УДК 517.926.4

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. II

Как и в предыдущей статье [**1**], мы рассматриваем семейство морфизмов (в категории векторных расслоений)

$$(X(m),\ \chi(m)) : (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$$

($m \in \mathbf{N}$) некоторого векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ со слоем $\mathbf{R}^n$, база которого B — полное метрическое пространство. Мы предполагаем, что отображения $X(m)$ не вырождены на слоях, т. е. что при всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ линейное отображение

$$X(m,\ b) : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi(m)\,b),$$

определяемое как сужение (ограничение) на слой $p^{-1}(b)$ отображения $X(m)$, имеет обратное $[X(m,\ b)]^{-1} : p^{-1}(\chi(m)\,b) \to p^{-1}(b)$.

Зафиксировав некоторую риманову метрику на векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ [2, с. 58—59], потребуем также, чтобы существовала функция $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$ такая, чтобы для всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ было выполнено неравенство*

$$\max\left(\| X(m,\ b) \|,\ \| [X(m,\ b)]^{-1} \|\right) \leqslant \exp\left(m a(b)\right). \tag{1}$$

В предыдущей статье [1] мы доказали некоторые формулы для показателей Ляпунова

$$\lambda_k(b) \underset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\mathbf{R}^n)} \ \max_{\substack{\xi \in \mathbf{R}^{n-k+1} \\ \xi \neq 0}} \ \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{m} \ln | X(m,\ b)\,\xi | \tag{2}$$

и с помощью этих формул** вывели из теорем Бэра некоторые свойства функций $\lambda_k(b)$. В более полном объеме содержание доказанных в [1] теорем выявляется в настоящей статье. Здесь мы рассматриваем несколько классов семейств морфизмов $(X(m),\ \chi(m))$, удовлетворяющих условию (1), и применяем к ним теоремы 1—3 статьи [1]. В §§ 1—4 мы имеем в виду не сообщить что-то новое, а подготовить почву для применения теорем 1—3 статьи [1] к хорошо известным объектам. Формулировки результатов содержатся в § 5.

§ 1. Пусть $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ — векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$, причем база $\mathfrak{B}$ — полное метрическое пространство. Пусть на $\mathfrak{B}$ задана динамическая система f^t (в смысле Маркова; см. [3], гл. V, § 1; в гл. V книги [3] $f(t,\ x)$ обозначает то же, что у нас $f^t x$), т. е. задано непрерывное действие f^t группы $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{B}$. Зафиксируем некоторую риманову метрику векторного расслоения $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ (см. [2], с. 58—59).

Пусть F^t — динамическая система (непрерывное действие группы $\mathbf{R}$) на $\mathcal{E}$ такая, что

а) (F^t, f^t) при всяком $t \in \mathbf{R}$ есть морфизм в категории векторных расслоений $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B}) \to (\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$;

---

* Норма линейного отображения слоя на слой определяется как норма оператора (слои наделены структурами нормированных пространств заданием в них евклидовых структур, индуцированных фиксированной выше римановой метрикой).

** В формуле (2): $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$, $G_k(\mathbf{R}^n)$ — грассманово многообразие k- мерных линейных подпространств пространства $\mathbf{R}^n = p^{-1}(b)$.

б)* $$\sup_{t\in[-1,\,1]} |||\,F^t\,||| < +\infty.$$
(Условие б) автоматически выполняется, если $\mathfrak{B}$ — компакт).

Рассмотрим множество всех динамических систем F^t, удовлетворяющих только что сформулированным условиям а) и б) (подчеркнем, что динамическая система f^t в базе $\mathfrak{B}$ и риманова метрика векторного расслоения $(\mathcal{E},\,\pi,\,\mathfrak{B})$ заранее фиксированы — одни и те же для всех динамических систем F^t). Это множество динамических систем F^t наделяем структурой метрического пространства, определив расстояние формулой**
$$d\,(F_1^t,\,F_2^t) \underset{\text{def}}{=} \sup_{t\in[-1,\,1]}\ \sup_{x\in\mathfrak{B}} \|\,F_1^t(x) - F_2^t(x)\,\|,$$
$d\,(F_1^t,\,F_2^t)$ — число для всяких F_1^t и F_2^t из рассматриваемого множества; это вытекает из условия б). Так определенное метрическое пространство обозначим буквой S_1. Легко проверяется, что пространство S_1 полно. Положим теперь $B \underset{\text{def}}{=} S_1\times\mathfrak{B}$. Так как S_1 и $\mathfrak{B}$ — полные метрические пространства, то B — полное метрическое пространство.

Положим
$$E \underset{\text{def}}{=} S_1\times\mathcal{E},\ p = 1_{S_1}\times\pi.$$
Так определенное расслоение $(E,\,p,\,B)$ наделяется структурой векторного расслоения (со слоем $\mathbf{R}^n$) заданием атласа (см. [2], гл. 3, раздел 1; гл. 5, раздел 2)
$$\{g_i : (S_1\times U_i)\times\mathbf{R}^n \to p^{-1}(S_1\times U_i)\}_{i\in I},$$
определенного по атласу
$$\{h_i : U_i\times\mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$$
(где I — некоторое множество) векторного расслоения $(\mathcal{E},\,\pi,\,\mathfrak{B})$ формулой $g_i \underset{\text{def}}{=} 1_{S_1}\times h_i$ (чтоб придать смысл этой формуле, надо рассмотреть $(S_1\times U_i)\times\mathbf{R}^n$ как $S_1\times(U_i\times\mathbf{R}^n)$).

Так определенное векторное расслоение $(E,\,p,\,B)$ можно эквивалентным образом определить как векторное расслоение, индуцированное отображением $pr_2 : S_1\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и векторным расслоением $(\mathcal{E},\,\pi,\,\mathfrak{B})$ (см. [2], гл. 2, п. 5.3 и гл. 3, п. 3.1).

Положим при всяком $m\in\mathbf{N}$
$$X(m) \underset{\text{def}}{=} 1_{S_1}\times F^m : E\to E$$
(иными словами: всякое $e\in E$ есть пара $(F^t,\,\varepsilon)$, где $F^t\in S_1$, $\varepsilon\in\mathcal{E}$; полагаем $X(m)\,e \underset{\text{def}}{=} (F^t,\ F^m\varepsilon)\in E)$.

Положим при всяком $m\in\mathbf{N}$
$$\chi\,(m) \underset{\text{def}}{=} 1_{S_1}\times f^m : B\to B.$$

Поскольку отображение $X(m): E\to E$ непрерывно при всяком $m\in\mathbf{N}$, то из того, что $(F^m,\,f^m)$ при всяком $m\in\mathbf{N}$ есть морфизм (в категории векторных расслоений)

---

* Если $(Y,\,\psi)$ — морфизм $(\mathcal{E},\,\pi,\,\mathfrak{B})\to(\mathcal{E},\,\pi,\,\mathfrak{B})$, то $|||\,Y\,|||$ по определению есть $\sup_{x\in\mathfrak{B}}\|\,Y(x)\,\|$, где $Y(x):\pi^{-1}(x)\to\pi^{-1}(\psi x)$ — сужение на слой $\pi^{-1}(x)$ отображения Y, а $\|\,Y(x)\,\|$ — норма линейного оператора $Y(x)$, индуцированная евклидовыми структурами в слоях $\pi^{-1}(x)$ и $\pi^{-1}(\psi x)$, порожденными фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения $(\mathcal{E},\,\pi,\,\mathfrak{B})$.

** Отметим, что $F^t(x)$ и $F^t\varepsilon$ обозначают у нас совсем разные понятия: $F^t(x)$ есть сужение на слой $\pi^{-1}(x)$ отображения F^t, а $F^t\varepsilon$, есть образ точки ε при отображении F^t.

$(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B}) \to (\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$, следует, что $(X(m),\ \chi(m))$ при всяком $m \in \mathbf{N}$ есть морфизм (в категории векторных расслоений) $(E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$. При этом поскольку при всяком $t \in \mathbf{R}$ морфизм (F^t, f^t) имеет обратный (F^{-t}, f^{-t}), то и морфизм $(X(m),\ \chi(m))$ при всяком $m \in \mathbf{N}$ имеет обратный:

$$(X^{-1}(m),\ \chi^{-1}(m)) = (1_{S_1} \times F^{-m},\ 1_{S_1} \times f^{-m}),$$

т. е. является изоморфизмом (в категории векторных расслоений). Поэтому отображение $X(m): E \to E$ не вырождено на слоях и при всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$

$$[X(m,\ b)]^{-1} = X^{-1}(m,\ \chi(m)\, b).$$

В начале параграфа мы зафиксировали на векторном расслоении $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ некоторую риманову метрику, т. е. зафиксировали непрерывное отображение δ подпространства прямого произведения $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ (состоящего из всех тех точек $(\varepsilon,\ \varepsilon')$, для которых $\pi\varepsilon = \pi\varepsilon'$) в $\mathbf{R}$ такое, что для каждого $x \in \mathfrak{B}$ сужение на векторное пространство $\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x)$ отображения δ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(x)$.

Рассмотрим подпространство прямого произведения $E \times E$, состоящее из всех тех точек $(e,\ e')$, для которых $pe = pe'$. Зададим отображение этого подпространства в пространство вещественных чисел $\mathbf{R}$ формулой

$$\Delta(e,\ e') \underset{\text{def}}{=} \delta(ue,\ ue'),$$

где через u обозначаем проекцию произведения $E = S_1 \times \mathcal{E}$ на второй сомножитель. Обозначим через v проекцию произведения $B = S_1 \times \mathfrak{B}$ на второй сомножитель. Обозначим через $u|_{p^{-1}(b)}$ сужение u на слой $p^{-1}(b)$. Так как для всякого $b \in B$ отображение $u|_{p^{-1}(b)}$ есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\pi^{-1}(vb)$, а сужение δ на $\pi^{-1}(vb) \times \pi^{-1}(vb)$ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(vb)$, то для всякого $b \in B$ сужение Δ на $p^{-1}(b) \times p^{-1}(b)$ является скалярным произведением на слое $p^{-1}(b)$. Так как отображения u и δ непрерывны, то отображение Δ непрерывно. Таким образом, Δ — риманова метрика на векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$.

Докажем теперь, что так определенное семейство морфизмов $(X(m),\ \chi(m))$ ($m \in \mathbf{N}$) векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, наделенного так определенной римановой метрикой Δ, удовлетворяет неравенству (1), где $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ — некоторая непрерывная функция. Для всякого $b = (F^t,\ x) \in B$ (где $F^t \in S_1$, $x \in \mathfrak{B}$) положим $a(b) \underset{\text{def}}{=} \ln(\sup\limits_{t \in [-1,\ 1]} |||F^t|||)$. Так как (используем условие б))

$$+\infty > \sup_{t \in [-1,\ 1]} |||F^t||| \geqslant \max(|||F^1|||,\ |||F^{-1}|||) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(|||F^1||| + |||F^{-1}|||) \geqslant (|||F^1||| \cdot |||F^{-1}|||)^{\frac{1}{2}} \geqslant 1,$$

то функция $a(\cdot)$ принимает только числовые неотрицательные значения. Из определения расстояния $d(F_1^t,\ F_2^t)$ непосредственно следует, что так определенная функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ непрерывна.

В силу приведенных выше определений

$$X(m) \underset{\text{def}}{=} 1_{S_1} \times F^m,\ a(b) \underset{\text{def}}{=} \ln(\sup_{t \in [-1,\ 1]} |||F^t|||),$$

$$\Delta(e, e') \underset{\text{def}}{=} \delta(ue, ue')$$

неравенство (1) непосредственно вытекает из очевидных формул

$$|||F^m|||\leqslant|||F^t|||^m,\ \ |||F^{-m}|||\leqslant|||F^{-t}|||^m,$$
справедливых при всяком $m\in\mathbf{N}$.

Заканчивая описание введенного в § 1 класса семейств морфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, подчеркнем, что если векторное расслоение $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$, по которому мы построили векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$, тривиально ($\mathcal{E}=\mathfrak{B}\times\mathbf{R}^n$, $\pi=pr_1$), то и в этом случае изучение свойств показателей Ляпунова такого семейства морфизмов является вполне содержательной задачей. В следующем параграфе рассмотрим модификацию конструкции, приведенной в этом параграфе, причем именно в случае, когда векторное расслоение $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ тривиально.

§ 2. Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$)*. Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру.

Рассмотрим непрерывное отображение $A(\cdot):\mathfrak{B}\to\mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющее условию $\sup\limits_{x\in\mathfrak{B}}\|A(x)\|<+\infty$ (если $\mathfrak{B}$ — компакт, то последнее условие выполняется автоматически). Множество всех таких отображений $A(\cdot)$ наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой
$$d\,(A_1,\ A_2)\underset{\text{def}}{=}\sup_{x\in\mathfrak{B}}\|A_1(x)-A_2(x)\|.$$
Так определенное метрическое пространство обозначим через S_2. Хорошо известно, что это пространство S_2 полно. При всяком $A\in S_2$ и всяком $x\in\mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений $\dot{\xi}=A\,(f^tx)\,\xi$ ($\xi\in\mathbf{R}^n$). Через $\Xi\,(\theta,\ \tau;\ x,\ A)$, обозначим оператор Коши этой системы. В силу теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решений системы от параметра x и от отображения $A\in S_2$ оператор Коши $\Xi\,(\theta,\ \tau;\ x,\ A)$, при всяком $x\in\mathfrak{B}$ и всяких θ, $\tau\in\mathbf{R}$ есть невырожденное линейное отображение $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, непрерывно зависящее от $(\theta,\ \tau;\ x,\ A)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathfrak{B}\times S_2$ и удовлетворяющее неравенству
$$\sup_{x\in\mathfrak{B}}\|\Xi\,(\theta,\ \tau;\ x,\ A)\|\leqslant\exp\,(a\,|\,\theta-\tau\,|),$$
где $a\underset{\text{def}}{=}\sup\limits_{x\in\mathfrak{B}}\|A\,(x)\|$.

Напомним очевидные формулы:
$$\Xi^{-1}\,(t,\ \tau;\ x,\ A)=\Xi\,(\tau,\ t;\ x,\ A),$$
$$\Xi\,(t,\ \tau;\ x,\ A)=\Xi\,(t-\tau,\ 0;\ f^{\tau}x,\ A)$$
(последняя формула — частный случай формулы $\Xi\,(t,\ \tau;\ x,\ A)=\Xi\,(t+\theta,\ \tau+\theta;\ f^{-\theta}x,\ A)$).

Положим: $B\underset{\text{def}}{=}S_2\times\mathfrak{B}$, $E\underset{\text{def}}{=}B\in\mathbf{R}^n$, $p=pr_1$ — проекция произведения $\mathfrak{B}\times\mathbf{R}^n$ на первый сомножитель. Таким образом возникает тривиальное векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$. База B — полное метрическое пространство, так как $B=S_2\times\mathfrak{B}$, а S_2 и $\mathfrak{B}$ — полные метрические пространства. Не зависящая от $b\in B$ евклидова структура слоя $\mathbf{R}^n$ определяет риманову метрику на этом тривиальном векторном расслоении.

При всяком $m\in\mathbf{N}$ зададим отображение $X(m):E\to E$ следующим образом: для всякого $e\in E$ имеем: $e\in(A,\ x,\ \xi)$, где $A\in S_2$, $x\in\mathfrak{B}$, $\xi\in\mathbf{R}^n$: положим
$$X(m)\,e=X(m)\,(A,\ x,\ \xi)\underset{\text{def}}{=}(A,\ f^mx,\ \Xi\,(m,\ 0;\ x,\ A)\,\xi).$$

---

* Отметим частный случай: $\mathfrak{B}=\mathbf{R}$, $f^tx=x+t$. В этом частном случае конструкция § 2 описывает ситуацию, изучавшуюся в теории показателей Ляпунова больше всего.

Для всякого $b \in B$ имеем: $b = (A, x)$, где $A \in S_2$, $x \in \mathfrak{B}$; зададим отображение $\chi(m): B \to B$ формулой

$$\chi(m)\, b = \chi(m)(A, x) \underset{\text{def}}{=} (A, f^m x).$$

Из того, что f^t — непрерывное действие группы $\mathbf{R}$ на пространстве $\mathfrak{B}$, и из известных свойств оператора Коши $\Xi(\theta, \tau; x, A)$, воспроизведенных выше, непосредственно следует, что при каждом $m \in \mathbf{N}$

1) пара отображений $(X(m), \chi(m))$ есть морфизм $(E, p, B) \to (E, p, B)$ в категории векторных расслоений;

2) $X^{-1}(m)$, $\chi^{-1}(m)$ существуют, т. е. $(X(m), \chi(m))$ — изоморфизм;

3) при всяком $b \in B$ выполнено неравенство (1), где $a(b)$ определяется следующим образом: всякое $b \in B$ есть (A, x), где $A \in S_2$, $x \in \mathfrak{B}$; полагаем $a(b) = a(A, x) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathfrak{B}} \| A(x) \|$ (таким образом, $a(b) = a(A, x)$ зависит только от A, но не зависит от x). Функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, очевидно, непрерывна.

§ 3. Пусть $\mathfrak{B}$ — связное дифференцируемое* многообразие со счетной базой. Фиксируем на нем риманову метрику и предполагаем, что структура метрического пространства на $\mathfrak{B}$, индуцированная этой римановой метрикой, такова, что это метрическое пространство полно. Пусть на $\mathfrak{B}$ задана гладкая динамическая система или, что то же, дифференцируемое действие f^t группы $\mathbf{R}$ (то же, что в книге [4] на с. 16 названо однопараметрической группой дифференцируемых преобразований; у нас через f^t обозначается то же, что в книге [4] на с. 16 обозначается через φ_t). Обозначим через F векторное поле на $\mathfrak{B}$, индуцированное гладкой динамической системой f^t (см. [4], с. 16—17, где через X обозначено то же, что у нас через F).

Пусть $(\mathcal{E}, \pi, \mathfrak{B})$ — некоторое гладкое -векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой $\mathfrak{B}$, т. е. (в терминологии книги [4], гл. I, §§ 7, 9) расслоенное многообразие над базой $\mathfrak{B}$ со стандартным слоем $\mathbf{R}^n$ и структурной группой $GL(n, \mathbf{R})$, присоединенное к некоторому главному расслоенному многообразию $P(\mathfrak{B}, GL(n, \mathbf{R}))$ над базой $\mathfrak{B}$ со структурной группой $GL(n, \mathbf{R})$. Приведем структурную группу $GL(n, \mathbf{R})$ главного расслоенного многообразия $P(\mathfrak{B}, GL(n, \mathbf{R}))$ к ортогональной группе $O(n)$ (см. [4], гл. I, § 8; гл. II, § 11, пример 2; [5], п. 12.9), т. е. рассмотрим дифференцируемое главное расслоенное многообразие $P'(\mathfrak{B}, O(n))$, допускающее вложение (см. [4], гл. I, § 8) в $P(\mathfrak{B}, GL(n, \mathbf{R}))$. Мы можем рассматривать теперь $(\mathcal{E}, \pi, \mathfrak{B})$ как расслоенное многообразие, присоединенное (см. [4], гл. I, § 9) к дифференцируемому главному расслоенному многообразию $P'(\mathfrak{B}, O(n))$ (см. также [5], п. 12.9). Тем самым на $(\mathcal{E}, \pi, \mathfrak{B})$ естественно возникает риманова метрика β (термин «риманова метрика» мы понимаем в смысле определения 9.2 гл. 3 книги [2], с той разницей, что теперь отображение β гладкое). (О задании этой же римановой метрики β несколько иным способом — с помощью функций перехода — см., например, [2], гл. 5 и, в частности, упражнение 5 в конце этой главы.)

Фиксируем произвольную связность Γ (см. [4], гл. II, § 1) в дифференцируемом главном расслоенном многообразии $P'(\mathfrak{B}, O(n))$ (существование таких связностей доказано в [4], гл. II, § 9). Введем в векторном расслоении $(\mathcal{E}, \pi, \mathfrak{B})$ (рассматриваемом как дифференцируемое, расслоенное многообразие, присоединенное к $P'(\mathfrak{B}, O(n))$)

---

* Поскольку в этом параграфе мы будем пользоваться определениями и теоремами из книги [4], то под дифференцируемостью (гладкостью) следует, строго говоря, понимать принадлежность классу C^∞. Заметим, однако, что достаточно требовать принадлежность классу C^1.

связность Q (см. [4], гл. II, § 10), определенную по связности Γ в $P'(\mathfrak{B},\, O(n))$ так, как это делается в п. 1) доказательства теоремы § 10, гл. II, книги [4] (т. е. по терминологии цитируемой книги введем в $(\mathcal{E},\, \pi,\, \mathfrak{B})$ связность, находящуюся в естественном соответствии со связностью Γ в $P'(\mathfrak{B},\, O(n))$). Эта связность в $(\mathcal{E},\, \pi,\, \mathfrak{B})$ согласована с введенной выше римановой метрикой β в том смысле, что параллельное перенесение сохраняет скалярное произведение; под этим понимается следующее: для всякой гладкой кривой u_t в базе $\mathfrak{B}$ для всяких интегральных кривых $\varepsilon_t^{(1)}$ и $\varepsilon_t^{(2)}$ распределения Q, накрывающих кривую u_t, имеет место утверждение: $\beta(\varepsilon_t^{(1)},\, \varepsilon_t^{(2)})$ не зависит от t, где β — введенная выше риманова метрика расслоения $(\mathcal{E},\, \pi,\, \mathfrak{B})$. (По поводу использованных в этой фразе терминов (кроме β) см. [4], гл. II, § 10, а по поводу β — см. [2], гл. 3, определение 9.2.)

Итак, мы снабдили гладкое векторное расслоение $(\mathcal{E},\, \pi,\, \mathfrak{B})$ римановой метрикой β и согласованной с ней связностью Q.

Рассмотрим теперь $\mathfrak{B}$-морфизм $A:(\mathcal{E},\, \pi,\, \mathfrak{B}) \to (\mathcal{E},\, \pi,\, \mathfrak{B})$, т. е. непрерывное отображение $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathfrak{B} & \end{tikzcd}$$

коммутативна, и для каждой точки $x \in \mathfrak{B}$ сужение $A(x): \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x)$ на слой $\pi^{-1}(x)$ отображения A является линейным отображением. В каждом слое $\pi^{-1}(x)$ имеется евклидова структура, индуцированная метрикой β; эта евклидова структура индуцирует норму отображения $A(x)$:

$$\| A(x) \| \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\substack{|\xi|=1 \\ \xi\in\pi^{-1}(x)}} \| A(x)\,\xi \|.$$

Потребуем от $\mathfrak{B}$-морфизма A, чтобы норма $|||A||| \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x\in\mathfrak{B}} \| A(x) \|$ была конечной. (Если $\mathfrak{B}$ компакт, то последнее условие выполняется автоматически.) Множество всех таких $\mathfrak{B}$-морфизмов A наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой

$$d\,(A_1,\, A_2) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x\in\mathfrak{B}} \| A_1(x) - A_2(x) \|.$$

Так определенное метрическое пространство обозначим через S_3. Легко проверяется, что пространство S_3 полно. При всяком $A \in S_3$ и всяком $x \in \mathfrak{B}$ рассмотрим уравнение

$$\nabla_F \varepsilon(t) = A(f^t x)\, \varepsilon(t), \tag{3}$$

где $\varepsilon(t)$ — отображение $\mathbf{R} \to \mathcal{E}$ (класса C^1) такое, что $\pi(\varepsilon(t)) = f^t \pi(\varepsilon(0))$ при всяком $t \in \mathbf{R}$, причем $\pi(\varepsilon(0)) = x$, а ∇_F — ковариантная производная относительно векторного поля F (напомним, что гладкая динамическая система f^t на $\mathfrak{B}$ и индуцированное ею векторное поле F на $\mathfrak{B}$ были зафиксированы в начале § 3). Ковариантную производную ∇_F определяем следующим образом (ср. [4], гл. III, § 3).

Пусть $x \in \mathfrak{B}$, пусть $\varepsilon(t)$ — гладкое (класса C^1) отображение $\mathbf{R} \to \mathcal{E}$ такое, что $\pi(\varepsilon(t)) = f^t \pi(\varepsilon(0))$ при всяком $t \in \mathbf{R}$, причем $\pi(\varepsilon(0)) = x$; введем обозначение $u_t \underset{\mathrm{def}}{=} f^t x$; пусть дано $\theta \in \mathbf{R}$; пусть $\varepsilon_t(\theta)$ — интегральная кривая (зависящая от θ) распределения Q (где Q — введенная выше связность в $(\mathcal{E},\, \pi,\, \mathfrak{B})$; здесь мы снова пользуемся определениями и обозначениями (только вместо e пишем ε) из § 10, гл. II, книги [4]), накрывающая кривую u_t (т. е. такая, что $\pi\varepsilon_t(\theta)=u_t$), причем $\varepsilon_\theta(\theta)=\varepsilon(\theta)$; при каждом фиксированном $\tau\in\mathbf{R}$ полагаем по определению

$$\nabla_F\varepsilon(\tau)\underset{\text{def}}{=}\lim_{\theta\to\tau}\frac{1}{\theta-\tau}[\varepsilon_\tau(\theta)-\varepsilon(\tau)].$$

При всяком $A\in S_3$ и всяком $x\in\mathfrak{B}$ решением уравнения (3) по определению называем такое отображение $\varepsilon(t):\mathbf{R}\to\mathcal{E}$ (класса C^1), которое при подстановке в уравнение (3) (как подставлять — объяснено выше) обращает его в верное при всех $t\in\mathbf{R}$ равенство. При всяких фиксированных $A\in S_3$, $\varepsilon(0)\in\mathcal{E}$ решение $\varepsilon(t)$ уравнения (3) существует и единственно (при всех $t\in\mathbf{R}$); причем это решение при всяких фиксированных $A\in S_3$, $x=\pi(\varepsilon(0))\in\mathfrak{B}$, $t\in\mathbf{R}$ линейно зависит от $\varepsilon(0)$, а при каждом фиксированном $t\in\mathbf{R}$ (равномерно относительно t на каждом компакте $\subset\mathbf{R}$) непрерывно зависит от $(A,\ \varepsilon(0))\in S_3\times\mathcal{E}$.

Докажем эти утверждения. При всяком фиксированном $x\in\mathfrak{B}$ и всяких θ, $\tau\in\mathbf{R}$ обозначим через $\varphi_{x;\,\theta,\,\tau}$ изоморфизм евклидова пространства $\pi^{-1}(f^\tau x)$ на евклидово пространство $\pi^{-1}(f^\theta x)$ (имеются в виду евклидовы структуры в слоях векторного расслоения $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$, индуцированные введенной выше метрикой β), порожденный тем параллельным перенесением вдоль кривой $f^t x$, $t\in[\min(\tau,\ \theta),\ \max(\tau,\ \theta)]$, которое соответствует введенной выше связности Q в гладком векторном расслоении $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$. Пользуясь введенным обозначением $\varphi_{x;\,\theta,\,\tau}$, можно переписать приведенное выше определение ковариантной производной в следующей форме: пусть $x\in\mathfrak{B}$ и пусть $\varepsilon(t)$ — гладкое (класса C^1) отображение $\mathbf{R}\to\mathcal{E}$ такое, что $\pi(\varepsilon(t))=f^t\pi(\varepsilon(0))=f^t x$ при всяком $t\in\mathbf{R}$, тогда при каждом $\tau\in\mathbf{R}$ имеем

$$\nabla_F\varepsilon(\tau)=\frac{d}{d\theta}\varphi_{x;\,\tau,\,\theta}\,\varepsilon(\theta)|_{\theta=\tau}. \tag{4}$$

Отметим следующие простые свойства изоморфизмов $\varphi_{x;\,\theta,\,\tau}$, вытекающие из их построения (см. п. 1) доказательства теоремы в § 10, гл. II, книги [4], а также § 2, гл. II той же книги, из которого видно, что изменение параметризации кривой u_t, лежащей в базе $\mathfrak{B}$ главного расслоенного многообразия (в данном случае $P'(\mathfrak{B},\ O(n))$), влечет точно такое же изменение параметризации ее лифта в главном расслоенном многообразии; в частности, если p_t — лифт кривой u_t, то при всяком фиксированном $\tau\in\mathbf{R}$ $p_{\tau+t}$ — лифт кривой $u_{\tau+t}$: при всяких θ, τ, $\eta\in\mathbf{R}$ имеют место равенства

$$\varphi_{x;\,0,\,0}=1_{\pi^{-1}(x)},$$

$$\varphi_{x;\,\theta,\,\tau}=\varphi_{x;\,\theta,\,\eta}\varphi_{x;\,\eta,\,\tau},\ \varphi^{-1}_{x;\,\theta,\,\tau}=\varphi_{x;\,\tau,\,\theta}$$

(справедливо также равенство: $\varphi_{f^\eta x;\,\theta,\,\tau}=\varphi_{x;\,\eta+\theta,\,\eta+\tau}$).

Пользуясь этими равенствами, перепишем выражение (4) для ковариантной производной (снова $\varepsilon(t)$ — гладкая кривая в $\mathcal{E}$, накрывающая кривую $f^t x$ в $\mathfrak{B}$) в виде

$$\nabla_F\varepsilon(\tau)=\frac{d}{d\theta}[\varphi_{x;\,\tau,\,0}\cdot\varphi_{x;\,0,\,\theta}\,\varepsilon(\theta)]|_{\theta=\tau}=\varphi_{x;\,\tau,\,0}\frac{d}{d\theta}[\varphi_{x;\,0,\,\theta}\,\varepsilon(\theta)]|_{\theta=\tau}.$$

Отсюда следует: для того чтобы гладкая кривая $\varepsilon(t)$ в $\mathcal{E}$, накрывающая гладкую кривую $f^t x$ в $\mathfrak{B}$, была решением уравнения (3), необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\tau\in\mathbf{R}$ выполнялось равенство

$$\frac{d}{d\theta}[\varphi_{x;\,0,\,\theta}\,\varepsilon(\theta)]|_{\theta=\tau}=\varphi^{-1}_{x;\,\tau,\,0}A(f^\tau x)\,\varepsilon(\tau),$$

которое (в силу равенства $\varphi^{-1}_{x;\,\tau,\,0} = \varphi_{x;\,0,\,\tau}$, являющегося частным случаем одного из приведенных выше равенств) эквивалентно следующему:

$$\frac{d}{d\tau} h(\tau) = \varphi_{x;\,0,\,\tau} A(f^{\tau}x)\,\varphi_{x;\,\tau,\,0} h(\tau), \tag{5}$$

где

$$h(\tau) \underset{\mathrm{def}}{=} \varphi_{x;\,0,\,\tau}\varepsilon(\tau) \tag{6}$$

($h(\tau) \in \pi^{-1}(x)$ при всяком $\tau \in \mathbf{R}$).

Итак, мы доказали: для того чтобы гладкая кривая $\varepsilon(t)$ в $\mathcal{E}$, накрывающая кривую $f^{t}x$ в $\mathfrak{B}$, была решением уравнения (3), необходимо и достаточно, чтобы функция $h(t) \underset{\mathrm{def}}{=} \varphi_{x;\,0,\,\tau}\varepsilon(\tau)$ (отображающая $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^{n} \in \pi^{-1}(x)$) была решением линейного дифференциального уравнения (5).

Сформулированные выше утверждения о свойствах решений уравнения (3) вытекают теперь из теорем существования, единственности и непрерывной зависимости решений системы $\dot{\xi} = \widehat{A}(t)\,\xi$ ($\xi \in \mathbf{R}^{n}$) от начальных значений и от непрерывного отображения $\widehat{A}(\cdot): \mathbf{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^{n},\ \mathbf{R}^{n})$ ($\sup\limits_{t\in\mathbf{R}} \|\widehat{A}(t)\| < +\infty$) (в метрике $\rho(\widehat{A}_1,\ \widehat{A}_2) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} \|\widehat{A}_1(t) - \widehat{A}_2(t)\|$) поскольку:

а) отображения $\varphi_{x;\,\theta,\,\tau}$ гладко зависят от $(x;\ \theta,\ \tau) \in \mathfrak{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$;

б) $$\|\varphi_{x;\,0,\,\tau} A(f^{\tau}x)\,\varphi_{x;\,\tau,\,0}\| = \|A(f^{\tau}x)\| \tag{7}$$

(поскольку $\varphi_{x;\,\theta,\,\tau}$ — изоморфизмы евклидовых пространств), причем напомним, что по условию $|||A||| = \sup\limits_{x\in\mathfrak{B}} \|A(x)\| < +\infty$;

в) $\|\varphi_{x;\,0,\,\tau} A_1(f^{\tau}x)\,\varphi_{x;\,\tau,\,0} - \varphi_{x;\,0,\,\tau} A_2(f^{\tau}x)\,\varphi_{x;\,\tau,\,0}\| = \|A_1(f^{\tau}x) - A_2(f^{\tau}x)\|$ (опять-таки, поскольку $\varphi_{x;\,\theta,\,\tau}$ — изоморфизмы евклидовых пространств).

Решения уравнения (3), очевидно, образуют векторное пространство (относительно операций сложения и умножения на вещественные числа, определяемых обычным образом (точки кривых $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$, накрывающих одну и ту же кривую $f^{t}x$, соответствующие всякому значению $t = \tau$, для обеих кривых одному и тому же, принадлежат одному слою векторного расслоения)). Учитывая это и доказанное выше, получаем, что при всяком $A \in S_3$, при всяком $m \in \mathbf{N}$ (на самом деле при всяком $m \in \mathbf{R}$) определен морфизм (в категории векторных расслоений)

$$(\Xi(m,\ A),\ f^{m}): (\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B}) \to (\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B}),$$

а именно по определению $\Xi(m,\ A)$ сопоставляет точке $\varepsilon(0)$ точку $\varepsilon(m)$, где $\varepsilon(t)$ — произвольное решение уравнения (3). При этом

а) обратный морфизм $(\Xi^{-1}(m,\ A),\ f^{-m})$ существует (при всяких $m \in \mathbf{N}$, $A \in S_3$);

б) $$\max(|||\Xi(m,\ A)|||,\ |||\Xi^{-1}(m,\ A)|||) \leqslant \exp(m\,|||A|||) \tag{8}$$

(при всяких $m \in \mathbf{N}$, $A \in S_3$); (неравенство (8) вытекает из хорошо известного неравенства для оператора Коши $\Xi(\theta,\ \tau;\ \widehat{A})$ системы $\dot{\xi} = \widehat{A}(t)\,\xi$:

$$\|\Xi(\theta,\ \tau;\ \widehat{A})\| \leqslant \exp(|\theta - \tau| \sup_{t\in\mathbf{R}} \|\widehat{A}(t)\|)$$

и формул (5) — (7), причем, применяя формулу (6), нужно учесть, что $\varphi_{x;\,0,\,\tau}$ — изоморфизм евклидовых пространств).

Положим теперь $B \underset{\mathrm{def}}{=} S_3 \times \mathfrak{B}$. Так как S_3 и $\mathfrak{B}$ — полные метрические пространства, то

B — полное метрическое пространство. Положим

$$E \underset{\text{def}}{=} S_3 \times \mathcal{E},\ p = 1_{S_3} \times \pi.$$

Так определенное расслоение $(E,\ p,\ B)$ наделяется структурой гладкого векторного расслоения (со слоем $\mathbf{R}^n$) заданием атласа

$$\{g_i : (S_3 \times U_i) \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}(S_3 \times U_i)\}_{i \in I},$$

определенного по атласу

$$\{h_i : U_i \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$$

(где I — некоторое множество) гладкого векторного расслоения $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ формулой $g_i \underset{\text{def}}{=} 1_{S_3} \times h_i$ (чтоб придать смысл этой формуле, надо рассмотреть $(S_3 \times U_i) \times \mathbf{R}^n$ как $S_3 \times (U_i \times \mathbf{R}^n)$).

Положим при всяком $m \in \mathbf{N}$

$$X\,(m) \underset{\text{def}}{=} 1_{S_3} \times \Xi\,(m,\ A) : E \to E$$

(иными словами, всякое $e \in E$ есть пара $(A,\ \varepsilon)$, где $A \in S_3$, $e \in \mathcal{E}$; полагаем

$$X\,(m)\,e = X\,(m)\,(A,\ \varepsilon) \underset{\text{def}}{=} (A,\ \Xi\,(m,\ A)\,\varepsilon)).$$

Положим при всяком $m \in \mathbf{N}$

$$\chi\,(m) \underset{\text{def}}{=} 1_{S_3} \times f^m : B \to B.$$

Из того, что при всяком $m \in \mathbf{N}$, как было доказано выше, отображение $v_m : E \to \mathcal{E}$, определенное формулой $v_m(A,\ \varepsilon) \underset{\text{def}}{=} \Xi\,(m,\ A)\,\varepsilon$, непрерывно, а $(\Xi\,(m,\ A),\ f^m)$ есть морфизм $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B}) \to (\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ (в категории векторных расслоений), следует, что при всяком $m \in \mathbf{N}$ пара $(X(m),\ \chi\,(m))$ есть морфизм $(E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$ (в категории векторных расслоений). Поскольку, как было доказано выше, при всяких $m \in \mathbf{N}$, $A \in S_3$ морфизм $(\Xi\,(m,\ A),\ f^m)$ имеет обратный $(\Xi^{-1}(m,\ A),\ f^{-m})$, то при всяком $m \in \mathbf{N}$ морфизм $(X(m),\ \chi\,(m))$ имеет обратный

$$(X^{-1}(m),\ \chi^{-1}(m)) = (1_{S_3} \times \Xi^{-1}(m,\ A),\ 1_{S_3} \times f^{-m}).$$

Поэтому при всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$ $[X(m,\ b)]^{-1} = X^{-1}(m,\ \chi\,(m)\,b)$.

В начале параграфа мы построили риманову метрику β на гладком векторном расслоении $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$, т. е. построили гладкое отображение подпространства прямого произведения $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ (состоящего из всех тех точек $(\varepsilon,\ \varepsilon')$, для которых $\pi\varepsilon = \pi\varepsilon'$) в $\mathbf{R}$ такое, что для всякого $x \in \mathfrak{B}$ сужение на векторное пространство $\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x)$ отображения β является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(x)$. Положим

$$\Delta\,(e,\ e') \underset{\text{def}}{=} \beta\,(ue,\ ue'),$$

где через u обозначена проекция произведения $E = S_3 \times \mathcal{E}$ на второй сомножитель. Отображение Δ индуцирует риманову метрику на гладком векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ (доказательство такое же, как в § 1). Для так определенной римановой метрики на гладком векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ из неравенства (8) и формул

$$X(m) = 1_{S_3} \times \Xi\,(m,\ A),\ X^{-1}(m) = 1_{S_3} \times \Xi^{-1}(m,\ A)$$

следует, что выполнено неравенство (1) для всяких $m \in \mathbf{N}$, $b \in B$, где функция $a\,(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$ определяется так: всякое $b \in B$ есть $(A,\ x)$, где $A \in S_3$, $x \in \mathfrak{B}$; по определению полагаем

$$a\,(b) = a\,((A,\ x)) \underset{\text{def}}{=} |||\,A\,|||$$

($a(b)$ зависит только от A, а от x не зависит; очевидно, что так определенная функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ непрерывна).

§ 4. Изложенные в §§ 1—3 конструкции имеют дискретно-временные аналоги (собственно говоря, в каждом из параграфов 1—3 мы тоже с некоторого момента переходили к рассмотрению дискретного времени, но в определении исходных объектов там участвовало непрерывное время).

В этом параграфе мы описываем дискретно-временные аналоги конструкций, изложенных в §§ 1—3.

1. Под f^t (соответственно F^t) (см. § 1) будем теперь понимать не прерывное действие не группы $\mathbf{R}$, а группы $\mathbf{Z}$ на $\mathfrak{B}$ (соответственно на $\mathcal{E}$); соответственно t теперь с самого начала — элемент группы $\mathbf{Z}$, а не $\mathbf{R}$. Повторив с этим изменением, а во всем остальном — дословно так же конструкцию § 1, получим дискретно-временной аналог конструкции § 1. Поясним, во избежание недоразумений, одну деталь: во встречающемся несколько раз в § 1 выражении $\sup\limits_{t \in [-1,\, 1]}$ теперь $[-1,\, 1]$ надо трактовать как подмножество группы $\mathbf{Z}$ (состоящее из трех чисел: $-1,\ 0,\ 1$).

2. Если векторное расслоение $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ (см. начало § 1) тривиально, то конструкция, описанная в п. 1, § 4, является дискретно-временным аналогом конструкции § 2.

3. Дискретно-временной аналог конструкции § 3 получается, если в конструкции § 1 помимо тех изменений, которые указаны выше в п. 1, § 4, сделать еще следующие изменения: а) потребовать, чтобы $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ (см. начало § 1) было гладким векторным расслоением со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой $\mathfrak{B}$; б) перейти от метрики C к метрике C^1. Мы не будем здесь подробнее останавливаться на этом переходе.

§ 5. В предыдущих параграфах мы построили серию семейств морфизмов $(X(m),\ \chi(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ векторных расслоений $(E,\ p,\ B)$; для каждого семейства этой серии (кроме п. 3, § 4) мы подробно изложили проверку условий, сформулированных в начале статьи [1] и воспроизведенных в начале этой статьи.

Тем самым мы доказали для каждого из семейств морфизмов этой серии леммы 1—5 и теоремы 1—3 в [1].

В следующей статье этого цикла мы излагаем конструкции серии семейств морфизмов $(X(m),\ \chi(m))$ $(m \in \mathbf{N})$ векторных расслоений $(E,\ p,\ B)$ исходя из нелинейных систем дифференциальных уравнений и их дискретно-временных аналогов.

А здесь в заключение приведем формулировки теорем 1—3 из [1] применительно к семейству морфизмов, описанному в § 2 настоящей статьи. В этих формулировках мы совсем не будем пользоваться языком теории векторных расслоений; эти формулировки даны так, чтобы их можно было понять, не заглядывая в [1] и в предшествующий им текст настоящей статьи.

Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$)*. Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру. Рассмотрим непрерывное отображение $A(\cdot): \mathfrak{B} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющее условию**:

$$\sup_{x \in \mathfrak{B}} \| A(x) \| < +\infty.$$

Множество всех таких отображений $A(\cdot)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также A) наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой:

---

* Отметим частный случай, более всего изучавшийся в теории показателей Ляпунова:

$$\mathfrak{B} = \mathbf{R},\ f^t x \underset{\mathrm{def}}{=} x + t.$$

** Если $\mathfrak{B}$ — компакт, то это условие выполняется автоматически.

$$d\,(A_1,\ A_2) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathfrak{B}} \| A_1(x) - A_2(x) \|.$$

Так определенное полное метрическое пространство обозначим через S. Положим $B = S \times \mathfrak{B}$. При всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = A\,(f^t x)\,\xi \ (\xi \in \mathbf{R}^n).$$

Обозначим через

$$\lambda_1(A,\ x) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A,\ x)$$

показатели Ляпунова этой системы. Теоремы 1—3 статьи [1] применительно к данной ситуации состоят в следующем. При всяком $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_k(A,\ x): B \to \mathbf{R}$ есть бэровская функция второго класса (следовательно, в силу теоремы Бэра ее сужение на некоторое всюду плотное G_δ непрерывно); множество точек полунепрерывности сверху всех функций $\lambda_k(A,\ x): B \to \mathbf{R}$ ($k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$) типично в B (т. е. является всюду плотным множеством типа G_δ).

Фиксируем базис в $\mathbf{R}^n$. Множество всех тех $A \in S$, для которых при всяком $x \in \mathfrak{B}$ оператор $A\,(x) \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$ задается в этом базисе матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_n(x), & -a_{n-1}(x), & -a_{n-2}(x), & \ldots, & -a_1(x), \end{pmatrix},$$

замкнуто в S, и поэтому теоремы, аналогичные только что сформулированным, справедливы и для уравнений n*-го* порядка.

По той же причине аналогичные теоремы справедливы для линейных гамильтоновых систем и для линейных систем, оператор Коши которых сохраняет объем.

Литература

1. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8.
2. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.— М, Мир, 1970.
3. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений,—М.—Л., ГТТИ, 1949.
4. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия.— М., ИЛ, 1960.
5. Стинрод Н. Топология косых произведений.— М., ИЛ, 1953.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 31 марта 1980 г.