит неравенству (45). Полученное противоречие доказывает, что из (41) имеем (42).

Перейдем теперь к построению операторов Y_m (напомним, что в этом подпункте Б построения ведутся в предположении, что имеет место неравенство (41)). Напомним, что задано произвольное $\delta > 0$ и фиксировано $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b_0) \ominus \mathbf{R}^k_0(b_0)$. Будем в дальнейшем предполагать без ограничения общности, что δ меньше левой части неравенства (41). Положим

$$\alpha \underset{\text{def}}{=} \left(\sin\frac{\delta}{2}\right)\left(\sin\frac{\delta}{4}\right). \tag{46}$$

Положим $\beta = \gamma = \gamma(\delta)$, где $\gamma(\delta) > 0$ таково, что левая часть соотношения (42) меньше $\dfrac{\delta}{2}$.

Для заданного выше $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b_0) \ominus \mathbf{R}^k_0(b_0)$ и только что выбранных чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ рассмотрим (см. выше формулировку отрицания интегральной разделенности рассматриваемого семейства) морфизмов с индексом k в точке b_0) ненулевые векторы $\xi_0 \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta_0 \in \mathbf{R}^k_0(b_0)$ и натуральные числа t_0, s_0 $(t_0 \geqslant s_0)$ такие, что

$$|X(t_0)\,\xi_0| \cdot |X(s_0)\,\xi_0|^{-1} < \alpha \exp[\beta\,(t_0 - s_0)] \cdot |X(t_0)\,\eta_0| \cdot |X(s_0)\,\eta_0|^{-1}. \tag{47}$$

Поскольку $\alpha \underset{(46)}{<} 1$ ($\delta < \pi$, так как δ меньше левой части неравенства (41)), то из неравенства (47) следует, что $t_0 \neq s_0$, а так как $t_0 \geqslant s_0$, то $t_0 > s_0$.

Положим (если $s_0 > 1$)

$$Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1} b_0] \text{ при } m \in \{1,\ \ldots,\ s_0 - 1\}.$$

Положим, далее,

$$Y_{s_0} \underset{\text{def}}{=} U X[\chi^{s_0-1} b_0], \tag{48}$$

где $U : p^{-1}(\chi^{s_0} b_0) \to p^{-1}(\chi^{s_0} b_0)$ — линейный оператор, определяемый следующим образом:

1) сужение линейного оператора U на ортогональное дополнение к плоскости векторов $X(s_0)\,\xi_0$, $X(s_0)\,\eta_0$ есть единичный оператор;

2) сужение линейного оператора U на плоскость векторов $X(s_0)\,\xi_0$, $X(s_0)\,\eta_0$ есть поворот этой плоскости на угол $\dfrac{\delta}{2}$ в направлении от вектора $X(s_0)\,\xi_0$ к вектору $X(s_0)\,\eta_0$

(слова «в направлении от вектора ξ к вектору η» означают в данном контексте учитывая, что $\frac{\delta}{2}<\frac{\pi}{2}$), что в разложении вектора $U\xi$ по базису $\{\xi,\ \eta\}$ коэффициент при векторе η, положителен).

Если $s_0+1<t_0$, то положим $Y_m \underset{\mathrm{def}}{=} Z_{m,\,\beta}$ при $m\in\{s_0+1,\ \dots,\ t_0-1\}$ (напомним, что операторы $Z_{m,\,\gamma}$ определены в начале подпункта Б). Если $s_0+1=t_0$, то построение, описанное в предыдущей фразе, опускаем.

Независимо от того, $s_0+1=t_0$ или $s_0+1<t_0$, полагаем

$$Y_{t_0} \underset{\mathrm{def}}{=} VZ_{t_0,\,\beta}, \tag{49}$$

где $V: p^{-1}(\chi^{t_0}b_0)\to p^{-1}(\chi^{t_0}b_0)$ — линейный оператор, определяемый следующим образом:

1) сужение линейного оператора V на ортогональное дополнение к плоскости векторов $X(t_0)\,\xi_0$, $X(t_0)\,\eta_0$ есть единичный оператор;

2) сужение линейного оператора V на плоскость векторов $X(t_0)\,\xi_0$, $X(t_0)\,\eta_0$ есть поворот этой плоскости, такой, что

$$Y_{t_0}Y_{t_0-1}\ \dots\ Y_1\xi_0=\theta X(t_0)\,\eta_0, \tag{50}$$

где θ — некоторое положительное число: из поворотов, удовлетворяющих этому условию, выбираем поворот на наименьший (по абсолютной величине) угол.

Для того чтобы убедиться в корректности определения оператора V, достаточно заметить, что вектор $Z_{t_0,\,\beta}Y_{t_0-1}\ \dots\ Y_1\xi_0$ принадлежит плоскости, порожденной в слое $p^{-1}(\chi^{t_0}b_0)$ двумя векторами: $X(t_0)\,\xi_0$, $X(t_0)\,\eta_0$. Докажем это.

а) Из определения операторов Y_m при $m\in\{1,\ \dots,\ s_0-1\}$ непосредственно следует равенство (если $s_0>1$)

$$Y_{s_0-1}\ \dots\ Y_1\xi=X(s_0-1)\,\xi$$

для всякого $\xi\in p^{-1}(b_0)$, в том числе для $\xi=\xi_0$ и $\xi=\eta_0$.

б) Из определения оператора Y_{s_0} непосредственно следует: плоскость векторов $X(s_0)\,\xi_0$, $X(s_0)\,\eta_0$ совпадает с плоскостью векторов $Y_{s_0}X(s_0-1)\,\xi_0$, $Y_{s_0}X(s_0-1)\,\eta_0$, которые, как отмечено в подпункте а), равны соответственно $Y_{s_0}Y_{s_0-1}\ \dots\ Y_1\xi_0$ и $Y_{s_0}Y_{s_0-1}\ \dots\ Y_1\eta_0$, если $s_0>1$.

в) Если $s_0+1<t_0$, то из определения операторов Y_m при $m\in\{s_0+1,\ \dots,\ t_0-1\}$ и определения операторов $Z_{m,\,\gamma}$ непосредственно следует, что вектор $Y_{t_0-1}\ \dots\ Y_{s_0+1}\xi$ не равен нулю и коллинеарен вектору $X^{t_0-1-s_0}\xi_0$ при $\xi=X(s_0)\,\xi_0$ и при $\xi=X(s_0)\,\eta_0$ (в первом случае даже равен, а только коллинеарен). Поэтому плоскость векторов

$$Y_{t_0-1}\ \dots\ Y_{s_0+1}X(s_0)\,\xi_0,\ Y_{t_0-1}\ \dots\ Y_{s_0+1}X(s_0)\,\eta_0$$

совпадает с плоскостью векторов

$$X^{t_0-1-s_0}X(s_0)\,\xi_0=X(t_0-1)\,\xi_0,$$
$$X^{t_0-1-s_0}X(s_0)\,\eta_0=X(t_0-1)\,\eta_0.$$

Первая из этих плоскостей, вследствие доказанного в подпункте б) совпадает с плоскостью векторов $Y_{t_0-1}\ \dots\ Y_1\xi_0$, $Y_{t_0-1}\ \dots\ Y_1\eta_0$.

Итак, плоскость векторов $Y_{t_0-1}\ \dots\ Y_1\xi_0$, $Y_{t_0-1}\ \dots\ Y_1\eta_0$ и плоскость векторов $X(t_0-1)\,\xi_0$, $X(t_0-1)\,\eta_0$ совпадают (сейчас мы доказали это в предположении, что $s_0+1<t_0$, а если $s_0+1=t_0$, то это уже доказано в подпункте б)).

г) Из определения операторов $Z_{m,\gamma}$ непосредственно следует, что

$$Z_{t_0,\beta}X(t_0-1)\xi_0 = X(t_0)\xi_0,$$

а вектор $Z_{t_0,\beta}X(t_0-1)\eta_0$ отличен от нуля и коллинеарен вектору $X(t_0)\eta_0$. В силу доказанного в предыдущих подпунктах вектор $Z_{t_0,\beta}Y_{t_0-1}\ \ldots\ Y_1\xi_0$ принадлежит плоскости векторов $Z_{t_0,\beta}X(t_0-1)\xi_0$, $Z_{t_0,\beta}X(t_0-1)\eta_0$, которая в силу только что отмеченного совпадает с плоскостью векторов $X(t_0)\xi_0$, $X(t_0)\eta_0$.

Таким образом, корректность приведенного выше определения линейного оператора V доказана.

Положим $t_\delta = t_0$. Построение операторов

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$$
$$(m \in \{1,\ \ldots,\ t_0\})$$

закончено.

Включение (36) для $\xi = \xi_0$ следует из равенства (50) (по определению ξ_0 — ненулевой вектор, принадлежащий $\mathbf{R}^{n-k}$, $\eta_0 \in \mathbf{R}_0^k(b_0)$, $t_\delta = t_0$).

Докажем, что построенные операторы Y_m удовлетворяют неравенству (35). При всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ s_0-1\}$ по определению $Y_m = X[\chi^{m-1}b_0]$, и поэтому для $m \in \{1,\ \ldots,\ s_0-1\}$ левая часть (35) равна нулю, следовательно, для этих m неравенство (35) выполнено.

Если $s_0+1 < t_0$, то при всяком $m \in \{s_0+1,\ \ldots,\ t_0-1\}$ по определению $Y_m = Z_{m,\beta}$, и потому при всяком $m \in \{s_0+1,\ \ldots,\ t_0-1\}$ левая часть (35) не превосходит левую часть (42) при $\gamma = \beta$, а β было выбрано так, что при $\gamma = \beta$ в левая часть соотношения (42) меньше $\dfrac{\delta}{2} < \delta$.

Рассмотрим левую часть неравенства (35) при $m = s_0$. Так как

$$Y_{s_0}(X[\chi^{s_0-1}b_0])^{-1} \underset{(48)}{=} U,$$

то при $m = s_0$ левая часть (35) равна

$$\| U - I \| + \| U^{-1} - I \| < \delta$$

(последнее неравенство вытекает из приведенного выше определения оператора U; по сходному поводу это уже было доказано в подпункте А).

Для рассмотрения левой части неравенства (35) при $m = t_0$ введем оператор

$$W \underset{\text{def}}{=} Y_{t_0}(X[\chi^{t_0-1}b_0])^{-1} \underset{(49)}{=} VZ_{t_0,\beta}(X[\chi^{t_0-1}b_0])^{-1}. \tag{51}$$

Докажем неравенство

$$\| W - I \| + \| W^{-1} - I \| < \delta, \tag{52}$$

т. е. докажем неравенство (35) при $m = t_0$. Имеем

$$\| W - I \| + \| W^{-1} - I \| \leqslant \| W - V \| + \| V - I \| + \| W^{-1} - V^{-1} \| +$$
$$+ \| V^{-1} - I \| \leqslant \| V \| \cdot \| V^{-1}W - I \| + \| V - I \| + \| W^{-1}V - I \| \times$$
$$\times \| V^{-1} \| + \| V^{-1} - I \|.$$

Воспользовавшись равенством $\| V \| = \| V^{-1} \| = 1$, вытекающим из того, что оператор V, как непосредственно следует из его определения, ортогональный, перепишем полученное неравенство в виде

$$\| W - I \| + \| W^{-1} - I \| \leqslant \| V^{-1}W - I \| + \| W^{-1}V - I \| + \| V - I \| + \| V^{-1} - I \|. \tag{53}$$

Далее, поскольку число

$$\| V^{-1}W - I \| + \| W^{-1}V - I \| \underset{(51)}{=} \| Z_{t_0,\,\beta}(X[\chi^{t_0-1}b_0])^{-1} - I \| +$$
$$+ \| X[\chi^{t_0-1}b_0]\, Z^{-1}_{t_0,\,\beta} - I \|$$
не превосходит левой части соотношения (42) при $\gamma = \beta$, а β было выбрано так, чтобы левая часть (42) при $\gamma = \beta$ была меньше $\frac{\delta}{2}$, то имеет место неравенство
$$\| V^{-1}W - I \| + \| W^{-1}V - I \| < \frac{\delta}{2}. \tag{54}$$
Для завершения доказательства неравенства (52) остается доказать неравенство
$$\| V - I \| + \| V^{-1} - I \| < \frac{\delta}{2} \tag{55}$$
(в самом деле, из (53) — (55) следует (52), а неравенства (53), (54) уже доказаны). В свою очередь для доказательства неравенства (55) достаточно доказать, что
$$\measuredangle\, (Z_{t_0,\,\beta} Y_{t_0-1} \ldots Y_1 \xi_0,\ X(t_0)\,\eta_0) < \frac{\delta}{4}, \tag{56}$$
так как имеет место неравенство
$$\| V - I \| + \| V^{-1} - I \| < 2\,\measuredangle\,(V\zeta,\ \zeta), \tag{57}$$
где ζ — произвольный ненулевой вектор плоскости, порожденной в слое $p^{-1}(\chi^{t_0}b_0)$ векторами $X(t_0)\,\xi_0$, $X(t_0)\,\eta_0$ (неравенство (57) в других обозначениях, но при тех же условиях (ср. определение оператора V с определением оператора Z, данным в подпункте А) доказано выше в подпункте А), а согласно определению оператора V, имеют место формулы (49), (50).

Переходим к доказательству неравенства (56). Напомним, что из определения операторов Y_m (при $m \leqslant s_0$) непосредственно следует, что
$$Y_{s_0} Y_{s_0-1}\ \ldots\ Y_1 \xi_0 = U X(s_0)\,\xi_0,$$
а из определения оператора U вытекает, что
$$U X(s_0)\,\xi_0 = \rho_1 X(s_0)\,\xi_0 + \rho_2 X(s_0)\,\eta_0,$$
где $\rho_1,\ \rho_2 \in \mathbf{R}$, причем $\rho_2 > 0$, а
$$\measuredangle\,(U X(s_0)\,\xi_0,\ X(s_0)\,\xi_0) = \frac{\delta}{2}. \tag{58}$$
Так как $\measuredangle\,(X(s_0)\,\xi_0,\ X(s_0)\,\eta_0)$ больше или равен левой части неравенства (41), а число δ, как было отмечено выше (без ограничения общности считаем), меньше левой части (41), то из (58) следует, что $\rho_1 > 0$. (Изложение можно было бы провести невзирая на то, какие знаки имеют числа ρ_1, ρ_2; тогда потребовались бы, правда, небольшие изменения в определении оператора V).

Так как $\rho_1 > 0$, то
$$\measuredangle\,(U X(s_0)\,\xi_0,\ \rho_1 X(s_0)\,\xi_0) = \measuredangle\,(U X(s_0)\,\xi_0,\ X(s_0)\,\xi_0) \underset{(58)}{=} \frac{\delta}{2}. \tag{59}$$
Выше уже использовалось (когда речь шла об углах и поворотах), что плоскость в $p^{-1}(\chi^{s_0}b_0)$, порожденная двумя векторами $X(s_0)\,\xi_0$ и $X(s_0)\,\eta_0$ наделена евклидовой структурой, поскольку сам слой наделен евклидовой структурой. Теперь воспользуемся для этой плоскости теоремами евклидовой планиметрии. По теореме синусов, примененной к треугольнику с вершинами* 0, $Y_{s_0}\ \ldots\ Y_1\xi_0 = U X(s_0)\,\xi_0$, $\rho_1 X(s_0)\,\xi_0$, имеем

* Говоря о вершинах треугольников, мы имеем в виду, что вектор интерпретируется как точка плоскости; можно интерпретировать вектор как направленный отрезок с началом в точке 0, тогда вектор в первом смысле есть конец вектора во втором смысле.

$$
\begin{gathered}
|\rho_2 X(s_0)\,\eta_0| = [\sin\measuredangle(UX(s_0)\,\xi_0,\ \rho_2 X(s_0)\,\eta_0]^{-1}\,|\rho_1 X(s_0)\,\xi_0|\times \\
\times\sin\measuredangle(UX(s_0)\,\xi_0,\ \rho_1 X(s_0)\,\xi_0) \geqslant \|\rho_1 X(s_0)\,\xi_0|\times \\
\times\sin\measuredangle(UX(s_0)\,\xi_0,\ \rho_1 X(s_0)\,\xi_0) \underset{(59)}{=} |\rho_1 X(s_0)\,\xi_0|\sin\frac{\delta}{2}
\end{gathered} \tag{60}
$$

(напомним, что по определению $\sin\measuredangle(\xi,\ \eta)\geqslant 0$ для всяких векторов ξ, η). Плоскость в слое $p^{-1}(\chi^{t_0}b_0)$, порожденная двумя векторами $X(t_0)\,\xi_0$, $X(t_0)\,\eta_0$, тоже наделена евклидовой структурой, поскольку сам слой наделен евклидовой структурой. Для этой плоскости тоже можно пользоваться теоремами евклидовой планиметрии. По теореме синусов, примененной к треугольнику с вершинами** 0, $V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}\rho_2 X(s_0)\,\eta_0$, $V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}UX(s_0)\,\xi_0$, имеем

$$
\begin{gathered}
\sin\measuredangle(V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}UX(s_0)\,\xi_0, \\
V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}\rho_2 X(s_0)\,\eta_0) = |V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}\rho_1 X(s_0)\,\xi_0|\times \\
\times|V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}\rho_2 X(s_0)\,\eta_0|^{-1}\sin\measuredangle(V^{-1}Y_{t_0}\ldots \\
\ldots\ Y_{s_0+1}UX(s_0)\,\xi_0,\ V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}\rho_1 X(s_0)\,\xi_0) \leqslant |V^{-1}Y_{t_0}\ldots \\
\ldots\ Y_{s_0+1}\rho_1 X(s_0)\,\xi_0|\cdot|V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}\rho_2 X(s_0)\,\eta_0|^{-1}.
\end{gathered} \tag{61}
$$

Из определения операторов Y_m непосредственно следуют равенства

$$
\begin{gathered}
Y_m = Z_{m,\,\beta}\ \text{при}\ m\in\{s_0+1,\ \ldots,\ t_0-1\}\text{, если } s_0+1<t_0, \\
V^{-1}Y_{t_0} = Z_{t_0,\,\beta}, \\
V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}UX(s_0)\,\xi = Z_{t_0,\,\beta}Y_{t_0-1}\ldots\ Y_1\xi
\end{gathered} \tag{62}
$$

для всякого $\xi\in p^{-1}(b_0)$.

Согласно определению линейных операторов $Z_{m,\,\beta}$ при всяком $m\in\mathbf{N}$, сужение оператора $Z_{m,\,\beta}$ на подпространство $X(m-1)\,\mathbf{R}^{n-k}$ совпадает с сужением оператора $X[\chi^{m-1}b_0]$ на это же подпространство; а так как $\xi_0\in\mathbf{R}^{n-k}$, то

$$
Z_{t_0,\,\beta}\ldots\ Z_{s_0+1,\,\beta}\ \rho_1 X(s_0)\,\xi_0 = \rho_1 X(t_0)\,\xi_0. \tag{63}
$$

Согласно определению линейных операторов $Z_{m,\,\beta}$ при всяком $m\in\mathbf{N}$, сужение оператора $Z_{m,\,\beta}$ на подпространство $X(m-1)\,\mathbf{R}_0^k(b_0)$ совпадает с сужением оператора $(\exp\beta)\ X[\chi^{m-1}b_0]$ на это же подпространство; а так как $\eta_0\in\mathbf{R}_0^k(b_0)$, то

$$
Z_{t_0,\,\beta}\ldots\ Z_{s_0+1,\,\beta}\ \rho_2 X(s_0)\,\eta_0 = (\exp(\beta(t_0-s_0)))\,\rho_2 X(t_0)\,\eta_0. \tag{64}
$$

Из формул (62), (64) следует (так как $\rho_2>0$), что

$$
\begin{gathered}
\measuredangle(Z_{t_0,\,\beta}Y_{t_0-1}\ldots\ Y_1\xi_0,\ X(t_0)\,\eta_0) = \measuredangle(V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}UX(s_0)\,\xi_0, \\
V^{-1}Y_{t_0}\ldots\ Y_{s_0+1}\ \rho_2 X(s_0)\,\eta_0).
\end{gathered}
$$

Воспользовавшись формулами (62) — (64), перепишем правую часть неравенства (61) в виде

** См. предыдущую сноску.

$$|\rho_1 X(t_0)\xi_0|\cdot|\rho_2 X(t_0)\eta_0|^{-1}\exp(-\beta(t_0-s_0))=(\exp(-\beta(t_0-s_0)))\times$$
$$\times|X(t_0)\xi_0|\cdot|X(s_0)\xi_0|^{-1}|X(t_0)\eta_0|^{-1}|X(s_0)\eta_0|\times$$
$$\times|\rho_1 X(s_0)\xi_0|\cdot|\rho_2 X(s_0)\eta_0|^{-1}\underset{(47)}{<}\alpha\,\|\rho_1 X(s_0)\xi_0|\times$$
$$\times|\rho_2 X(s_0)\eta_0|^{-1}\underset{(60)}{\leqslant}\alpha\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{-1}\underset{(46)}{=}\sin\frac{\delta}{4}.$$

Отсюда следует, что:

а) в рассмотренном треугольнике отношение стороны, противолежащей углу при вершине 0, к одной из двух других сторон треугольника (это отношение есть правая часть неравенства (61)) меньше $\sin\frac{\delta}{4}<1$, следовательно, угол при вершине 0 (выше доказано, что он равен $\measuredangle(Z_{t_0,\,\beta}Y_{t_0-1},\ldots,\ Y_1\xi_0,\ X(t_0)\eta_0))$ меньше одного из двух других углов треугольника, и поэтому является острым;

б) в силу неравенства (61) синус этого острого угла меньше $\sin\frac{\delta}{4}$, следовательно, сам угол меньше $\frac{\delta}{4}$, т. е. неравенство (56) доказано. Тем самым доказательство утверждения, сформулированного в начале п. 3, закончено.

4. Всюду далее в доказательстве теоремы под b_0 и k будут пониматься те $b_0\in C$ и $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, для которых имеет место гипотетическая ситуация, описанная в п. 2, т. е. имеет место строгое неравенство (34) но рассматриваемое насыщенное семейство морфизмов не является интегрально разделенным с индексом k в точке b_0. Фиксируем $\mathbf{R}^{n-k}$, о котором говорится в утверждении, сформулированном в начале п. 3, и обозначим его через $\mathbf{R}_1^{n-k}$.

5. Положим

$$\sigma_0\underset{\text{def}}{=}\frac{1}{3}(\lambda_{n-k}(b_0)-\lambda_{n-k+1}(b_0))\underset{(34)}{>}0. \tag{65}$$

Зафиксируем какое-нибудь число $m_0\in\mathbf{N}$, для которого

$$\mu_k^{(m_0)}(b_0)<\mu_k(b_0)+\sigma_0. \tag{66}$$

Так как $\sigma_0>0$, то такое $m_0\in\mathbf{N}$ существует: при определении функции $\mu_k(\cdot):B\to\mathbf{R}$ в [1] (см. в [1] формулу (6) и предшествующий ей текст) было доказано, что $\lim\limits_{m\to\infty}\mu_k^{(m)}(b)$ существует при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$.

Поскольку $\mu_k(b_0)=\lambda_{n-k+1}(b_0)$ (в силу леммы 5 [1]), то из (65), (66) следует

$$\mu_k^{(m_0)}(b_0)<\lambda_{n-k+1}(b_0)+\sigma_0=\lambda_{n-k}(b_0)-2\sigma_0. \tag{67}$$

Так как функция $\mu_k^{(m_0)}(\cdot):B\to\mathbf{R}$ непрерывна в точке b_0 (поскольку $b_0\in C$, а во всякой точке множества C всякая функция $\mu_k^{(m)}(\cdot):B\to\mathbf{R}$ ($m\in\mathbf{N}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$) непрерывна (см. определение множества C, данное в п. 1)), то найдется $\varepsilon_0>0$ такое, что для всякого $b\in B$, удовлетворяющего неравенству

$$d(b,\ b_0)<\varepsilon_0,$$

имеет место неравенство

$$\mu_k^{(m_0)}(b)<\mu_k^{(m_0)}(b_0)+\sigma_0\underset{(67)}{<}\lambda_{n-k}(b_0)-\sigma_0. \tag{68}$$

Возьмем открытую окрестность V_0 точки $\mathbf{R}_0^k(b_0)$ в топологическом пространстве $S^{(k)}$ такую, что для всякого $\mathbf{R}^k\in[p^{(k)}]^{-1}(b_0)\bigcap V_0$ имеет место равенство $\mathbf{R}^k\bigcap\mathbf{R}_1^{n-k}=\{0\}$ ($\mathbf{R}_1^{n-k}$

определено в п. 4). Возьмем замкнутую окрестность V_1 точки $\mathbf{R}_0^k(b_0)$ в пространстве $S^{(k)}$ содержащуюся в V_0 (такая окрестность существует, так как топологическое пространство $S^{(k)}$ регулярно, будучи пространством локально тривиального расслоения со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$ над метрическим пространством B). Зафиксируем какой-нибудь базис $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b_0)$. Возьмем такие окрестности $U(\xi_i)$ точек ξ_i ($i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$) в пространстве E и такую окрестность V_2 точки $\mathbf{R}_0^k(b_0)$ в пространстве $S^{(k)}$, что для всякого $b \in B$ и всякого изоморфизма $\psi : p^{-1}(b) \to p^{-1}(b_0)$ (изоморфизма слоев как евклидовых пространств), из того, что при всяком $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место включение

$$\psi^{-1}\xi_i \in U(\xi_i),$$

вытекает следующее включение*:

$$\psi^{(k)}(V_2 \bigcap [p^{(k)}]^{-1}(b)) \subset V_1.$$

Возьмем $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для всякого $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(W_{\varepsilon_1}(b_0)) \setminus V_2$ (где через $W_{\varepsilon_1}(b_0)$ обозначена ε_1-окрестность точки b_0 в пространстве B, т. е. множество всех таких $b \in B$, для которых $d\,(b,\ b_0) < \varepsilon_1$) имеет место неравенство

$$\sup_{t+1 \in \mathbf{N}} \frac{1}{m_0 + t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m_0 + t,\ b) \| > \lambda_{n-k}(b_0) - \sigma_0,$$

где $b = p^{(k)}(\mathbf{R}^k)$. Такое $\varepsilon_1 > 0$ существует в силу леммы 3.

Положим $\varepsilon_2 \underset{\text{def}}{=} \min(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$ (определение числа $\varepsilon_0 > 0$ дано выше). Так как $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, то $\varepsilon_2 > 0$.

Так как b_0 не неподвижная и не периодическая точка динамической системы χ^m (п. 2 доказательства), то в силу насыщенности (см. определение 1, § 3) рассматриваемого семейства морфизмов найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всякого $t \in \mathbf{N}$ и всяких невырожденных линейных операторов

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$$

($m \in \{1,\ \ldots,\ t\}$), удовлетворяющих при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ t\}$ неравенству

$$\| Y_m (X[\chi^{m-1}b_0])^{-1} - I \| + \| X[\chi^{m-1}b_0]\, Y_m^{-1} - I \| < \delta_0, \tag{69}$$

найдется точка $b \in B$ такая, что $d\,(b,\ b_0) < \varepsilon_2$, и для всякого $m \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ t\}$ найдется изоморфизм слоев (как евклидовых пространств)

$$\psi_m : p^{-1}(\chi^m b) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$$

такой, что

i) $\psi_0^{-1}\xi_i \in U(\xi_i)$ ($i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$);

ii) при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ t\}$ диаграмма

---

* Если $\psi : p^{-1}(b) \to p^{-1}(b_0)$ — изоморфизм слоев как векторных пространств, то отображение $\psi^{(k)} : [p^{(k)}]^{-1}(b) \to [p^{(k)}]^{-1}(b_0)$ по определению переводит точку $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b)$ (т. е. k-мерное векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$) в точку $\{\psi\xi\}_{\xi \in \mathbf{R}^k}$, т. е. в образ множества $\mathbf{R}^k \subset p^{-1}(b)$ при отображении ψ.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\chi^{m-1}b) \arrow[r, "{X[\chi^{m-1}b]}"'] \arrow[d, "\Psi_{m-1}"] & p^{-1}(\chi^{m}b) \arrow[d, "\Psi_{m}"] \\ p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) \arrow[r, "Y_m"'] & p^{-1}(\chi^{m}b_0) \end{tikzcd} \tag{70}$$

коммутативна.

Без ограничения общности будем считать, что $\delta_0 < a(b_0)$, где $\delta_0 > 0$ — число, определенное выше, а функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ определена в начале § 3 (см. условие в), наложенное там на семейство морфизмов) (если неравенство $\delta_0 < a(b_0)$ не выполняется, то заменим функцию $a(\cdot)$ на функцию $a'(\cdot) \underset{\text{def}}{=} a(\cdot) + \overline{a}$, где $\overline{a}$ — какая-нибудь положительная константа; условие в), наложенное, в начале § 3, будет тем более выполнено с этой новой функцией $a'(\cdot)$ вместо $a(\cdot)$, а $\delta_0 > 0$ возьмем меньше $\overline{a}$).

Выберем $t = t_0$ $(= t_{\delta_0}$ в обозначениях п. 3) и линейные невырожденные операторы

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) \to p^{-1}(\chi^{m}b_0)$$

($m \in \{1, \ldots, t_0\}$) так, чтобы они удовлетворяли неравенству (69), а также следующему условию: для некоторого ненулевого вектора $\xi_0 \in \mathbf{R}_1^{n-k}$ ($\mathbf{R}_1^{n-k}$ определено в п. 4) имеет место включение

$$Y_{t_0} \ldots Y_1\xi_0 \in X(t_0)\,\mathbf{R}_0^k(b_0)$$

(этот выбор возможен в силу утверждения, формулировку которого см. в начале п. 3).

При этом без ограничения общности считаем, что $t_0 \geqslant m_0$ (в противном случае доопределили бы $Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1}b_0]$ при $m \in [t_0, m_0]$). Затем возьмем какое-нибудь натуральное число

$$\overline{t_0} > \max\,(4a\,(b_0)\,t_0\sigma_0^{-1},\ t_0).$$

Возьмем также натуральное число $t_0 \geqslant \overline{t_0}$ такое, что для всякого*

$$\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_0) \bigcap (X^{-t_0})^{(k)} Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)}([p^{(k)}]^{-1}(b_0) \bigcap V_1)$$

имеет место неравенство

$$\max_{t \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, t_1 - \overline{t_0}\}} \frac{1}{\overline{t_0} + t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(\overline{t_0} + t,\ b_0) \| > \lambda_{n-k}(b_0) - \frac{1}{4}\sigma_0.$$

Существование такого t_1 следует из леммы 2, в которой надо положить $b = b_0$, $m = \overline{t_0}$, $\varepsilon = \dfrac{1}{4}\sigma_0$,

$$U = [p^{(k)}]^{-1}(b_0) \setminus (X^{-t_0})^{(k)} Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)}([p^{(k)}]^{-1}(b_0) \bigcap V_1),$$

$s = t_1 - \overline{t_0}$ и воспользоваться формулой

$$[p^{(k)}]^{-1}(b_0) \bigcap (X^{-t_0})^{(k)} Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)}([p^{(k)}]^{-1}(b_0) \bigcap V_1) = [p^{(k)}]^{-1}(b_0) \setminus U,$$

вытекающей из очевидной формулы $A \bigcap B = A \setminus (A \setminus B) A$ {]B = A\(A\B). Нужно еще убедиться в том, что так определенное множество U есть окрестность точки $\mathbf{R}_0^k(b_0)$ в слое $[p^{(k)}]^{-1}(b_0)$. Это действительно так, потому что множество

$$(X^{-t_0})^{(k)} Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)}([p^{(k)}]^{-1}(b_0) \bigcap V_1)$$

замкнутое (в силу замкнутости множества V_1) и не содержит точку $\mathbf{R}_0^k(b_0)$, так как,

* По поводу смысла верхних индексов в обозначениях типа $Y^{(k)}$ см. предыдущую сноску.

согласно приведенному выше определению линейных операторов Y_m, найдется ненулевой вектор $\xi_0 \in \mathbf{R}_1^{n-k}$ для которого имеет место включение

$$Y_{t_0} \ldots Y_1 \xi_0 \in X(t_0)\, \mathbf{R}_0^k(b_0),$$

эквивалентное включению

$$X^{-t_0} Y_{t_0} \ldots Y_1 \xi_0 \in \mathbf{R}_0^k(b_0),$$

из которого следует, что для того $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_0)$, для которого

$$(X^{-t_0})^{(k)} Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)} \mathbf{R}^k = \mathbf{R}_0^k(b_0),$$

имеет место формула $\mathbf{R}^k \cap \mathbf{R}_1^{n-k} \neq \{0\}$, из которой в силу определения окрестностей V_0 и V_1 следует, что

$$\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_0) \setminus V_0 \subset [p^{(k)}]^{-1} \setminus V_1.$$

По этим $t = t_1$ и Y_m (при $m \in \{t_0+1, \ \ldots, \ t_1\}$ полагаем $Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1} b_0]$) выберем точку $b = b_1 \in B$ такую, что

$$d\,(b_1, \ b_0) < \varepsilon_2, \tag{71}$$

и изоморфизмы слоев (как евклидовых пространств)

$$\psi_m : p^{-1}(\chi^m b_1) \to p^{-1}(\chi^m b_0) \quad (m \in \{0, \ 1, \ \ldots, \ t_1\})$$

такие, что при всяком $m \in \{1, \ \ldots, \ t_1\}$ диаграмма (70) при $b = b_1$ коммутативна и имеют место включения $\psi_0^{-1} \xi_i \in U(\xi_i)$ при всяком $i \in \{1, \ \ldots, \ n\}$.

Для так выбранного b_1 с помощью леммы 4, § 2 в следующем пункте будет доказано неравенство

$$\mu_k^{(m_0)}(b_1) \geqslant \lambda_{n-k}(b_0) - \sigma_0, \tag{72}$$

которое в силу (71) противоречит определению числа $\varepsilon_2 \underset{\text{def}}{=} \min\,(\varepsilon_0, \ \varepsilon_1)$ (см. утверждение, содержащее формулу (68)).

6. Итак, переходим к доказательству неравенства (72). Пусть фиксировано произвольное $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_1)$. При всяком $s \in \{1, \ \ldots, \ t_1\}$ имеем*

$$\| X_{\mathbf{R}^k}(s, \ b_1) \| = \| Y_s \ldots Y_1 |_{\psi_0^{(k)} \mathbf{R}^k} \| \tag{73}$$

(в силу того, что диаграмма (70) при $b = b_1$ при всяком $m \in \{1, \ \ldots, \ t_1\}$ коммутативна, а ψ_i ($i \in \{0, \ 1, \ \ldots, \ t_1\}$) — изоморфизмы слоев как евклидовых пространств). Пользуясь формулой (73), при всяком $s \in \{t_0+1, \ \ldots, \ t_1\}$ имеем

$$\| X_{\mathbf{R}^k}(s, \ b_1) \| \geqslant \| Y_s \ldots Y_{t_0+1} |_{Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)} \psi_0^{(k)} \mathbf{R}^k} \| \, \| Y_{t_0}^{-1} \|^{-1} \ldots \| Y_1^{-1} \|^{-1}. \tag{74}$$

Из неравенств (69), условия в), наложенного на семейство морфизмов в начале § 3, и неравенства $\delta_0 < a\,(b_0)$ (см. выше замечание о том, что это неравенство можно предполагать выполненным) вытекает: для всякого $s \in \{t_0, \ \ldots, \ t_1\}$

$$\| Y_s^{-1} \| \leqslant \exp\,(2a\,(b_0)). \tag{75}$$

Из неравенств (74), (75) следует: при всяком $s \in \{t_0+1, \ \ldots, \ t_1\}$ имеет место неравенство

$$\| X_{\mathbf{R}^k}(s, \ b_1) \| \geqslant (\exp\,(-2t_0 a\,(b_0))) \, \| Y_s \ldots Y_{t_0+1} |_{Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)} \psi_0^{(k)} \mathbf{R}^k} \|. \tag{76}$$

Заметим теперь, что поскольку $Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1} b_0]$ при всяком $m \in \{t_0+1, \ \ldots, \ t_1\}$, то при всяком $s \in \{t_0+1, \ \ldots, \ t_1\}$ имеем

---

* Через $Y|_A$ обозначается сужение отображения Y на множество A.

$$Y_s \ldots Y_{t_0+1} = X[\chi^{s-1}b_0] \ldots X[\chi^{t_0}b_0] = X[\chi^{s-1}b_0] \ldots X[b_0](X[b_0])^{-1} \ldots$$
$$\ldots (X[\chi^{t_0-1}b_0])^{-1} = X(s,\ b_0)(X[b_0])^{-1} \ldots (X[\chi^{t_0-1}b_0])^{-1}. \qquad (77)$$

Из (77) при всяком $s \in \{t_0+1,\ \ldots,\ t_1\}$ имеем

$$\| Y_s \ldots Y_{t_0+1} |_{Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)}\psi_0^{(k)}\mathbf{R}^k} \| \geqslant \| X_{\mathbf{R}_{t_0}^k}(s,\ b_0) \| \cdot \| X[b_0] \|^{-1} \ldots \| X[\chi^{t_0-1}b_0] \|^{-1},$$

где

$$\mathbf{R}_{t_0}^k \underset{\text{def}}{=} (X^{-t_0})^{(k)} Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)} \psi_0^{(k)} \mathbf{R}^k,$$

откуда в силу неравенства $\| X[\chi^s b_0] \| \leqslant \exp(a(b_0))$, справедливого для всякого $s \in \mathbf{Z}$ в силу условия в), наложенного в начале § 3, получаем: при всяком $s \in \{t_0+1,\ \ldots,\ t_1\}$ имеет место неравенство

$$\| Y_s \ldots Y_{t_0+1} |_{Y_{t_0}^{(k)} \ldots Y_1^{(k)}\psi_0^{(k)}\mathbf{R}^k} \| \geqslant (\exp(-t_0 a(b_0))) \| X_{\mathbf{R}_{t_0}^k}(s,\ b_0) \|. \qquad (78)$$

Из (76) и (78) следует: при всяком $s \in \{t_0+1,\ \ldots,\ t_1\}$ имеет место неравенство

$$\| X_{\mathbf{R}^k}(s,\ b_1) \| \geqslant (\exp(-3t_0 a(b_0))) \| X_{\mathbf{R}_{t_0}^k}(s,\ b_0) \|. \qquad (79)$$

Так как $t_1 \geqslant \overline{t_0} > t_0 \geqslant m_0$, то имеют место неравенства

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}} \frac{1}{m_0+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m_0+t,\ b_1) \| \geqslant \sup_{t+1\in\mathbf{N}} \frac{1}{\overline{t_0}+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(\overline{t_0}+t,\ b_1) \| \geqslant$$
$$\geqslant \max_{t\in\{0,\ \ldots,\ t_1-\overline{t_0}\}} \frac{1}{\overline{t_0}+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(\overline{t_0}+t,\ b_1) \|. \qquad (80)$$

Из неравенств (79), (80) следует неравенство

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}} \frac{1}{m_0+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m_0+t,\ b_1) \| \geqslant \max_{t\in\{0,\ \ldots,\ t_1-\overline{t_0}\}} \frac{1}{\overline{t_0}+t} [-3t_0 a(b_0) +$$
$$+ \ln \| X_{\mathbf{R}_{t_0}^k}(\overline{t_0}+t,\ b_0) \|] \geqslant -\frac{3t_0}{\overline{t_0}} a(b_0) + \qquad (81)$$
$$+ \max_{t\in\{0,\ \ldots,\ t_1-\overline{t_0}\}} \frac{1}{\overline{t_0}+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_{t_0}^k}(\overline{t_0}+t,\ b_0) \|.$$

Число $\overline{t_0}$ было определено так, что оно удовлетворяет неравенству

$$\frac{3a(b_0)\,t_0}{\overline{t_0}} < \frac{3\sigma_0}{4},$$

поэтому из (81) следует неравенство

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}} \frac{1}{m_0+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m_0+t,\ b_1) \| \geqslant -\frac{3}{4}\sigma_0 +$$
$$+ \max_{t\in\{0,\ \ldots,\ t_1-\overline{t_0}\}} \frac{1}{\overline{t_0}+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_{t_0}^k}(\overline{t_0}+t,\ b_0) \|. \qquad (82)$$

До сих пор $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_1)$ было произвольным. Пусть теперь

$$\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_1) \cap V_2.$$

Тогда (см. выше определения V_2 и ψ_0)

$$\psi_0^{(k)} \mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_0) \cap V_1,$$

и поэтому (см. выше определения t_1 и $\mathbf{R}_{t_0}^k$) имеет место неравенство

$$\max_{t\in\{0,\ \ldots,\ t_1-\overline{t_0}\}} \frac{1}{\overline{t_0}+t} \ln \| X_{\mathbf{R}_{t_0}^k}(\overline{t_0}+t,\ b_0) \| > \lambda_{n-k}(b_0) - \frac{1}{4}\sigma_0.$$

Отсюда в силу (82) вытекает, что для всякого $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_1) \cap V_2$ имеет место неравенство

$$\sup_{t+1\in\mathbf{N}} \frac{1}{m_0+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m_0+t,\ b_1) \| \geqslant \lambda_{n-k}(b_0) - \sigma_0. \tag{83}$$

Так как

$$d\,(b_1,\ b_0) \underset{(71)}{<} \varepsilon_2 \underset{\text{def}}{=} \min\,(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1) \leqslant \varepsilon_1,$$

то в силу приведенного выше определения числа ε_1 (83) выполнено для всякого $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_1) \bigcap V_2$.

Таким образом, неравенство (83) доказано для всякого $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_1)$. В силу леммы 4 имеет место неравенство

$$\mu_k^{(m_0)}(b_1) = \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)} \sup_{t+1\in\mathbf{N}} \frac{1}{m_0+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m_0+t,\ b_1) \| \underset{(83)}{\geqslant} \lambda_{n-k}(b_0) - \sigma_0$$

(здесь $\mathbf{R}^n \in p^{-1}(b_1)$; а лучше было бы вместо $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$ писать $\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(b_1)$).

Итак, неравенство (72) доказано. Тем самым, как было отмечено в конце п. 5, получено противоречие, выведенное из предположения (см. п. 2), что утверждение теоремы неверно. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В ряде работ по теории показателей Ляпунова (см. § 7 обзора Н. А. Изобова [7]) рассматривается множество всех линейных n-мерных систем дифференциальных уравнений вида $\dot{\xi} = A(t)\,\xi$ таких, что $A(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$ — непрерывное отображение, для которого $\sup_{t\in\mathbf{R}^+} \| A(t) \| < +\infty$; это множество наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния по формуле

$$d\,(A_1,\ A_2) = \sup_{t\in\mathbf{R}^+} \| A_1(t) - A_2(t) \|$$

(вместо $\dot{\xi} = A_i(t)\,\xi$ пишем здесь коротко A_i). Это метрическое пространство обозначаем через M_n. Известно (см. [7], § 7), что из непрерывности всех показателей Ляпунова в точке пространства M_n следует интегральная разделенность подпространств решений системы (система есть точка в M_n), имеющих различные показатели Ляпунова (точную формулировку и библиографические указания см. в [7], § 7). В работе И. Н. Сергеева [8, 9] этот результат развит: доказано, что если $\lambda_{n-k}(A) > \lambda_{n-k+1}(A)$, то из полунепрерывности сверху $(n-k+1)$-го показателя Ляпунова в точке пространства M_n следует интегральная отделенность подпространства решений с показателями $\leqslant \lambda_{n-k+1}(A)$ от его алгебраического дополнения в пространстве всех решений.

Мы можем рассмотреть для этой ситуации тривиальное векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$, где $E \underset{\text{def}}{=} M_n \times \mathbf{R}^n$, $p \underset{\text{def}}{=} pr_1$ (проекция на первый сомножитель), $B \underset{\text{def}}{=} M_n$.

Для всякого $m \in \mathbf{N}$ определим морфизм $((X(m),\ \chi(m)): (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$, положив для всяких $A \in B$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ по определению

$$\chi(m)\,A(\cdot) = A(m+(\cdot)),$$

$$X\,(m)\,(A(\cdot),\ \xi) = (\chi(m)\,A(\cdot),\ \Xi_A(m,\ 0)\,\xi),$$

где $\Xi_A(\theta,\ \tau)$ — оператор Коши системы $\dot{\xi} = A(t)\,\xi$ (напомним, что оператор Коши $\Xi_A(\theta,\ \tau)$ по определению значению всякого решения $\xi(t)$ системы $\dot{\xi} = A(t)\,\xi$, в точке $t = \tau$ ставит в соответствие значение того же решения в точке $t = \theta$).

Легко проверить, что получаемое таким образом семейство морфизмов является насыщенным, но в этом частном случае теорема этой статьи не является новой (см. [10], где для этого частного случая доказано более сильное утверждение).

З а м е ч а н и е 2. В следующей статье цикла к семейству морфизмов построенному в

[2], § 2, применяется доказанная здесь теорема.

З а м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е . В работе [3] на с. 1773 в формуле (6) вместо $\sup\limits_{t \in \mathbf{R}}$ должно быть $(\forall t \in \mathbf{R})$; в 22-й строке сверху вместо p должно быть π (в двух случаях); на с. 1779 в 6-й строке сверху вместо q должно быть g.

Литература

1. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408—1416.
2. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. II. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1587—1598.
3. М и л л и о н щ и к о в В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 10, с. 1766—1785.
4. Х ь ю з м о л л е р Д. Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970.
5. Л я п у н о в А. М. Собр. соч. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2.
6. Д а л е ц к и й Ю. Л., К р е й н М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
7. И з о б о в Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В книге: Итоги науки и техники / Матем. анализ. — М.: Изд-во ВИНИТИ, 1974, т. 12, с: 71—146.
8. С е р г е е в И. Н. Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на бесконечности. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 3, с. 438—448.
9. С е р г е е в И. Н. Об открытом ядре множества систем дифференциальных уравнений с одним устойчивым показателем Ляпунова. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 6, с. 1135—1137.
10. М и л л и о н щ и к о в В. М. Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений. — Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 7, с. 1167—1170.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
31 марта 1980 г.