УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. I

Пусть (E,p,B) — векторное расслоение со слоем R^n, причем база B — полное метрическое пространство. Зафиксируем некоторую риманову метрику на этом векторном расслоении (см. **[1],** с. 58—59, где рассматриваются римановы метрики на векторных расслоениях над паракомпактными базами; паракомпактность метрического пространства доказана в [2] (гл. IX, § 4, теорема 4)).

Пусть для всякого $m \in N$ задан морфизм* (в категории векторных расслоений):

$$\left(X(m), \mathfrak{x}(m)\right) : (E,p,B) \to (E,p,B),$$

причем отображения $X(m)$ невырождены на слоях, т. е. при всяких $m \in N$, $b \in B$ линейное отображение $X(m,b) : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\mathfrak{x}(m)b)$ имеет обратное

$$\left[X(m,b)\right]^{-1} : p^{-1}(\mathfrak{x}(m)b) \to p^{-1}(b).$$

Потребуем, чтобы существовала функция $a(\cdot) : B \to R^+$ такая, что для всякого $m \in N$ выполнено неравенство**

$$\max\left(\left\|X(m,b)\right\|, \left\|\left[X(m,b)\right]^{-1}\right\|\right) \leqslant \exp\left(ma(b)\right). \qquad (1)$$

Из этого требования вытекает, что для всякого $b \in B$ и всякого $k \in \{1,...,n\}$

$$\lambda_k(b) \underset{\text{def}}{=} \min_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(R^n)} \max_{\substack{\xi \in R^{n-k+1} \\ |\xi|=1}} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln\left|X(m,b)\xi\right|$$

(где*** под R^n понимается слой $p^{-1}(b)$, а $|X(m,b)\xi|$—норма вектора $X(m,b)\xi \in p^{-1}(\mathfrak{x}(m)b)$ в смысле той евклидовой структуры в слое $p^{-1}(\mathfrak{x}(m)b)$, которая индуцирована фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E,p,B) есть число, принадлежащее $[-a(b), a(b)]$. Это число**** называется k-м показателем Ляпунова семейства $X(m,b)$ (см. [3], где доказано, в частности, что max и min, фигурирующие в вышеприведенной формуле для $\lambda_k(b)$, существуют (т. е. соответствующие sup и inf достигаются)). Очевидно,

$$\lambda_1(b) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(b).$$

Мы можем также рассматривать для каждой последовательности $\{t_l\}_{l\in\mathbf{N}}$ ($t_l \in \mathbf{N}$, $t_l \underset{l\to\infty}{\to} \infty$),

---

*Напомним, что это означает следующее: при каждом $m \in N$ заданы непрерывные отображения $X(m): E \to E$, $\mathfrak{x}(m): B \to B$ такие, что $pX(m) = \mathfrak{x}(m)p$ (при всяком $m \in N$), причем при всяких $b \in B$, $m \in N$ отображение $X(m,b): p^{-1}(b) \to p^{-1}(\mathfrak{x}(m)b)$, определяемое как сужение (ограничение) на слой $p^{-1}(b)$ отображения $X(m)$, есть линейное отображение.

** Норма линейного отображения слоя на слой определяется как норма оператора (слои наделены структурами нормированных пространств заданием в них евклидовых структур, индуцированных фиксированной выше римановой метрикой).

*** $G_k(R^n)$ — грассманово многообразие k-мерных линейных подпространств пространства R^n (см. [1], с. 25).

**** Легко видеть, что в формуле, определяющей $\lambda_k(b)$, вместо $|\xi| = 1$ можно писать $\xi \ne 0$ $\lambda_k(b)$ от этого не изменится).

каждого $b \in B$ и каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ число

$$\lambda_k(b;\ \{t_l\}_{l \in \mathbf{N}}) \underset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\mathbf{R}^n)} \max_{\substack{\xi \in \mathbf{R}^{n-k+1} \\ |\xi|=1}} \varlimsup_{l \to \infty} \frac{1}{t_l} \ln |X(t_l,\ b)\xi|;$$

все эти числа содержатся в отрезке $[-a(b),\ a(b)]$; если $t_l = l$ $(l \in \mathbf{N})$, то $\lambda_k(b;\ \{t_l\}_{l \in \mathbf{N}}) = \lambda_k(b)$.

Введем в рассмотрение функции*

$$\mu_k^{(m,\ q)}(b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)} \max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|, \tag{2}$$

где под $\mathbf{R}^n$ понимается слой $p^{-1}(b)$.

Л е м м а 1. *При всяких* $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$ *числовая последовательность* $\{\mu_k^{(m,\ q)}(b)\}_{q \in \mathbf{N}}$ *монотонно не убывает и ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как при каждом $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q+1\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \| \geqslant \max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|,$$

то

$$\mu_k^{(m,\ q+1)}(b) = \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)} \max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q+1\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \| \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)} \max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \| = \mu_k^{(m,\ q)}(b).$$

2) Из условия, наложенного на $X(m)$ (см. выше формулу (1)), вытекает, что при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$

$$\mu_k^{(m,\ q)}(b) \in [-a(b),\ a(b)], \tag{3}$$

поскольку из формулы (1) следует включение

$$\frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \| \in [-a(b),\ a(b)]$$

(для всяких $m \in \mathbf{N}$, $t \in \{0,\ 1,\ \ldots\}$, $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$, $b \in B$). Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 в силу теоремы Вейерштрасса вытекает, что при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$ существует $\lim\limits_{q \to \infty} \mu_k^{(m,\ q)}(b)$. Введем обозначение

$$\mu_k^{(m)}(b) = \lim_{q \to \infty} \mu_k^{(m,\ q)}(b). \tag{4}$$

Из (3) следует, что при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$

$$\mu_k^{(m)}(b) \in [-a(b),\ a(b)]. \tag{5}$$

Л е м м а 2. *При всяких* $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *числовая последовательность* $\{\mu_k^{(m)}(b)\}_{m \in \mathbf{N}}$ *монотонно невозрастает и ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Ограниченность уже доказана (см. формулу (5)). 2) Так как при каждом $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+1+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+1+t,\ b) \| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ q+1\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|,$$

то

---

* $X\mathbf{R}^k(s,\ b)$ — сужение линейного отображения $X(s,\ b)$ на линейное подпространство $\mathbf{R}^k \subset p^{-1}(b)$.

$$\mu_k^{(m+1,\,q)}(b) \underset{(2)}{=} \inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(\mathbf{R}^n)} \max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}} \frac{1}{m+1+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+1+t,\,b)\| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(\mathbf{R}^n)} \max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q+1\}} \frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\,b)\| \underset{(2)}{=} \mu_k^{(m,\,q+1)}(b).$$

откуда

$$\mu_k^{(m+1)}(b) \underset{(4)}{=} \lim_{q\to\infty}\mu_k^{(m+1,\,q)}(b) \leqslant \lim_{q\to\infty}\mu_k^{(m,\,q+1)}(b) \underset{(4)}{=} \mu_k^{(m)}(b).$$

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 в силу теоремы Вейерштрасса вытекает, что при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ существует $\lim\limits_{m\to\infty}\mu_k^{(m)}(b)$. Введем обозначение

$$\mu_k(b) = \lim_{m\to\infty}\mu_k^{(m)}(b). \tag{6}$$

Из (5) следует, что при всяком $b\in B$ и всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$

$$\mu_k(b)\in[-a(b),\ a(b)].$$

Л е м м а 3. *При всяких* $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *функция* $\mu_k^{(m,\,q)}(b)$ *непрерывна на* B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим функцию $\varphi(s) \underset{\text{def}}{=} \inf\limits_{t\in T}\psi(s,\,t)$, где $\psi(\cdot,\,\cdot)$ — непрерывное отображение $S\times T\to\mathbf{R}$ (S — произвольное (хаусдорфово) топологическое пространство, T — компакт). Хорошо известно (и легко доказывается), что функция $\varphi(s) \underset{\text{def}}{=} \inf\limits_{t\in T}\psi(s,\,t) = \min\limits_{t\in T}\psi(s,\,t)$ непрерывна на S.

2. Пусть теперь дано непрерывное отображение $\xi(\cdot): S\to\mathbf{R}$, где S — пространство некоторого локально тривиального расслоения $(S,\,\pi,\,B)$ со слоем W, причем W — компакт. Тогда функция $\eta(b) \underset{\text{def}}{=} \inf\limits_{s\in\pi^{-1}(b)}\xi(s)$ непрерывна на B. Это утверждение — следствие предыдущего (т. е. следствие утверждения п. 1), так как непрерывность — локальное свойство, а расслоение $(S,\,\pi,\,B)$ локально тривиально.

3. Возьмем в качестве S пространство расслоенного пространства* $(S,\,\pi,\,B)$ над B со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$ ($G_k(\mathbf{R}^n)$ естественным образом наделяется структурой левого $GL(n,\,\mathbf{R})$-пространства), ассоциированного с локально тривиальным главным $GL(n,\,\mathbf{R})$-расслоением, с которым ассоциировано рассматриваемое нами векторное расслоение $(E,\,p,\,B)$ (см. [1], с. 69, а также с. 97—98 (замечание 3.3), причем в замечании 3.3 под расслоенными пространствами следует понимать расслоенные пространства, ассоциированные с локально тривиальными главными G-расслоениями); расслоенное пространство $(S,\,\pi,\,B)$ также локально тривиально (см. [1], с. 72—73). Фиксируем произвольные $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$.

В качестве T возьмем конечное множество $\{0,\,1,\ \ldots,\ q\}$, снабженное дискретной топологией (т. е. рассматриваемое как подпространство топологического пространства $\mathbf{R}$). Зададим отображение $\psi_k^{(m,\,q)}(\cdot,\,\cdot): S\times T\to\mathbf{R}$ формулой

$$\psi_k^{(m,\,q)}(s,\,t) = -\frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\,b)\|,$$

где $s=\mathbf{R}^k$, причем под $\mathbf{R}^k$ понимается точка слоя $\pi^{-1}(b)$ расслоения $(S,\,\pi,\,B)$, а $b=\pi(s)$. Так определенная функция $\psi_k^{(m,\,q)}(s,\,t)$, очевидно, непрерывна на $S\times T$.

* При всей неудачности выражения «пространство расслоенного пространства» пришлось им воспользоваться (см. [1], с. 69, где расслоенным пространством называется некоторое расслоение, и там же с. 22, где определяется пространство расслоения).

Согласно утверждению п. 1, функция $\psi_k^{(m,\,q)}(s) \underset{\text{def}}{=} \inf_{t\in T} \psi_k^{(m,\,q)}(s,\, t)$ непрерывна на S и, следовательно, функция

$$\xi_k^{(m,\,q)}(s) \underset{\text{def}}{=} \max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\, b) \| = -\varphi_k^{(m,\,q)}(s)$$

непрерывна на S (при всяких $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$).

4. По функции $\xi_k^{(m,\,q)}(\cdot): S\to\mathbf{R}$, определенной в конце п. 3, построим функцию

$$\eta_k^{(m,\,q)}(b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{s\in\pi^{-1}(b)} \xi_k^{(m,\,q)}(s),$$

т. е. как в п. 2 (где $(S,\ \pi,\ B)$ на этот раз — расслоение, определенное в начале п. 3).

При всяких $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, согласно утверждению п. 2, условия которого выполнены, так как $G_k(\mathbf{R}^n)$ — компакт (см. [1], с. 25), функция

$$\eta_k^{(m,\,q)}(b) = \inf_{s\in\pi^{-1}(b)} \xi_k^{(m,\,q)}(s) =$$

$$= \inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(\mathbf{R}^n)} \max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X_{\mathbf{R}^k}(m+t,\ b) \|$$

непрерывна на B. В выражении для $\eta_k^{(m,\,q)}(b)$ безразлично, понимать ли под $G_k(\mathbf{R}^n)$ слой $\pi^{-1}(b)$ расслоения $(S,\, \pi,\, B)$ или грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$ расслоения $(E,\, p,\, B)$, поэтому $\eta_k^{(m,\,q)}(b) = \mu_k^{(m,\,q)}(b)$ (см. формулу (2)). Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. *При каждом $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\mu_k(b): B\to\mathbf{R}$ определенная формулой (6), — бэровская функция второго класса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определения бэровских классов функций см. в [4], [5, § 39]. Утверждение леммы 4 непосредственно вытекает в силу этих определений из леммы 3 и формул (4), (6). Лемма 4 доказана.

Следующая далее лемма 5 устанавливает связь показателей Ляпунова с функциями $\mu_k(b)$ (при $k = n$ утверждение леммы 5 представляет собой известную формулу

$$\lambda_1(b) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln \| X(m,\ b) \|$$

(см. [6], с 170—171, теорема 4.1)).

Л е м м а 5. *При всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$*

$$\mu_k(b) = \lambda_{n-k+1}(b). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Согласно определению показателей Ляпунова, воспроизведенному в начале этой статьи,

$$\lambda_{n-k+1}(b) = \min_{\mathbf{R}^k\in G_k(\mathbf{R}^n)} \max_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^k\\ |\xi|=1}} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\,\xi|, \tag{8}$$

где под $\mathbf{R}^n$ понимается слой $p^{-1}(b)$.

Воспользовавшись известным равенством

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} a_m = \lim_{m\to\infty} \lim_{q\to\infty} \max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}} a_{m+t},$$

(справедливым для всякой числовой последовательности $\{a_m\}_{m\in\mathbf{N}}$; в данном случае положим $a_m = \dfrac{1}{m} \ln |X(m,\ b)\,\xi|$ при произвольных фиксированных $b\in B$, $\xi\in\mathbf{R}^n$ ($|\xi| = 1$)), можем переписать формулу (8) в следующем виде:

$$\lambda_{n-k+1}(b)=$$

$$=\min_{\mathbf{R}^k\in G_k(\mathbf{R}^n)}\max_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^k\\|\xi|=1}}\lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty}\max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}}\frac{1}{m+t}\ln|X(m+t,\,b)\,\xi|. \tag{9}$$

2. С другой стороны, из формул (2), (4), (6) следует:

$$\mu_k(b)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty}\inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(\mathbf{R}^n)}\max_{t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}}\max_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^k\\|\xi|=1}}\frac{1}{m+t}\ln|X(m+t,\,b)\,\xi|. \tag{10}$$

3. Как видим, правые части формул (9), (10) различаются порядком, в котором применены к одному и тому же выражению операции взятия нижней грани, взятия верхней грани и перехода к пределу. Вообще говоря, такие операции, как известно, не коммутируют; для доказательства равенства правых частей формул (9) и (10) воспользуемся равномерностью некоторых оценок и монотонностью некоторых из входящих в эти формулы последовательностей.

4. В начале статьи, при воспроизведении определения показателей Ляпунова, было отмечено, что, как доказано Ляпуновым в [3], $\max$ и $\min$ в формуле (8) существуют, т. е. соответствующие $\sup$ и $\inf$ достигаются; можно, правда, говорить о том, что Ляпунов не рассматривал морфизмов векторных расслоений, но для доказательства цитированных только что утверждений Ляпунова мы можем воспользоваться следующей тривиальной редукцией: зафиксировав произвольное $b\in B$, выберем в слое $p^{-1}(b)$ и при каждом $m\in\mathbf{N}$ в слое $p^{-1}(\chi(m)\,b)$ произвольный ортонормированный базис (ортонормированный в смысле той евклидовой структуры в этом слое, которая индуцирована фиксированной в начале статьи римановой метрикой векторного расслоения $(E,\,p,\,B)$); выбрав ортонормированные базисы в слоях $p^{-1}(b)$ и $p^{-1}(\chi(m)\,b)$ ($m\in\mathbf{N}$) мы сопоставим каждому линейному отображению $X(m,\,b)\colon p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi(m)\,b)$ матрицу (которой это отображение задается в выбранных базисах слоев $p^{-1}(b)$ и $p^{-1}(\chi(m)\,b)$ после чего в формуле (8) можно заменить $X(m,\,b)$ соответствующей матрицей из n строк и n столбцов ξ-столбцом из n вещественных чисел, а под $\mathbf{R}^n$ понимать векторное пространство таких столбцов, снабженное евклидовой структурой:

$$(\xi,\,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\eta^i\ \ (\text{где }\xi=\operatorname{col}(\xi^1,\,\ldots,\,\xi^n),\ \eta=\operatorname{col}(\eta^1,\,\ldots,\,\eta^n));$$

строго говоря, и после этой редукции остается некоторое отличие от ситуации, рассмотренной Ляпуновым в [3] (гл. 1, пп. 6—8), но это отличие только в том, что здесь «время дискретное», а у Ляпунова «непрерывное», причем ситуация — одна из тех, где это отличие никаких нетривиальных изменений не вызывает. Подчеркнем, что приведенные в предыдущей фразе редукция и замечание о несущественности отличия случая дискретного времени от случая непрерывного времени обслуживают именно обсуждаемый вопрос (почему в формуле (8) можно было написать $\min$, а не $\inf$ и $\max$, а не $\sup$); для решения этого вопроса нам оказалось достаточным для каждого фиксированного b выбрать ортонормированные базисы в слоях $p^{-1}(b)$, $p^{-1}(\chi(m)\,b)$ ($m\in\mathbf{N}$) произвольным образом и не возникло никакой надобности заботиться о каких-нибудь свойствах зависимости этих базисов от b (или от m). В дальнейшем изложении нам снова придется обращаться к той же редукции, но опять-таки только в тех ситуациях, когда можно выбирать соответствующие ортонормированные базисы произвольно.

5. Фиксируем произвольное $b\in B$; фиксируем произвольное $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$.

Пусть $\min\limits_{\mathbf{R}^k\in G_k(\mathbf{R}^n)}$ в формуле (8) достигается в точке $\mathbf{R}^k_0$ грассманова многообразия

$G_k(\mathbf{R}^n)$. Тогда из формулы (8) следует, что для всякого $\xi \in \mathbf{R}_0^k$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $C_\varepsilon(\xi) \in \mathbf{R}^+$ такое, что для всякого $m \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$|X(m,\ b)\,\xi| \leqslant C_\varepsilon(\xi)\exp[(\lambda_{n-k+1}(b)+\varepsilon)\,m]. \qquad (11)$$

Выберем в каждом из слоев $p^{-1}(b)$, $p^{-1}(\chi(m)\,b)$ $(m \in \mathbf{N})$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ произвольный ортонормированный базис (ортонормированный в смысле евклидовых структур, индуцированных на этих слоях фиксированной в начале статьи римановой метрикой векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$). Выбор этих базисов индуцирует при каждом $m \in \mathbf{N}$ изоморфизм $\varphi(m,\ b): p^{-1}(\chi(m)\,b) \to p^{-1}(b)$ (имеется в виду изоморфизм слоев как евклидовых пространств). Рассмотрим для каждого $m \in \mathbf{N}$ линейный оператор $Y(m): \mathbf{R}_0^k \to p^{-1}(b)$, определенный формулой:

$$Y(m) \underset{\text{def}}{=} \exp[-(\lambda_{n-k+1}(b)+\varepsilon)\,m]\,\varphi(m,\ b)\ X_{\mathbf{R}_0^k}(m,\ b).$$

Поскольку $\varphi(m,\ b)$ при каждом $m \in \mathbf{N}$ — изоморфизм слоев, как евклидовых пространств, из формулы (11) имеем

$$|Y(m)\,\xi| \leqslant C_\varepsilon(\xi).$$

Отсюда в силу теоремы Банаха — Штейнгауза (см. [6], с. 21), примененной к семейству линейных операторов $\{Y(m)\}_{m\in\mathbf{N}}$ (или в силу хорошо известного рассуждения, использующего конечномерность пространства $\mathbf{R}_0^k$), следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $C_\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ такое, что $\|Y(m)\| \leqslant C_\varepsilon$ для всякого $m \in \mathbf{N}$.

Из этого утверждения и определения $Y(m)$ получаем (учитывая, что операторы $\varphi(m,\ b)$ — изоморфизмы евклидовых пространств): для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $C_\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ такое, что

$$\|X_{\mathbf{R}_0^k}(m,\ b)\| \leqslant C_\varepsilon \exp[(\lambda_{n-k+1}(b)+\varepsilon)\,m]$$

для всякого $m \in \mathbf{N}$.

Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ при всяком натуральном $m \geqslant \varepsilon^{-1}\ln C_\varepsilon$ и всяком $q \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\max_{t\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t}\ln\|X_{\mathbf{R}_0^k}(m+t,\ b)\| \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)+2\varepsilon,$$

откуда в силу формулы (2) получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ при всяком натуральном $m \geqslant \varepsilon^{-1}\ln C_\varepsilon$ и всяком $q \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\mu_k^{(m,\ q)}(b) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)+2\varepsilon.$$

Отсюда в силу формулы (4) получаем: для всякого $\varepsilon > 0$ при всяком натуральном $m \geqslant \varepsilon^{-1}\ln C_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\mu_k^{(m)}(b) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b)+2\varepsilon.$$

Из последнего утверждения в силу формулы (6) следует:

$$\mu_k(b) \leqslant \lambda_{n-k+1}(b). \qquad (12)$$

Напомним, что $b \in B$ и $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ были взяты в начале п. 5 произвольными; таким образом, формула (12) доказана для всяких $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$.

6. Фиксируем произвольное $b \in B$; фиксируем произвольное $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

а) Из формулы (6) следует, что найдется $m_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такое, что для всякого натурального $m \geqslant m_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\mu_k^{(m)}(b) < \mu_k(b)+\varepsilon.$$

Зафиксируем какое-нибудь m_ε, обладающее указанным свойством.

б) Из леммы 1 и формулы (4) следует, что для всяких $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$ $\mu_k^{(m,\,q)}(b)\leqslant\mu_k^{(m)}(b)$.

в) Из результатов подпунктов а) и б) следует, что для всякого натурального $m\geqslant m_\varepsilon$, для всякого $q\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\mu_k^{(m,\,q)}(b)<\mu_k(b)+\varepsilon.$$

г) Из результата подпункта в) следует в силу формулы (2), что для всякого $q\in\mathbf{N}$ найдется $\mathbf{R}^k_{m_\varepsilon,\,q}\in G_k(\mathbf{R}^n)$, где $\mathbf{R}^n=p^{-1}(b)$, такое, что при всяком $t\in\{0,\,1,\,\ldots,\,q\}$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{m_\varepsilon+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k_{m_\varepsilon,\,q}}(m_\varepsilon+t,\;b)\|<\mu_k(b)+\varepsilon.$$

д) Из последовательности $\{\mathbf{R}^k_{m_\varepsilon,\,q}\}_{q\in\mathbf{N}}$ (напомним, что m_ε у нас зафиксировано и что $\mathbf{R}^k_{m_\varepsilon,\,q}\in G_k(\mathbf{R}^n)$, где $\mathbf{R}^n=p^{-1}(b)$) выберем сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{R}^k_{m_\varepsilon,\,q_i}\}_{i\in\mathbf{N}}$. Такой выбор возможен в силу того, что грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$ компактно (см. [1], с. 25). Обозначим предел этой подпоследовательности через $\mathbf{R}^k_\varepsilon$. Из результата подпункта г) получаем следующий результат. При всяком $t\in\{0\}\bigcup\mathbf{N}$ выполнено следующее:

$$\frac{1}{m_\varepsilon+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k_\varepsilon}(m_\varepsilon+t,\;b)\|=$$
$$=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{m_\varepsilon+t}\ln\|X_{\mathbf{R}^k_{m_\varepsilon,\,q_i}}(m_\varepsilon+t,\;b)\|\leqslant\mu_k(b)+\varepsilon.$$

Подведем итог п. 6. Мы доказали, что для всяких $b\in B$, $k\in\{1,\;\ldots,\;n\}$ для всякого $\varepsilon>0$ найдется $m_\varepsilon\in\mathbf{N}$ и найдется $\mathbf{R}^k_\varepsilon\in G_k(\mathbf{R}^n)$, где $\mathbf{R}^n=p^{-1}(b)$), такие, что для всякого $\xi\in\mathbf{R}^k_\varepsilon$ (такого, что $|\xi|=1$), для всякого $t\in\{0\}\bigcup\mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{m_\varepsilon+t}\ln|X(m_\varepsilon+t,\;b)\,\xi|\leqslant\mu_k(b)+\varepsilon.$$

7. Из результата п. 6 вытекает следующее. Для всяких $b\in B$, $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$, для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\mathbf{R}^k_\varepsilon\in G_k(\mathbf{R}^n)$ (где $\mathbf{R}^n=p^{-1}(b)$) такое, что для всякого $\xi\in\mathbf{R}^k_\varepsilon$ (такого, что $|\xi|=1$) выполнено неравенство:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\ln\|X(m,\;b)\,\xi\|\leqslant\mu_k(b)+\varepsilon.$$

Отсюда в силу формулы (8) вытекает следующее утверждение.

Для всяких $b\in B$, $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$, для всякого $\varepsilon>0$ выполнено неравенство: $\lambda_{n-k+1}(b)\leqslant\mu_k(b)+\varepsilon$. Следовательно,

$$\lambda_{n-k+1}(b)\leqslant\mu_k(b)\tag{13}$$

при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\;\ldots,\;n\}$.

Объединением формул (12) и (13) заканчивается доказательство леммы 5.

Т е о р е м а 1. *При всяком* $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$ *функция* $\lambda_k(b):B\to\mathbf{R}$ *есть бэровская функция второго класса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы 1 непосредственно следует из лемм 4 и 5. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *В пространстве* B *найдется всюду плотное множество* C *типа* G_δ, *такое, что при каждом* $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$ *функция* $\lambda_k(b):C\to\mathbf{R}$ *непрерывна (через*

$\lambda_k(b): C \to \mathbf{R}$ обозначаем сужение (ограничение) функции $\lambda_k(b): B \to \mathbf{R}$ на множество $C \subset B$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы 2 непосредственно вытекает из теоремы VI [5, с. 250] (см. изложенное на с. 162—164 той же книги [5]) в силу теоремы 1, доказанной выше. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *В пространстве B найдется всюду плотное множество C типа G_δ, такое, что при каждом $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(b): B \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в каждой точке $b \in C$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде чем доказывать теорему 3, подчеркнем, что в ее формулировке рассматриваются не сужения функций $\lambda_k(b)$ на множество C, а сами функции $\lambda_k(b): B \to \mathbf{R}$, и утверждается, что множество точек полунепрерывности сверху функций $\lambda_k(b): B \to \mathbf{R}$ содержит множество C, причем C — всюду плотное множество типа G_δ в B.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 3. При всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$, при всяком $m \in \mathbf{N}$ функция $\mu_k^{(m)}(b): B \to \mathbf{R}$ — бэровская функция первого класса. Это непосредственно вытекает из леммы 3 и формулы (4). Поэтому (см. [5], с. 240—242, 162—164) при каждом $m \in \mathbf{N}$ и каждом $k \in \{1, \ldots, n\}$ множество C_m^k точек непрерывности функции $\mu_k^{(m)}(b): B \to \mathbf{R}$ есть множество типа G_δ, всюду плотное в B.

Тогда $C \underset{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{\substack{m \in \mathbf{N} \\ k \in \{1, \ldots, n\}}} C_m^k$ — множество типа G_δ, всюду плотное в B (см. [5], с. 163), и каждая из функций $\mu_k^{(m)}(b): B \to \mathbf{R}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$) непрерывна в каждой точке $b \in C$. Так как в силу формулы (6) и леммы 2 функция $\mu_k(b): B \to \mathbf{R}$ (при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$) есть предел монотонно невозрастающей последовательности функций $\mu_k^{(m)}(b): B \to \mathbf{R}$, то в каждой точке $b \in B$, в которой всякая функция $\mu_k^{(m)}(b): B \to \mathbf{R}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$, $m \in \mathbf{N}$) непрерывна, всякая функция $\mu_k(b): B \to \mathbf{R}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) полунепрерывна сверху (см. [5], с. 237—238).

Итак, мы доказали существование в B всюду плотного множества C типа G_δ такого, что при каждом $k \in \{1, \ldots, n\}$ множество точек полунепрерывности сверху функции $\lambda_k(b): B \to \mathbf{R}$ содержит C. Теорема 3 доказана.

Литература

1. Х ь ю з м о л л е р Д. Расслоенные пространства. — М., Мир, 1970.
2. Б у р б а к и Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. — М., Наука, 1975.
3. Л я п у н о в А. М. Собр. соч., т. 2. — М. — Л., 1956.
4. B a i r e R. Lecons sur les functions discontinues. — Gauthier—Villars, Paris, 1905.
5. Х а у с д о р ф Ц. Теория множеств.— М.—Л., ОНТИ, 1937.
6. Д а л е ц к и й Ю. Л., К р е й н М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М., Наука, 1970.
7. С т и н р о д Н. Топология косых произведений. — М., ИЛ, 1953.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
31 марта *1980 г.*