УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. III

Как и в предыдущих статьях [1, 2] этого цикла, мы рассматриваем семейство морфизмов

$$(X(m),\ \chi(m)) : (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$$

($m \in \mathbf{N}$) некоторого векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ со слоем $\mathbf{R}^n$, база которого B — полное метрическое пространство. Мы предполагаем, что отображения $X(m)$ не вырождены на слоях, т. е. что при всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ линейное отображение $X(m,\ b) : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi(m)\, b)$, определяемое как сужение на слой $p^{-1}(b)$ отображения $X(m)$, имеет обратное

$$[X(m,\ b)]^{-1} : p^{-1}(\chi(m)\, b) \to p^{-1}(b).$$

Зафиксировав некоторую риманову метрику на векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ (см. [3], с. 58 — 59), потребуем также, чтобы существовала функция $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$ такая, что для всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ было выполнено неравенство*

$$\max\,(\|X(m,\ b)\|,\ \ \|[X(m,\ b)]^{-1}\|) \leqslant \exp\,(m a(b)). \tag{1}$$

В статье [1] мы доказали некоторые формулы для показателей Ляпунова**

$$\lambda_k(b) \underset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\mathbf{R}^n)} \ \max_{\substack{\xi \in \mathbf{R}^{n-k+1} \\ \xi \neq 0}} \ \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\,\xi| \tag{2}$$

и с помощью этих формул вывели из теорем Бэра некоторые свойства функций $\lambda_k(\cdot)$. В более полном объеме содержание доказанных в [1] теорем выявляется в [2] и особенно в настоящей статье. В статье [2] мы применили сравнительно абстрактные результаты [1] к линейным системам дифференциальных уравнений и к линейным системам уравнений в конечных разностях. В этой статье мы применяем результаты [1] к нелинейным (вообще говоря)*** системам дифференциальных уравнений и к нелинейным (вообще говоря) диффеоморфизмам.

Здесь, может быть, своевременно пояснить, что ситуация, рассмотренная в [1], возникла в результате осуществления намерения охватить единым образом серию ситуаций, рассмотренных в [2], с одной стороны, и серию ситуаций, рассмотренных в настоящей статье, с другой стороны. Единое изложение, предпринятое в статье [1] на более абстрактном уровне, чем в [2] и в предлагаемой статье, позволило избежать параллелизма в изложении (как формулировок, так и доказательств результатов этого цикла). В результате осуществления такого плана изложения настоящая статья, как и [2], оказались в значительной степени состоящими из описания конструкций некоторой серии семейств морфизмов векторных расслоений, абстрактное задание которых воспроизведено

---

* Норма линейного отображения слоя на слой определяется как норма линейного оператора (собственно, это синонимы) (слои наделены структурами нормированных пространств заданием в них евклидовых структур, индуцированных фиксированной выше римановой метрикой).

** В формуле (2), определяющей показатели Ляпунова, $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$, $G_k(\mathbf{R}^n)$ — грассманово многообразие k- мерных линейных подпространств пространства $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$.

*** Слова «вообще говоря» здесь нужны, поскольку в случае $V^n = \mathbf{R}^n$ в рассматриваемых ниже пространствах систем на V^n некоторые системы (т. е. некоторые точки этих пространств) являются линейными (их там, правда, в некотором смысле совсем немного); впрочем, в литературе иногда, насколько можно понять, под выражением «нелинейные уравнения» понимается именно, «вообще говоря; нелинейные уравнения».

в начале настоящей статьи, и проверки для них условий теорем в [1]. Только что изложенное пояснение адресовано к тем читателям, которым ситуация, рассмотренная в [1], может сначала показаться «слишком абстрактной»; эта уже встречавшаяся в литературе абстракция (в частности, рассмотрение в качестве базы B расслоения (E, p, B) полного метрического пространства произвольной (бесконечной, вообще говоря, размерности) оправдана, и оправданием служат только что изложенные соображения (являющиеся, на наш взгляд, ничем иным как реализацией в данном вопросе стандартной мотивировки целесообразности построения абстракций).

В § 1—4 поставлена цель не сообщить читателю что-то новое, а подготовить почву для применения результатов статьи [1] к хорошо известным объектам. Формулировки результатов содержатся в § 5.

§ 1. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Пусть V^n — связное дифференцируемое (класса C^1) n-мерное многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика (тоже класса C^1).

З а м е ч а н и е . Требование существования счетной базы нам нужно для существования римановой метрики. Наличие счетной базы влечет паракомпактность V^n (см. [4], гл. II, лемма 4.1), которая в свою очередь влечет существование римановой метрики (см. [3], гл. 3, теорема п. 9.5; [5], гл. I, п. 6.7). Отметим, что требование существования счетной базы иногда включается в определение многообразия (так делается, например, в [4], гл. II, определение 1.1); именно поэтому справедливо утверждение леммы 4.1, гл. II в [4] о том, что всякое многообразие паракомпактно. Другие авторы (см., например, [6, 7]) не включают требование существования счетной базы в определение многообразия; это позволяет не исключать из рассмотрения такие интересные объекты, как линию Александрова, являющуюся (при таком подходе к определению многообразия) гладким связным одномерным многообразием, не паракомпактным и не имеющим римановой метрики (см. [7], §2, задача 2.Д).

Отметим также, что в книге [5] изложение детали, обсуждаемой в этом нашем замечании, занимает, так сказать, промежуточное положение (между двумя вышеописанными трактовками). Требование наличия счетной базы не включено там в определение дифференцируемого многообразия (§ 6, п. 6.1), хотя и сказано, что внимание сосредотачивается на сепарабельных метрических многообразиях. В формулировке теоремы п. 12.12 (§ 12) требование наличия счетной базы подразумевается (ссылки, данные в доказательстве этой теоремы, приводят читателя через п. 12.3 к п. 12.2, в котором это требование наложено явно).

Так или иначе, поскольку для наших построений нужна риманова метрика, мы рассматриваем только дифференцируемые многообразия со счетной базой (напомним, что наличие счетной базы у связного многообразия — не только достаточное, но и необходимое условие существования линейной связности (см. в [6]; примечание 6) к гл. II), а тем более существования римановой метрики (см. [6], примечание 3) к гл. III).

Как известно, с помощью этой римановой метрики V^n наделяется структурой метрического пространства; мы потребуем, чтобы это метрическое пространство (которое тоже будем обозначать через V^n) было полным. Через (TV^n, π, V^n) будем обозначать касательное расслоение многообразия V^n; через TV^n — пространство этого векторного расслоения, стандартным образом наделённое структурой дифференцируемого многообразия; зафиксированная нами риманова метрика, как известно, есть не что иное как риманова метрика в (гладком) векторном расслоении (TV^n, π, V^n) (определяемая, как в [3], определение 9.2, гл. 3, с той разницей, что здесь мы требуем, чтобы отображение в было не только непрерывным, но и гладким (класса C^1)).

2. Пусть F — гладкое (класса C^1) векторное поле на V^n, т. е. дифференцируемое

(класса C^1) отображение $F : V^n \to TV^n$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "1_{V^n}"'] & & TV^n \arrow[dl, "\pi"] \\ & V^n & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Потребуем, чтобы это векторное поле удовлетворяло следующему условию:

$$||| \nabla F ||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \| \nabla F(x) \| < +\infty, \tag{3}$$

где ∇F — ковариантный дифференциал векторного поля F.

В следующем пункте напоминаем понятия и обозначения, необходимые для понимания условия (3), и точно разъясняем смысл этого условия. Читатель, которому смысл условия (3) ясен, может пропустить весь следующий далее п. 3 этого параграфа без ущерба для понимания дальнейшего изложения.

3. Итак, разъясним смысл условия (3) и напомним, где можно найти нужные для его понимания понятия и обозначения.

Риманова метрика на многообразии V^n, которую мы зафиксировали выше, индуцирует на V^n риманову связность (см. [6], примечание 3) в конце гл. III); с помощью этой линейной связности определяется ковариантная производная $\nabla_H \cdot F$ векторного поля F относительно любого (класса C^1) векторного поля H на V^n (см. [6], гл, III, § 3)[*]. Из теоремы § 3, гл. III, книги [6] (точнее, из утверждений 1) и 3) этой теоремы в соединении с тем соображением, что если взять в V^n координатную окрестность U с локальными координатами $u^1, \ldots, u^n$, то векторные поля $H_i = \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) образуют базис в модуле гладких векторных полей на U над кольцом гладких функций на U) вытекает: для всякой точки $x \in V^n$ и всяких двух гладких (класса C^1) векторных полей H' и H'' на V^n, значения которых в точке x совпадают: $H'(x) = H''(x)$[**], совпадают и значения ковариантных производных $\nabla_{H'} F$ и $\nabla_{H''} F$ в этой точке (где F — произвольное гладкое (класса C^1) векторное поле на V^n): $(\nabla_{H'} \cdot F)(x) = (\nabla_{H''} \cdot F)(x)$[*]. Благодаря этому для каждого фиксированного векторного поля F ковариантная производная $\nabla_H \cdot F$ задает при каждом $x \in V^n$ отображение $\nabla F(x) : T_x V^n \to T_x V^n$ ($T_x V^n = \pi^{-1}(x)$ — касательное пространство многообразия V^n в точке x), сопоставляющее вектор $H(x)$ с вектором $(\nabla_H \cdot F)(x)$; это отображение линейное в силу тех же утверждений 1) и 3) теоремы § 3, гл. III, книги [6]. Зафиксированная (в начале этого параграфа) риманова метрика на многообразии V^n позволяет определить стандартным образом норму этого линейного отображения (как максимальный коэффициент растяжения длин ненулевых векторов). Эту норму мы обозначим через $\| \nabla F(x) \|$. Теперь смысл неравенства (3) полностью разъяснен.

4. Рассмотрим теперь множество всех гладких (класса C^1) векторных полей F на

---

[*] Мы часто цитируем [6], где изложение ведется в предположении, что все многообразия, векторные поля и т. д. имеют класс C^∞. Строго говоря, и нам здесь надо было бы наложить аналогичное требование, так как мы ссылаемся на эту книгу. Однако мы позволяем себе уменьшить требования на классы гладкости, поскольку это не приводит к необходимости вносить существенные изменения в [6].

[**] Значение векторного поля F в точке $x \in V^n$ будем обозначать через $F(x)$; в книге [6] для того же объекта принято обозначение F_x.

[*] Через $(\nabla_H \cdot F)(x)$ обозначаем значение векторного поля $\nabla_H \cdot F$ (где H — некоторое векторное поле) в точке x. В [6] тот же объект обозначается через $(\nabla_H \cdot F)_x$.

многообразии V^n, удовлетворяющих условию (3), и наделим это множество структурой метрического пространства, зафиксировав произвольную точку $x_0 \in V^n$ и задав расстояние формулой

$$d\,(F_1,\,F_2) \underset{\text{def}}{=} |\,F_1(x_0) - F_2(x_0)\,| + \sup_{x \in V^n} \|\,\nabla F_1(x) - \nabla F_2(x)\,\|$$

(напомним, что многообразие V^n у нас предполагается связным). Так определенная метрика зависит, конечно, от выбора точки x_0, в то же время легко проверить, что всякие две такие метрики (т. е. две метрики, различающиеся только выбором точки x_0) эквивалентны. Хорошо известно (и легко доказывается), что так определенное метрическое пространство полно. Обозначим его буквой S (считая излишним вводить в обозначение этого пространства значок x_0 (отмеченную точку) в основном в силу сделанного выше замечания об эквивалентности метрик; а впрочем, читатель может считать точку $x_0 \in V^n$ каким-нибудь образом раз навсегда фиксированной и не задумываться об упомянутой эквивалентности метрик). Для краткости не вводим в обозначение пространства S и значок V^n, который указывал бы, по какому многообразию V^n мы построили пространство S.

5. Настоящий пункт весь состоит из одного замечания. Мы можем рассматривать также другое метрическое пространство — пространство гладких (класса C^1) векторных полей F на V^n, подчиняющихся требованию:

$$|||\,F\,|||_{C^1(V^n)} \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} |\,F(x)\,| + \sup_{x \in V^n} \|\,\nabla F(x)\,\| < +\infty$$

(здесь снова нормы, стоящие в правой части неравенства, индуцированы фиксированной выше римановой метрикой на V^n). Если наделить это множество структурой метрического пространства, задав расстояние формулой

$$\hat{d}\,(F_1,\,F_2) \underset{\text{def}}{=} |||\,F_1 - F_2\,|||_{C^1(V^n)},$$

то получится полное метрическое пространство $\hat{S}$, которое как множество (но не как метрическое пространство, вообще говоря) содержится в пространстве S, определенном в предыдущем пункте.

В построениях последующих пунктов не требуется никаких сколько-нибудь нетривиальных изменений, чтобы приспособить их к пространству $\hat{S}$, заменив им пространство S. Мы предпочитаем, однако, вести основное изложение именно для пространства S, исходя главным образом из интересов относительно прикладного характера: некоторые из примеров не удалось бы рассмотреть в рамках пространства $\hat{S}$ (это вовсе не означает, что в рамках пространства $\hat{S}$ нет содержательных результатов; просто это — другие результаты). Само собой разумеется, что в случае, когда многообразие V^n замкнутое (т. е. компакт), пространства S и $\hat{S}$ совпадают как множества и эквивалентны как метрические пространства. Поэтому рассмотрение того, или иного из них приводит к разным результатам только тогда, когда многообразие V^n не является замкнутым. Наша цель, однако, получение результатов, справедливых и для незамкнутых (т. е. некомпактных) многообразий V^n, например для $\mathbf{R}^n$.

6. Вернемся к пространству S, определенному в п. 4. Обратим здесь внимание читателя на одно свойство векторных полей, являющихся точками пространства S (заметим, что этим свойством, конечно, обладают и векторные поля, являющиеся точками пространства $\hat{S}$, определенного в п. 5, поскольку множество $\hat{S}$ содержится в S). Свойство это вот какое: всякое векторное поле $F \in S$ — полное (по поводу этого термина см. [6], гл. 1, § 2), т. е. всякое решение дифференциального уравнения на многообразии V^n

$$\dot{x} = F(x) \tag{4}$$
может быть продолжено на все $\mathbf{R}$ (так что получится решение этого уравнения на всем $\mathbf{R}$). Благодаря этому векторное поле F индуцирует дифференцируемое (класса C^1) действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n (см. [6], гл. I, § 2, где это дифференцируемое действие группы $\mathbf{R}$ на V^n называется однопараметрической группой дифференцируемых преобразований многообразия V^n и обозначается через φ_t; там же доказано, что продолжаемости всех решений уравнения (4) на все $\mathbf{R}$ достаточно для того, чтобы векторное поле F индуцировало дифференцируемое действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n (если этой продолжаемости нет, то существует лишь локальное действие группы $\mathbf{R}$ на V^n)).

Продолжаемость на все $\mathbf{R}$ всех решений уравнения (4) выводится из условия (3) хорошо известным способом (да и само утверждение о том, что из условия (3) вытекает продолжаемость на все $\mathbf{R}$ всех решений уравнения (4), хорошо известно: в [8] (гл. I, теорема 3) это утверждение приведено (вместе с доказательством) для случая $V^n = \mathbf{R}^n$, данное там доказательство легко переносится на наш общий случай (нужно вести рассмотрение в соответствующих картах и пользоваться вытекающим из (3) свойством $|F(x)| = O(\rho(x, x_0))$ (при $\rho(x, x_0) \to \infty$, где ρ — расстояние на V^n (оно у нас было зафиксировано в п. 1))).

7. Построим векторное расслоение (E, p, B), обладающее свойствами, сформулированными в начале этой статьи, исходя из связного дифференцируемого (класса C^1) n-мерного многообразия V^n со счетной базой с зафиксированной на нем римановой метрикой, индуцирующей на V^n структуру полного метрического пространства, и пространства S векторных полей на V^n, определенного выше в п. 4 этого параграфа. При изложении этого построения будем пользоваться обозначениями, разъясненными в предыдущих пунктах этого параграфа, без специальных напоминаний.

Положим $B \underset{\text{def}}{=} S \times V^n$. Так как S и V^n — полные метрические пространства, то B — полное метрическое пространство. Положим
$$E \underset{\text{def}}{=} S \times TV^n,\ p \underset{\text{def}}{=} 1_S \times \pi.$$
Так определенное расслоение (E, p, B) наделяется структурой векторного расслоения (со слоем $\mathbf{R}^n$) заданием атласа (см. [3], гл. 3, раздел 1; гл. 5, раздел 2)
$$\{g_i : (S \times U_i) \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}(S \times U_i)\}_{i \in I},$$
определенного по атласу
$$\{h_i : U_i \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$$
(где I — некоторое множество) векторного расслоения (TV^n, π, V^n) формулой $g_i \underset{\text{def}}{=} 1_S \times h_i$ (чтобы придать смысл этой формуле, надо рассмотреть $(S \times U_i) \times \mathbf{R}^n$ как $S \times (U_i \times \mathbf{R}^n)$). Так определенное векторное расслоение (E, p, B) можно эквивалентным образом определить как векторное расслоение, индуцированное отображением $pr_2 : S \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и векторным расслоением (TV^n, π, V^n) (см. [3], гл. 2, п. 5.3 и гл. 3, п. 3.1).

Векторное расслоение (E, p, B) со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B, являющейся полным метрическим пространством, построено. В п. 1 этого параграфа мы зафиксировали на векторном расслоении (TV^n, π, V^n) некоторую риманову метрику (класса C^1), т. е. зафиксировали гладкое (класса C^1) отображение δ подпространства прямого произведения $TV^n \times TV^n$, состоящего из всех тех точек $(\varepsilon, \varepsilon')$, для которых $\pi\varepsilon = \pi\varepsilon'$, в $\mathbf{R}$

такое, что для всякого $x \in V^n$ сужение на векторное пространство $\pi^{-1}(x)\times\pi^{-1}(x)$ отображения δ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(x)$. Рассмотрим подпространство прямого произведения $E\times E$, состоящее из всех тех точек $(e,\ e')$, для которых $pe = pe'$.

Зададим отображение этого подпространства в пространство вещественных чисел $\mathbf{R}$ формулой

$$\Delta(e,\ e') \underset{\text{def}}{=} \delta(ue,\ ue'),$$

где через u обозначаем проекцию произведения $E = S\times TV^n$ на второй сомножитель. Обозначим через v проекцию произведения $B = S\times V^n$ на второй сомножитель. Обозначим через u_b сужение u на слой $p^{-1}(b)$. Так как для всякого $b\in B$ отображение u_b есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\pi^{-1}(vb)$, а сужение δ на $\pi^{-1}(vb)\times\pi^{-1}(vb)$ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(vb)$, то для всякого $b\in B$ сужение Δ на $p^{-1}(b)\times p^{-1}(b)$ является скалярным произведением на слое $p^{-1}(b)$. Так как отображения u и δ непрерывны, то отображение Δ непрерывное. Таким образом, мы зафиксировали риманову метрику Δ на векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$.

8. Построим семейство морфизмов (в категории векторных расслоений)

$$(X(m),\ \chi(m)) : (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$$

($m\in\mathbf{N}$), обладающее свойствами, сформулированными в начале этой статьи. Как и в п. 7 этого параграфа, считаем фиксированным связное дифференцируемое (класса C^1) n-мерное многообразие V^n со счетной базой и считаем фиксированной риманову метрику на V^n, индуцирующую на V^n структуру полного метрического пространства.

Пусть $F\in S$ (см. п. 4, § 1). Согласно изложенному в п. 6 этого параграфа, векторное поле F индуцирует дифференцируемое (класса C^1, т. е. один раз непрерывно дифференцируемое) действие f^t группы $\mathbf{R}$ на многообразии V^n.

Через df_x^t обозначим производную (по терминологии книги [6] — дифференциал) отображения f^t в точке $x\in V^n$ (см. [6], гл. 1, § 1). При каждом $t\in\mathbf{R}$ имеется непрерывное отображение $df^t : TV^n \to TV^n$, определяемое следующим образом: для всякого $\varepsilon\in TV^n$

$$df^t\varepsilon \underset{\text{def}}{=} df^t_{\pi\varepsilon}\varepsilon \in \pi^{-1}(f^t\pi\varepsilon)\subset TV^n$$

(df^t дифференцируемо по t). Пара отображений

$$(df^t,\ f^t) : (TV^n,\ \pi,\ V^n) \to (TV^n,\ \pi,\ V^n)$$

является морфизмом (в категории векторных расслоений). Фиксируем произвольное $m\in\mathbf{N}$ (собственно говоря, мы могли бы и дальше рассматривать не только натуральные, но и все вещественные m; мы не делаем этого лишь потому, что для наших целей это излишне). Положим

$$X(m) \underset{\text{def}}{=} 1_S\times df^m : E\to E$$

(иными словами, всякое $e\in E$ есть пара $(F,\ \varepsilon)$, где $F\in S$, $\varepsilon\in TV^n$; полагаем

$$X(m)\,e = X(m)\,(F,\ \varepsilon) \underset{\text{def}}{=} (F,\ df^m\varepsilon)\in E\ ).$$

Положим, кроме того,

$$\chi(m) \underset{\text{def}}{=} 1_{S_1}\times f^m : B\to B.$$

(иными словами, всякое $b\in B$ есть пара $(F,\ x)$, где $F\in S$, $x\in V^n$; полагаем

$$\chi(m)\,b = \chi(m)\,(F,\ x) \underset{\text{def}}{=} (F,\ f^m x)\in B\ ).$$

Поскольку при всяком $m \in \mathbf{N}$ отображение $X(m): E \to E$ непрерывно, то из того, что (df^m, f^m) при всяком $m \in \mathbf{N}$ есть морфизм (в категории векторных расслоений) $(TV^n,\ \pi,\ V^n) \to (TV^n,\ \pi,\ V^n)$, следует, что

$$(X(m),\ \chi(m)): (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$$

при всяком $m \in \mathbf{N}$ есть морфизм (в категории векторных расслоений). При этом поскольку при всяком $t \in \mathbf{R}$ морфизм (df^t, f^t) имеет обратный (df^{-t}, f^{-t}), то и морфизм $(X(m),\ \chi(m))$ при всяком $m \in \mathbf{N}$ имеет обратный:

$$(X^{-1}(m),\ \chi^{-1}(m)) = (1_S \times df^{-m},\ 1_S \times f^{-m})$$

(т. е. является изоморфизмом (в категории векторных расслоений)). Поэтому отображение $X(m): E \to E$ не вырождено на слоях и при всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ имеем $[X(m,\ b)]^{-1} = X^{-1}(m,\ \chi(m)\,b)$. Семейство морфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$:

$$(X(m),\ \chi(m)): (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$$

построено.

Может быть, именно здесь уместно сделать одно замечание об отличии конструкций статьи [2] от конструкций настоящей статьи. И здесь и там строим векторное расслоение (E, p, B), умножая некоторое исходное векторное расслоение ($(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ в [2], $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ в этой статье) на некоторое пространство отображений (в [2]) или векторных полей (в этой статье) (эти пространства отображений и векторных полей всюду обозначаются у нас буквой S или той же буквой S с индексом); в этом — сходство; различие пряявляется, в частности, в том, что в [2] динамическая система f^m не зависела от элемента пространству S_i, а в этой статье динамическая система f^m зависит от элемента пространства S.

Докажем теперь существование функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ такой, что для всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ выполняется неравенство (1) (для искушенного читателя достаточно одного указания: существование такой функции $a(\cdot)$ следует из условия (3), которому удовлетворяют векторные поля $F \in S$).

Определим функцию $a(\cdot)$ следующим образом: всякое $b \in B$ есть пара $(F,\ x)$, где $F \in S$, $x \in V^n$. Положим

$$a(b) = a(F,\ x) \underset{\text{def}}{=} |||\nabla F||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \|\nabla F(x)\| \tag{5}$$

(таким образом, a зависит только от F, но не от x). В силу определения пространства S всякое $F \in S$ удовлетворяет неравенству (3), откуда следует, что только что определенная функция $a(\cdot)$ отображает B в $\mathbf{R}^+$.

Докажем, что построенное нами в этом пункте семейство морфизмов $(X(m),\ \chi(m))$ ($m \in \mathbf{N}$) и только что определенная функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ удовлетворяют неравенству (1). Для доказательства этого утверждения достаточно доказать, что

$$\nabla F \in R\, |||df^t||| \leqslant \exp(|t| \cdot |||\nabla F|||), \tag{6}$$

где

$$|||df^t||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \|df^t_x\|,$$

$\|df^t_x\|$ — норма производной df^t_x (как линейного оператора), порожденная нормами в слоях $\pi^{-1}(x)$ и $\pi^{-1}(f^t x)$, индуцированными зафиксированной выше римановой метрикой многообразия V^n. Для доказательства неравенства (6) запишем уравнение в вариациях (при варьировании начального значения) уравнения (4) в удобной для этой цели форме, а именно:

$$\nabla_F \cdot (df^t_x \eta)\,|_{t=0} = \nabla_\eta \cdot F(x), \tag{7}$$

где x — произвольная точка многообразия V^n, η — произвольный вектор касательного пространства $\pi^{-1}(x)$ многообразия V^n в точке x. Пояснения к формуле (7): в [6] (гл. III, § 3) определяется ковариантная производная $\nabla_H \cdot F$, где H — векторное поле (ее значение в точке x обозначаем $\nabla_H F(x)$ вместо принятого в [6] обозначения $\nabla_H F_x$); затем оказывается (выше в п. 3 § 1 уже упоминалось об этом и там же отмечалось, как это доказывается), что $\nabla_H F(x)$ зависит, собственно, не от векторного поля H, а только от его значения в точке x; поэтому если нам задан вектор $\eta \in \pi^{-1}(x)$, то, взяв такое векторное поле H, что его значение $H(x)$ в точке x есть η (такое векторное поле класса C^1 (многообразие V^n имеет класс C^1) всегда, как легко доказывается, существует), мы вправе $\nabla_H \cdot F(x)$ обозначить через $\nabla_\eta \cdot F(x)$; тем самым смысл правой части равенства (7) полностью разъяснен. Разъясним смысл левой части этого равенства. Когда определяется $\nabla_F \cdot K(x)$ (см. снова [6], гл. III, § 3), совсем не обязательно знать векторное поле $K(x)$ где-либо, кроме как в точках интегральной кривой векторного поля F, проходящей через точку x, притом достаточно знать его в некоторой окрестности точки x; этим замечанием смысл левой части равенства (7) полностью разъяснен, если учесть, что $df_x^t \eta \in \pi^{-1}(f^t x)$, т. е. что, выбрав вектор η, мы тем самым задаем в каждой точке интегральной кривой $f^t x$ векторного поля F вектор $df_x^t \eta \in \pi^{-1}(f^t x)$.

Мы, впрочем, можем для всякого $\eta \in \pi^{-1}(x)$ построить векторное поле $K = K_{(\eta)}$, значение которого в точке $f^t x$ равно $df_x^t \eta$ (при всех достаточно малых $|t|$); сделать это не составляет труда; построим это векторное поле K так, чтобы оно, вдобавок, коммутировало с полем F, т. е. чтобы их скобка равнялась нулю: $[F, K] = 0$ (см. [6], гл. I, § 1, где определена скобка векторных полей, и теорему § 2, гл. I, которой мы здесь воспользуемся); все построения достаточно, конечно, провести в некоторой окрестности U точки x.

Обозначим через U_1 какую-нибудь координатную окрестность, содержащую точку x, в U_1 возьмем какое-нибудь гладкое (класса C^1) подмногообразие W^{n-1} коразмерности 1, содержащее точку x и трансверсальное к $F(x)$, т. е. такое, что вектор $F(x) \in \pi^{-1}(x)$ не касается этого подмногообразия; так как это подмногообразие и векторное поле F имеют класс C^1, то существует окрестность $U_2 \subset U_1$ точки x, в которой это подмногообразие трансверсально векторному полю F (т. е. вектор $F(y)$ не касается этого подмногообразия ни при каком $y \in U_2$). Еще сузим окрестность: возьмем окрестность U точки x, замыкание которой — компакт, содержащийся в U_2.

Выберем при всяком $y \in W^{n-1} \bigcap U$ вектор $\eta(y) \in \pi^{-1}(y)$ так, чтобы $\eta(x) = \eta$ и чтобы отображение $\eta(\cdot)$ было гладким (класса C^1) (возможность такого выбора хорошо известна; напомним, что все рассуждения проводятся сейчас в координатной окрестности U, и потому их достаточно провести в области $\subset \mathbf{R}^n$).

Теперь определим векторное поле K на некоторой окрестности точки x следующим равенством:

$$K(f^t y) = df_y^t \eta(y) \tag{8}$$

(при всяком $y \in W^{n-1} \bigcap U$: из теоремы о дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по начальным значениям (поскольку здесь речь идет об уравнении $\dot{x} = F(x)$, суженном на координатную окрестность, то применима классическая теорема о дифференцируемости по начальным значениям (для дифференциальных уравнений в $\mathbf{R}^n$), и в силу этой теоремы при некотором $\varepsilon > 0$ при всяком $|t| < \varepsilon$ и всяком $y \in W^{n-1} \bigcap U$ написанная формула (8) имеет смысл и задает гладкое (класса C^1) векторное поле K на некоторой окрестности точки x многообразия V^n. Из формулы (8) в силу теоремы из § 2, гл. I, книги [6] непосредственно следует: $[F, K] = 0$). Подлежащая доказательству формула (7), которую в силу разъяснений и обозначений, приведенных выше, можно переписать в виде

$$\nabla_F \cdot K = \nabla_K \cdot F,$$

следует из доказанного нами тождества $[F, K] = 0$, так как рассматриваемая нами линейная связность на V^n (через которую мы определили ковариантные производные) риманова, и поэтому поле тензора кручения $\nabla_F \cdot K = \nabla_K \cdot F = [F, K]$ является нулевым (см. [6], теорема из § 5, гл. III и примечание 3) к гл. III). Доказав таким образом формулу (7), докажем теперь неравенство (6).

Параллельное перенесение векторов (в силу все той же римановой связности) вдоль дуги интегральной кривой $f^t x$ векторного поля F, начинающейся в точке x, индуцирует изоморфизмы слоев $\varphi_{x;\,0,\,t} : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(f^t x)$, причем изоморфизмы не только как лилейных пространств, но и, поскольку связность риманова, как евклидовых пространств (см. примечание 3) к гл. III в [6]).

Рассмотрим зависящее от t отображение

$$\varphi^{-1}_{x;\,0;\,t} \circ (df^t_x) : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x);$$

поскольку в силу определения ковариантной производной (см. [6], гл. III, § 3)

$$\frac{d}{dt}[(\varphi^{-1}_{x;\,0,\,t} \circ df^t_x)\,\eta]\,|_{t=0} = \nabla_F \cdot (df^t_x \eta)\,|_{t=0}$$

при всяком $\eta \in \pi^{-1}(x)$, то в силу формулы (7), доказанной выше, имеем формулу

$$\frac{d}{dt}[(\varphi^{-1}_{x;\,0,\,t} \circ df^t_x)\,\eta]\,|_{t=0} = \nabla_\eta \cdot F(x).$$

Так как последняя формула доказана нами для всяких $x \in V^n$, $\eta \in \pi^{-1}(x)$, а $\varphi_{x;\,0,\,t}$ — изоморфизмы евклидовых пространств, непрерывно дифференцируемым образом зависящие от t (при фиксированном x), то из последней формулы неравенство (6) вытекает в силу хорошо известного неравенства

$$|\,\xi\,(t)\,| \leqslant |\,\xi\,(0)\,|\,\exp\,(|\,t\,| \sup_{t \in \mathbf{R}} \|\,A\,(t)\,\|)\ \ (t \in \mathbf{R}) \tag{9}$$

для решения $\xi\,(t)$ линейной системы дифференциальных уравнений $\dot{\xi} = A\,(t)\,\xi$ ($\xi \in \mathbf{R}^n$, а непрерывное отображение $A\,(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$ таково, что $\sup\limits_{t \in \mathbf{R}} \|\,A\,(t)\,\| < +\infty$).

9. Мы закончили построение некоторого класса семейств морфизмов векторных расслоений

$$(X(m),\ \chi\,(m)) : (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$$

($m \in \mathbf{N}$) и проверили для семейств этого класса все условия, сформулированные в начале статьи [1] и воспроизведенные в начале этой статьи. Тем самым доказаны для семейств этого класса леммы 1—5 и теоремы 1—3 в [1]. Подчеркнем, что в случае, когда многообразие V^n параллелизуемо (т. е. его касательное расслоение тривиально), изучение построенного семейства морфизмов является вполне содержательной задачей. В конце статьи мы приводим формулировки результатов в случае $V^n = \mathbf{R}^n$, причем даем их в такой форме, чтобы их можно было поднять, не обращаясь к [1, 2], и в предшествующий этим формулировкам текст этой статьи (кроме того, в формулировках, приведенных в конце статьи, не используется язык векторных расслоений и дифференцируемых многообразий).

§ 2. СИСТЕМЫ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ И ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Вернемся к пространству S, определенному в п. 4, § 1. Рассмотрим два подпространства этого пространства.

1. Пусть V^n — дифференцируемое многообразие, такое же, как в п. 1, § 1. Поскольку на V^n задана риманова метрика, то тем самым на V^n задана мера Лебега; отметим, что при этом мера всего многообразия V^n не предполагается конечной (она может оказаться как конечной, так и бесконечной).

Пусть $F \in S$ (см. п. 4, § 1). Пусть f^t гладкая динамическая система на V^n (т. е. гладкое (класса C^1) действие группы $\mathbf{R}$ на V^n), индуцированная векторным полем F (см. п. 6, § 1). Потребуем от векторного поля, чтобы динамическая система f^t сохраняла меру (объем). Как известно, это требование эквивалентно требованию: $\operatorname{div} F \equiv 0$ на V^n. Множество S_0 всех таких $F \in S$, для которых это требование выполнено, будем рассматривать как подпространство метрического пространства S. Поскольку S_0 очевидно замкнуто в S, а S — полное метрическое пространство, то и S_0 — полное метрическое пространство.

2. Пусть V^n — дифференцируемое многообразие, такое же, как в п. 1, § 1. Пусть, кроме того, выполнено следующее требование: V^n — гамильтоново (или симплектическое) многообразие (см. [4], гл. III, § 7). Отсюда следует, конечно, что n — четное число. Пусть $h: V^n \to \mathbf{R}$ — некоторая вещественная функция класса C^2 на V^n. Сопоставим ей векторное поле F_{dh} (см. [4], гл. III, § 7, с той небольшой разницей в обозначениях, что мы пользуемся для обозначения векторного поля буквой F, а не буквой X, занятой у нас для другой цели; по сходным соображениям (чтобы при беглом чтении статьи не возникало соблазна счесть функцию Гамильтона объектом той же природы, что и F (по причине близкого расположения букв F и H в латинском алфавите)) мы предпочли здесь использовать для обозначения функции Гамильтона строчную букву h вместо более принятой для этой цели прописной буквы H). Потребуем от функции h, чтобы векторное поле F_{dh} принадлежало пространству S, т. е. чтобы $F \underset{\text{def}}{=} F_{dh}$ удовлетворяло условию (3). Множество всех таких функций h обозначим через $\boldsymbol{S}_{\mathcal{H}}$, а множество соответствующих им векторных полей F_{dh} обозначим через $S_{\mathcal{H}}$. Тривиально проверяется, что $\boldsymbol{S}_{\mathcal{H}}$ — замкнутое множество в метрическом пространстве S (для проверки этого утверждения можно, например, воспользоваться формулой, выражающей F_{dh} в подходящих картах (см. [4], последняя формула на с. 155)).

Фактор-множество множества $\boldsymbol{S}_{\mathcal{H}}$ по отношению эквивалентности $h_1 \sim h_2$, если $h_1 - h_2 = \text{const}$, обозначим $\boldsymbol{S}^0_{\mathcal{H}}$. Отображение, переводящее функцию h в векторное поле F_{dh}, индуцирует биекцию (взаимно-однозначное отображение на) $\boldsymbol{S}^0_{\mathcal{H}}$ на $S_{\mathcal{H}}$. Будем рассматривать $S_{\mathcal{H}}$ не просто как множество, а как метрическое пространство — подпространство метрического пространства S (допуская довольно часто встречающуюся вольность речи, мы обозначаем в случаях, когда, как нам кажется, это не может привести к недоразумению, метрическое пространство и множество его точек одной и той же буквой). Указанная биекция множества $\boldsymbol{S}^0_{\mathcal{H}}$ на $S_{\mathcal{H}}$ индуцирует тогда структуру метрического пространства на $\boldsymbol{S}^0_{\mathcal{H}}$. Так как S — полное метрическое пространство, а $S_{\mathcal{H}}$ — его замкнутое подпространство, то $\boldsymbol{S}^0_{\mathcal{H}}$ и $S_{\mathcal{H}}$ — полные метрические пространства (изоморфные друг другу).

3. Пусть снова V^n — многообразие, такое же, как в п. 1, § 1. Положим $B_0 \underset{\text{def}}{=} S_0 \times V^n$, $E_0 \underset{\text{def}}{=} S_0 \times TV^n$. Так как S_0 и V^n — полные метрические пространства, то и B_0 — полное метрическое пространство. Векторное расслоение (E_0, p_0, B_0) определим как сужение векторного расслоения; (E, p, B), построенного в п. 7, § 1 (база сужается с B до B_0). Построенные в п. 8, § 1 морфизмы $(X(m), \chi(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ векторного расслоения (E, p, B) очевидно оставляют векторное расслоение (E_0, p_0, B_0) инвариантным (т. е. отображают его в себя). Сужения морфизмов $(X(m), \chi(m))$ на (E_0, p_0, B_0) обозначим через $(X_0(m), \chi_0(m))$.

Итак, B_0 — полное метрическое пространство, а семейство морфизмов $(X_0(m), \chi_0(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ векторного расслоения (E_0, p_0, B_0) наследует, очевидно, все свойства, сформулированные в начале статьи [1] и проверенные нами для построенного в § 1 настоящей статьи семейства морфизмов $(X(m), \chi(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ векторного расслоения (E, p, B).

Установив это, мы доказали для построенного семейства морфизмов $(X_0(m), \chi_0(m))$, $(m \in \mathbf{N})$ векторного расслоения (E_0, p_0, B_0) леммы 1—5 и теоремы 1—3; статьи [1] (имеется в виду, что надо в этих леммах и теоремах поставить у каждой из букв E, p, B, X, χ индекс «ноль», тогда они и превратятся в утверждения о построенном здесь семействе).

4. Пусть теперь V^n удовлетворяет требованиям, сформулированным в начале п. 2 этого параграфа, т. е. V^n $(n = 2k)$ — гамильтоново (т. е. симплектическое) многообразие, для которого выполнены все требования, содержащиеся в п. 1, § 1. Положим

$$B_{\mathcal{H}} \underset{\text{def}}{=} S_{\mathcal{H}} \times V^n, \; E_{\mathcal{H}} \underset{\text{def}}{=} S_{\mathcal{H}} \times TV^n.$$

Так как $S_{\mathcal{H}}$ и V^n — полные метрические пространства, то и $B_{\mathcal{H}}$ — полное метрическое пространство.

Векторное расслоение $(E_{\mathcal{H}}, p, B_{\mathcal{H}})$ определим как сужение векторного расслоения (E, p, B), построенного выше в п. 7, § 1 (база сужается с B до $B_{\mathcal{H}}$). Построенные выше в п. 8, § 1 морфизмы $(X(m), \chi(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ векторного расслоения (E, p, B) очевидно оставляют векторное расслоение $(E_{\mathcal{H}}, p, B_{\mathcal{H}})$ инвариантным (т. е. отображают его в себя). Сужение морфизмов $(X(m), \chi(m))$ на $(E_{\mathcal{H}}, p, B_{\mathcal{H}})$ обозначим через $(X_{\mathcal{H}}(m), \chi_{\mathcal{H}}(m))$.

Итак, $B_{\mathcal{H}}$ — полное метрическое пространство, а семейство морфизмов $(X_{\mathcal{H}}(m), \chi_{\mathcal{H}}(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ векторного расслоения $(E_{\mathcal{H}}, p, B_{\mathcal{H}})$ наследует все свойства, проверенные нами для построенного в § 1 настоящей статьи семейства морфизмов $(X(m), \chi(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ векторного расслоения (E, p, B).

Установив это, мы доказали для построенного семейства морфизмов $(X_{\mathcal{H}}(m), \chi_{\mathcal{H}}(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ векторного расслоения $(E_{\mathcal{H}}, p, B_{\mathcal{H}})$ леммы 1—5 и теоремы 1—3 статьи [1] (т. е. надо в этих леммах и теоремах поставить у каждой из букв E, B, X, χ индекс $\mathcal{H}$, тогда они и превратятся в утверждения о построенном здесь семействе).

Мы, впрочем, приведем в конце статьи в явном виде формулировки теорем 1—3 статьи [1] для семейства

$$(X_{\mathcal{H}}(m), \chi_{\mathcal{H}}(m)) : (E_{\mathcal{H}}, p, B_{\mathcal{H}}) \to (E_{\mathcal{H}}, p, B_{\mathcal{H}})$$

$(m \in \mathbf{N})$ в интересном частном случае $V^n = \mathbf{R}^n$; сделаем это, не пользуясь языком векторных расслоений и дифференцируемых многообразий, притом так, чтобы эти формулировки можно было понять, не обращаясь к [1, 2] ив предшествующий этим формулировкам текст настоящей статьи.

З а м е ч а н и е (на наш взгляд, довольно существенное для нашего изложения). Конструкции § 2 годятся для произвольного замкнутого подпространства пространства S, а не только для S_0 и $S_{\mathcal{H}}$ например, они годятся для подпространства, состоящего из одной произвольно выбранной точки пространства S; теоремы статьи [1], примененные к этой ситуации, доставляют нам некоторую информацию о поведении показателей Ляпунова систем уравнений в вариациях фиксированной автономной системы как функций начального значения решения, вдоль которого берется система уравнений в вариациях.

§ 3. НЕАВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть V^n — дифференцируемое многообразие, такое же, как в п. 1, § 1. Пусть для каждого $x \in V^n$ задано некоторое метрическое пространство S_x, на котором задана некоторая динамическая система g_x^t ($t \in \mathbf{R}$) (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$ на S_x) и фиксирована (отмечена) некоторая точка $q_x \in S_x$.

Рассмотрим непрерывно зависящее от $t \in \mathbf{R}$ дифференцируемое (класса C^1) векторное поле $F(t)$ на V^n (его значение в точке $x \in V^n$ будем далее обозначать через $F(t, x)$. Потребуем, чтобы для каждого векторного поля H (класса C^1) на V^n ковариантная производная $\nabla_H \cdot F(t)$ (ее значение в точке $x \in V^n$ будем обозначать через $(\nabla_H \cdot F(t))(x)$) зависела от $(t, x) \in \mathbf{R} \times V^n$ непрерывно (т. е. чтобы отображение $\mathbf{R} \times V^n \to TV^n$, сопоставляющее точку (t, x) с точкой $(\nabla_H \cdot F(t))(x)$, было непрерывным). Потребуем далее, чтобы

$$\sup_{\substack{x \in V^n \\ t \in \mathbf{R}}} \| \nabla F(t, x) \| < +\infty$$

(выражение $\| \nabla F(t, x) \|$ при всяком фиксированном $t \in \mathbf{N}$ надо понимать так же, как в п. 3, § 1; может быть, более последовательным в отношении обозначений было бы писать $\nabla F(t)(x)$ вместо $\nabla F(t, x)$).

При каждом $x \in V^n$ рассмотрим:

а) пространство Σ_x всех непрерывных отображений

$$\psi(\cdot) : \mathbf{R} \to TV_x^n;$$

расстояние между двумя такими отображениями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ определим формулой

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \min \left[| \psi_1(t) - \psi_2(t) |, \ \frac{1}{|t|} \right],$$

это — полное метрическое пространство, его топология — компактно-открытая топология (см. [8], с. 533—535);

б) динамическую систему T_x^t на этом пространстве, определяемую формулой

$$(T_x^t \psi)(\tau) \underset{\text{def}}{=} \psi(t + \tau)$$

при всяких t, $\tau \in \mathbf{R}$ (см. [8], с. 534—535; мы называем эту динамическую систему динамической системой сдвигов).

Наложим теперь еще одно требование на рассматриваемое нами векторное поле $F(t)$ (зависящее от $t \in \mathbf{R}$) (или, лучше сказать, требование на характер его зависимости от $t \in \mathbf{R}$), а именно потребуем, чтобы при всяком $x \in V^n$ существовало непрерывное отображение $\sigma_x : S_x \to \Sigma_x$, обладающее следующими свойствами: а) $\sigma_x q_x = F(\cdot, x)$; б) при всяких $x \in V^n$, $t \in \mathbf{R}$ диаграмма

$$
\begin{array}{ccc}
S_x & \xrightarrow{g_x^t} & S_x \\
\downarrow \sigma_x & & \downarrow \sigma_x \\
\Sigma_x & \xrightarrow[T_x^t]{} & \Sigma_x
\end{array}
$$

коммутативна.

Множество всех $F(t)$, удовлетворяющих всем указанным требованиям, наделим структурой метрического пространства, зафиксировав произвольную точку $x \in V^n$ и задав расстояние формулой

$$
d\,(F_1(t),\ F_2(t)) \underset{\text{def}}{=} \sup_{t\in\mathbf{R}} |\,F_1(t,\ x_0) - F_2(t,\ x_0)\,| +
$$
$$
+ \sup_{\substack{x\in V^n\\ t\in\mathbf{R}}} \|\,\nabla F_1(t,\ x) - \nabla F_2(t,\ x)\,\|.
$$

Это метрическое пространство обозначим через $S_{g_x^t}$; оно полно (проверка этого утверждения содержит один момент, на первый взгляд могущий показаться нестандартным, связанный с существованием непрерывных отображений σ_x со свойствами а), б), но в действительности здесь никакой трудности нет (может быть, впрочем, полезно указать, что здесь можно воспользоваться тем, что равномерная топология мажорирует компактно-открытую)).

Проведем теперь построения п. 7, § 1, заменив в них S на $S_{g_x^t}$; затем проведем построения п. 8, § 1 со следующими изменениями:

1) S всюду заменим на $S_{g_x^t}$; $F \in S$ всюду заменим на $F(t) \in S_{g_x^t}$;

2) отображение f^t определим формулой

$$
f^t \underset{\text{def}}{=} f(t,\ 0),
$$

где $f(\theta,\ \tau)$ — оператор Коши дифференциального уравнения $\dot{x} = F(t,\ x)$ (напомним, что оператор Коши $f(\theta,\ \tau)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = F(t,\ x)$ определяется как отображение, сопоставляющее значение всякого решения $x\,(t)$ уравнения $\dot{x} = F(t,\ x)$ при $t = \tau$ со значением того же решения при $t = \theta$; таким образом, определяем здесь отображение f^t так, что в случае, когда $F(t)$ фактически не зависит от t, получается то же определение, что в п. 8, § 1; разница состоит главным образом в том, что теперь семейство отображений $\{f^t\}_{t\in\mathbf{R}}$ уже не образует динамическую систему (действие группы $\mathbf{R}$);

3) морфизм (df^t, f^t) и теперь имеет обратный, но им служит уже не (точнее, вообще говоря, не) (df^{-t}, f^{-t}), а $(df(0,\ t), f(0,\ t))$; соответственно этому морфизм, обратный морфизму $(X(m),\ \chi\,(m))$, существует теперь, но выражается несколько иной формулой, а именно:

$$
(X^{-1}(m),\ \chi^{-1}\,(m)) = (1_{S_{g_x^t}} \times df(0,\ t),\ 1_{S_{g_x^t}} \times f(0,\ t)).
$$

Проведя с указанными изменениями построения пп. 7, 8, § 1, получаем возможность применить результаты статьи [1] и в этой ситуации.

Напомним читателю, что только что рассмотренная конструкция охватывает, например, следующие классы неавтономных систем: дифференциальные уравнения с периодически зависящим от t векторным полем F (с фиксированным периодом T) (в только что изложенной конструкции этому соответствует случай $S_x = T^1$ (окружность), g_x^t — поворот окружности на угол $2\pi t \cdot T^{-1}$; в этом случае S_x и g_x^t, как видим, от x не зависят); сюда же относятся системы $\dot{x} = F(t,\ x)$, у которых функция $F(t,\ x)$ периодическая по t с периодом $T(x)$ (непрерывная функция $T(x)$ фиксирована), в этом случае можно снова брать $S_x = T^1$ (окружность), но g_x^t — поворот на угол $2\pi t\,[T(x)]^{-1}$ уже будет зависеть от x. Сюда же относятся и системы $\dot{x} = F(t,\, x)$ с квазипериодической по t правой частью $F(t,\, x)$ (и, опять-таки, модуль частот может зависеть или не зависеть от x (в изложенной в этом параграфе конструкции такому классу систем соответствует $S_x = T^k$ (k-мерный тор) и g_x^t — обмотка тора T^k)); сюда же относятся и системы $\dot{x} = F(t,\, x)$ с почти периодической по t правой частью $F(t,\, x)$ (причем и здесь модуль частот может как не зависеть от x, так и зависеть от x заранее предписанным образом; место S_x в этом случае займет боровский компакт T^{R}, а g_x^t — его обмотка).

З а м е ч а н и е 1. Конструкция § 1 может рассматриваться как частный случай конструкции § 3 (а именно, если в § 3 положить, что каждое из пространств S_x состоит из одной точки q_x (причем нет смысла считать эти пространства различными, так что $S_x = S_{x_0}$ и $q_x = q_{x_0}$ при всяком $x \in V^n$; динамическая система g_x^t в этом случае, конечно, определяется однозначно: $g_x^t\ q_x = q_x$ при всяких $x \in V^n$, $t \in \mathbf{R}$)).

З а м е ч а н и е 2. Подобно тому, как в § 2 мы рассмотрели подпространство пространства S, определенного в § 1, и здесь мы можем рассмотреть аналогичные подпространства (неавтономных систем с нулевой дивергенцией и неавтономных гамильтоновых систем).

З а м е ч а н и е 3. При неудачном выборе динамических систем g_x^t пространство $S_{g_x^t}$ может оказаться и пустым.

§ 4. СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Изложенные в § 1—3 конструкции имеют дискретно-временные аналоги (правда, в § 1—3 мы тоже с некоторого момента изложения переходили к рассмотрению дискретного времени, но исходными объектами там были векторные поля, индуцировавшие в § 1—2 (где векторные поля не зависели от времени) гладкие динамические системы с непрерывным временем (т. е. гладкие действия группы $\mathbf{R}$), а в § 3, где векторные поля зависели от времени, — неавтономные системы с непрерывным временем).

В этом параграфе исходными объектами для построений служат диффеоморфизмы, индуцирующие динамические системы с дискретным временем (т. е. гладкие действия группы $\mathbf{Z}$) (это — дискретно-временные аналоги ситуаций, рассмотренных в § 1—2), а также счетные семейства диффеоморфизмов (это — дискретно-временные аналоги ситуаций, рассмотренных в § 3). Подобно тому, как в § 1—3 мы накладывали на векторные поля сильное ограничение типа неравенства (3), мы и здесь накладываем некое подобие этого ограничения на рассматриваемые диффеоморфизмы и счетные семейства диффеоморфизмов. После, этих вводных замечаний переходим к точным формулировкам.

1. Пусть V^n — дифференцируемое многообразие, относительно которого выполнены все требования, содержащиеся в п. 1, § 1.

Пусть $f: V^n \to V^n$ — диффеоморфизм (класса C^1). Потребуем, чтобы диффеоморфизм f удовлетворял следующему условию

$$\max\,(|||\,df\,|||,\ \ |||\,df^{-1}\,|||) < +\infty, \tag{10}$$

где

$$|||\,df\,||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \|\,df_x\,\|$$

(диффеоморфизм класса C^1 — непрерывно дифференцируемое отображение на, имеющее обратное отображение, которое тоже непрерывно дифференцируемо); через df_x обозначается производная отображения f в точке $x \in V^n$ (см. [6], гл. I, § 1, где, правда, производная названа дифференциалом); для всякого дифференцируемого отображения f его производная df_x есть линейное отображение касательного пространства $\pi^{-1}(x)$ в точке x в касательное пространство $\pi^{-1}(fx)$ в точке fx; для диффеоморфизма f это линейное отображение есть невырожденное отображение на; зафиксированная у нас с самого начала риманова метрика на V^n задает на касательных пространствах многообразия V^n структуры евклидовых пространств, что позволяет определить норму производной в точке как норму линейного оператора); теперь условие на f полностью разъяснено: напомним дополнительно, что $df_{fx}^{-1} \circ df_x = 1_{\pi^{-1}(x)}$, откуда

$$\| df_x \| \cdot \| df_{fx}^{-1} \| \geqslant 1. \tag{11}$$

Множество всех таких диффеоморфизмов наделим структурой метрического пространства, зафиксировав некоторую точку $x_0 \in V^n$ и задав расстояние формулой:

$$\begin{aligned} d(f_1, f_2) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x_0 \in V^n} \min \{ \max [\rho(f_1 x, f_2 x),\ \rho(f_1^{-1} x, f_2^{-1} x)],\ [\rho(x, x_0)]^{-1} \} + \\ + \sup_{x_0 \in V^n} \sup_{\substack{\xi \in \pi^{-1}(x) \\ |df_{1x}\xi| = 1}} \overline{\lim_{s(u_t) \to \rho(f_1 x, f_2 x)}} | \varphi_{u_t} df_{2x} \xi - df_{1x} \xi | + \\ + \sup_{x_0 \in V^n} \sup_{\substack{\xi \in \pi^{-1}(x) \\ |df_{1x}^{-1}\xi| = 1}} \overline{\lim_{s(v_t) \to \rho(f_1^{-1} x, f_2^{-1} x)}} | \varphi_{v_t} df_{2x}^{-1} \xi - df_{1x}^{-1} \xi |, \end{aligned} \tag{12}$$

где ρ — расстояние между точками многообразия V^n (напомним, что в п. 1, § 1 мы фиксировали структуру метрического пространства на V^n), $u_t(v_t)$ — кусочно-гладкая кривая в V^n, соединяющая точки $f_2 x$ и $f_1 x$ ($f_2^{-1} x$ и $f_1^{-1} x$), $\varphi_{u_t} \eta$ — результат параллельного перенесения вектора $\eta \in \pi^{-1}(f_2 x)$ вдоль кривой u_t, а $\overline{\lim}_{s(u_t) \to \rho(f_1 x, f_2 x)}$ означает верхний предел при стремлении длины кривой u_t к $\rho(f_1 x, f_2 x)$ (точнее говоря, диффеоморфизмы f_1 и f_2 и точка x фиксированы; рассматриваем множество всех кусочно-гладких кривых u_t в V^n, соединяющих точку $f_2 x$ с точкой $f_1 x$; длину кривой u_t обозначим $s(u_t)$; под $\overline{\lim}_{s(u_t) \to \rho(f_1 x, f_2 x)}$ мы понимаем $\overline{\lim}$ при $s(u_t) \to \rho(f_1 x, f_2 x)$).

Смысл этих громоздких формул достаточно прост: $d(f_n, f) \to 0$ означает, что f_n сходится к f (и f_n^{-1} сходится к f^{-1}) равномерно на каждом ограниченном множестве (за это ответственно первое слагаемое в правой части формулы (12) (см. [8], с. 533—534)) и если, кроме того, совершить параллельный перенос вектора $df_{1x}\xi$ (где ξ — произвольный вектор $\in \pi^{-1}(x)$ такой, что $|df_{1x}\xi| = 1$) вдоль произвольной достаточно короткой кривой (достаточно короткой в смысле: ее длина достаточно близка к расстоянию между соединяемыми ею точками) u_t, соединяющей точку $f_1 x$ с точкой $f_2 x$, то получившийся вектор ξ_n стремится к $df_{2x}\xi$, (и это — равномерно по всем $x_0 \in V^n$, хотя требуемая близость длины кривой к ее $\inf$ a priori имеет право зависеть от x); и аналогично — для f_i^{-1} вместо f_i ($i \in \{1, 2\}$). Подчеркнем, что параллельный перенос осуществляется в силу римановой связности, индуцированной зафиксированной в самом начале римановой метрикой на V^n.

Заметим также, что формулу (12) можно существенно упростить (заменив определяемую ею метрику на другую, эквивалентную этой); наш выбор объясняется предпочтением (в данной ситуации) проигрыша в простоте определения по сравнению с проигрышем в простоте обоснования.

Определенное таким образом метрическое пространство диффеоморфизмов (обозначим его S^*), как легко проверить, полно.

Проведем теперь построения п. 7, § 1, заменив в них S на S^*, а затем построения п. 8, § 1, заменив в них: S на S^*, $F \in S$ на $f \in S^*$, f^t $(t \in \mathbf{R})$ на f^t $(t \in \mathbf{Z})$, где f^t теперь по определению есть t-*я* степень диффеоморфизма f ($f^0 \underset{\text{def}}{=} 1_{V^n}$, $f^t \underset{\text{def}}{=} f$, f^{-t} — обратный f диффеоморфизм $f^m \underset{\text{def}}{=} \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{m \text{ сомножителей}}$ при $m \in \mathbf{N}$, $f^{-m} \underset{\text{def}}{=} \underbrace{f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}}_{m \text{ сомножителей}}$ при $m \in \mathbf{N}$).

Еще одно изменение требуется только в самом конце. Доказательство существования функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ такой, что для всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ выполняется неравенство (1), проводится теперь следующим образом (достаточно одного указания, что существование такой функции $a(\cdot)$ следует из условия (10), которому удовлетворяют диффеоморфизмы $f \in S^*$). Функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ определяется теперь так: всякое $b \in B$ есть (f, x), где $f \in S^*$, $x \in V^n$; положим

$$a(b) = a(f, x) \underset{\text{def}}{=} \ln \max (|||df|||, \ |||df^{-1}|||).$$

Так как в силу (10), (11)

$$+\infty > \max (|||df|||, \ |||df^{-1}|||) \geqslant \frac{1}{2}(|||df||| + |||df^{-1}|||) \geqslant$$

$$\geqslant (|||df||| \cdot |||df^{-1}|||)^{\frac{1}{2}} \geqslant 1,$$

то так определенная функция $a(\cdot)$ принимает только числовые неотрицательные значения. Неравенство (1) для построенных в этом пункте семейства морфизмов $(X(m), \chi(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ и функции $a(\cdot)$ вытекает непосредственно из определений. Отметим, хотя это и не будет дальше использовано, что определенная здесь функция $a(\cdot)$ непрерывна на $B = S^* \times V^n$.

2. Риманова метрика индуцирует на V^n меру Лебега. Пусть $f \in S^*$. Потребуем, чтобы диффеоморфизм f сохранял эту меру. Множество S_0^* всех таких диффеоморфизмов, очевидно, замкнуто в S^*, а так как S^* — полное метрическое пространство, то и S_0^* поэтому наделено структурой полного метрического пространства.

Заменив в построениях п. 3, § 2 S_0 на S_0^* (ссылки на пп. 7 и 8, § 1 надо теперь понимать с теми изменениями в построениях этих пунктов, которые изложены выше в п. 1, § 4), получим возможность применить к рассматриваемой здесь ситуации (для диффеоморфизмов, сохраняющих объем) результаты статьи [1].

3. Если V^n — гамильтоново (симплектическое) многообразие, удовлетворяющее всем требованиям п. 1, § 1, то можем рассмотреть подпространство $S_{\mathcal{H}}^*$ пространства S^*, образованное диффеоморфизмами, сохраниющими его симплектическую форму Ω. Так как $S_{\mathcal{H}}^*$ очевидно, замкнуто в S^*, то, заменив в построениях п. 4, § 2 $S_{\mathcal{H}}$ на $S_{\mathcal{H}}^*$ (ссылки на пп. 7 и 8, § 1 понимаем теперь с теми изменениями в построениях этих пунктов, которые изложены выше в п. 1, § 4), получаем возможность применить к симплектическим диффеоморфизмам результаты статьи [1].

4. Конструкции § 3 имеют тоже дискретно-временные аналоги (вместо векторных полей, зависящих от $t \in \mathbf{R}$, рассматриваются диффеоморфизмы, зависящие от $t \in \mathbf{Z}$), остальные детали не будем излагать здесь, чтобы не перегружать изложение еще одной вариацией наших конструкций. Само собой разумеется, что и здесь можно аналогично рассмотреть подпространство, состоящее из счетных семейств диффеоморфизмов, а)

сохраняющих меру; б) сохраняющих симплектическую форму Ω (на гамильтоновых (т. е. симплектических) многообразиях).

5. Отметим, наконец, что дифференциальные уравнения произвольного порядка, разрешенные относительно старшей производной, преобразуются с помощью стандартной конструкции в системы первого порядка, благодаря чему при определенных ограничениях их можно рассматривать как точки замкнутого подпространства пространства S (§ 1) или пространства $S_{g_x^t}$ (§ 3), и поэтому результаты [1] могут быть применены и к пространству уравнений произвольного фиксированного порядка.

§ 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

В предыдущих параграфах мы построили серию семейств морфизмов $(X(m), \chi(m))$ ($m \in \mathbf{N}$) векторных расслоений (E, p, B). Для каждого из семейств этой серии мы подробно (кроме пп. 4 и 5, § 4, где детали не были изложены, однако, как мы надеемся, эти детали там легко могут быть восстановлены читателем по аналогии с другими разделами, где изложение проведено подробно) изложили проверку условий, сформулированных в начале статьи [1] и воспроизведенных в начале настоящей статьи. Тем самым мы доказали для каждого из семейств морфизмов этой серии леммы 1—5 и теоремы 1—3 в [1].

В заключение приведем формулировки теорем 1—3 [1]: применительно к двум ситуациям: 1) к ситуации, разобранной в § 1; 2) к ситуации, разобранной в пп. 2 и 4, § 2; при этом мы сознательно приведем сейчас формулировки для частного случая $V^n = \mathbf{R}^n$. Во-первых, это хотя и частный случай, но один из наиболее заслуживающих (или, лучше сказать, заслуживших) внимание частных случаев, а во-вторых, в этом случае мы в состоянии привести формулировки, совсем не пользуясь языком векторных расслоений и дифференцируемых многообразий.

Следующие далее формулировки рассчитаны на то, чтобы их можно было понять, не заглядывая в предыдущий текст и в статьи [1, 2].

1. Фиксируем в $\mathbf{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру и фиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение $F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющее условию $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^n} \left\| \frac{d}{dx} F(x) \right\| < +\infty$. Множество всех таких отображений наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой*

$$d\,(F_1,\ F_2) \underset{\text{def}}{=} |\, F_1(x_0) - F_2(x_0)\,| + \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left\| \frac{d}{dx} F_1(x) - \frac{d}{dx} F_2(x) \right\|.$$

Так определенное метрическое пространство обозначим через S. Как известно, S полно. Положим $B = S \times \mathbf{R}^n$. При всяких $F \in S$, $x \in \mathbf{R}^n$ рассмотрим систему уравнений в вариациях системы $\dot{x} = F(x)$, взятую вдоль того решения $\hat{x}(t)$ системы $\dot{x} = F(x)$, которое начинается в точке $\hat{x}$ (т. е. удовлетворяет начальному условию $x(0) = \hat{x}$). Напомним, что эта система уравнений в вариациях записывается в виде

$$\dot{\xi} = A_{F,\, \hat{x}}\,(t)\,\xi,$$

---

* Через $F(x)$ обозначаем значение отображения F в точке $x \in \mathbf{R}^n$, через $\frac{d}{dx} F(x)$ производную (по терминологии книги [6], гл. I, § 1 — дифференциал) отображения F в точке x; иногда производную в точке x_1 отображения F обозначаем также $\left.\frac{d}{dx} F(x)\right|_{x = x_1}$.

где

$$A_{F,\,\hat{x}}(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}F(x)\bigg|_{x=\hat{x}(t)};$$

обозначим через

$$\lambda_1(F,\ \hat{x}) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(F,\ \hat{x})$$

показатели Ляпунова этой системы уравнений в вариациях.

Теоремы 1 — 3 статьи [1] применительно к данной ситуации состоят в следующем.

При всяком $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_k(F,\ \hat{x}): B \to \mathbf{R}$ есть бэровская функция второго класса (следовательно, в силу теоремы Бэра ее сужение на некоторое всюду плотное G_δ непрерывно); множество точек полунепрерывности сверху всех функций $\lambda_k(F,\ \hat{x}): B \to \mathbf{R}$ ($k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$) типично в B (т. е. является всюду плотным множеством типа G_δ).

2. Обозначим через R^{2n} пространство строк $x = (q^1,\ \ldots,\ q^n,\ p^1,\ \ldots,\ p^n)$ из $2n$ вещественных чисел; зададим в нем норму

$$|\,x\,| = \left(\sum_{i=1}^{n}[(q^i)^2 + (p^i)^2]\right)^{\frac{1}{2}};$$

зафиксируем (отметим) произвольную точку

$$x_0 = (q_0^1,\ \ldots,\ q_0^n,\ p_0^1,\ \ldots,\ p_0^n) \in R^{2n}.$$

Рассмотрим функцию $H(\cdot): R^{2n} \to \mathbf{R}$ класса C^2, у которой все частные производные второго порядка ограничены на R^{2n}.

В множество всех таких функций (вместо $H(\cdot)$ пишем также H) введем отношение эквивалентности

$$H_1 \sim H_2,\ \text{если}\ H_1 = H_2 + \text{const}.$$

Рассмотрим фактор-множество по этому отношению эквивалентности (т. е. рассмотрим множество, точками которого являются классы функций, различающихся постоянным слагаемым). Это фактор-множество наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой.

$$d\,(\{H_1\},\ \{H_2\}) \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}\left\{\left|\frac{\partial\,(H_1 - H_2)}{\partial q^i}\bigg|_{x=x_0}\right| + \left|\frac{\partial\,(H_1 - H_2)}{\partial p^i}\bigg|_{x=x_0}\right|\right\} +$$

$$+ \sup_{\substack{x \in R^{2n} \\ i,\,j \in \{1,\ \ldots,\ n\}}} \left\{\left|\frac{\partial^2(H_1 - H_2)}{\partial q^i \partial q^j}\right| + \left|\frac{\partial^2(H_1 - H_2)}{\partial q^i \partial p^j}\right| + \left|\frac{\partial^2(H_1 - H_2)}{\partial p^i \partial p^j}\right|\right\}.$$

Определенное таким образом метрическое пространство обозначим через $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. Хорошо известно, что $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ полно. Каждой точке этого пространства ставится в соответствие гамильтонова система следующим образом. По определению, точка пространства $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ — это класс $\{H\}$ различающихся одна от другой; постоянным слагаемым функций H; взяв в качестве функции H произвольный представитель этого класса, пишем гамильтонову систему

$$\begin{aligned} q^i &= \frac{\partial H}{\partial p^i}, \\ p^i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i},\ i \in \{1,\ \ldots,\ n\} \end{aligned} \tag{*}$$

(функция H называется функцией Гамильтона этой системы; эта функция восстанавливается по заданной гамильтоновой системе не однозначно, а, как говорят, «с точностью до произвольного постоянного слагаемого», с этим и связана произведенная выше факторизация).

Положим $B = \mathcal{S}_{\mathcal{H}} \times R^{2n}$; при всяких $\{H\} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, $x \in R^{2n}$ обозначим через

$$\lambda_1(\{H\},\ \hat{x}) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(\{H\},\ \hat{x})$$

показатели Ляпунова системы уравнений в вариациях системы (*) вдоль решения системы (*), начинающегося (при $t = 0$, а впрочем, неважно, при каком значении t) в точке x.

Теоремы 1 — 3 статьи [1] применительно к данной ситуации состоят в следующем.

При всяком $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_k(\{H\},\ \hat{x}) : B \to \mathbf{R}$ есть бэровская функция второго класса (следовательно, в силу теоремы Бэра ее сужение на некоторое всюду плотное множество типа G_δ непрерывно); множество точек полунепрерывности сверху всех функций $\lambda_k(\{H\},\ \hat{x}) : B \to \mathbf{R}$ ($k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$) типично в B (т. е. является всюду плотным множеством типа G_δ).

Литература

1. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408—1416.
2. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. П. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1587—1598.
3. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970.
4. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.
5. Стинрод Н. Топология косых произведений. — М.: ИЛ, 1953.
6. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. — М.: ИЛ, 1960.
7. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.
8. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М. — Л.: ГТТИ, 1949.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 31 марта 1980 г.