ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре 2001 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2001. Т. 37. № 6).

В.М. Миллионщиков (Москва) "Субстепенной показатель линейной системы" (28 сентября 2001 г.).

Определение (ср. [1, формула (8.7)] и [2, 3]). Субстепенной показатель линейной системы $\dot{x} = A(t)x$ определяется формулой

$$\operatorname{asp}(A) := \sup_{p>1} \limsup_{q\to\infty} q^{-p} \sum_{s=1}^{q-1} \ln \| X_\mu((s+1)^p, s^p) \|,$$

где $X(\theta,\tau)$ - оператор Коши этой системы.

Теорема. *Пусть отображение $A(\cdot,\cdot): \mathbf{R}^+ \times D \to \operatorname{End}\mathbf{C}^n$ непрерывно, при каждом значении первого аргумента аналитично по второму аргументу в области $D \subset \mathbf{C}^m$ и таково, что функция $\sup_{t\in\mathbf{R}^+} \| A(t,\cdot) \|$ локально ограничена в D.*

Тогда в D имеется подмножество B меры нуль такое, что субстепенной показатель системы $\dot{x} = A(t,\mu)x$ (как функция параметра $\mu \in D$) полунепрерывен сверху на $D \setminus B$, а его сужение на $D \setminus B$ непрерывно.

Литература. 1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 2. Изобов Н.А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5-8. 3. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034-2055.

В.М. Миллионщиков (Москва) "Орбитальный итерлогарифмический показатель" (12 октября 2001 г.).

Теорема. *Пусть $x_0(\cdot): V \to W$ - аналитическое отображение эрмитовых комплексных аналитических многообразий и пусть $f(x)$ - аналитическое векторное поле на W. Пусть при всяком $\mu \in V$ решение $x_\mu(t)$ уравнения $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее условию $x(0) = x_0(\mu)$, определено на положительной полупрямой, а функция $\mu \mapsto \sup_{t\in\mathbf{R}^+} \| f_x'(x_\mu(t)) \|$ локально ограничена на V.*

Тогда в V имеется множество B меры нуль такое, что $V \setminus B$ содержится в множестве точек полунепрерывности сверху функции (ср. [1, гл. VI; 2, гл. III, 3; 4])

$$\operatorname{air}_{\mathrm{orb}}(\mu) := \sup_{k\in\mathbf{N}} \limsup_{q\to\infty} (T_k(q))^{-1} \sum_{s=1}^{q-1} \ln \| p_{x_\mu(T_k(s+1))} dX_f(T_k(s+1), T_k(s)) p_{x_\mu(T_k(s))} \|$$

(здесь $T_k(r) := \sum_{s=1}^{r} (\ln^k s) \ln s$, $\ln^k$ - k-я итерация логарифма (в k-ю степень возводится отображение $\ln$, а не его значение), p_x - ортопроектор касательного пространства T_xW, ядро которого - векторное подпространство, порожденное вектором $f(x), dX_f(\theta,\tau)$ - производная отображения, ставящего значению всякого решения уравнения $\dot{x} = f(x)$ при $t = \tau$ значение этого же решения при $t = \theta$), а сужение этой функции на $V \setminus B$ непрерывно.

Литература. 1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., 1959.

2. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 3. Изобов Н.А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5-8. 4. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034-2055.

В.М. Миллионщиков (Москва) "Субстепенной показатель нелинейной системы как функция комплексных параметров" (19 октября 2001 г.).

Теорема. *Пусть V и W - эрмитовы комплексные аналитические многообразия, $f(t,x)$ - векторное поле на W, непрерывное по $(t,x)\in\mathbf{R}^{+}\times W$ и при каждом значении $t\in\mathbf{R}^{+}$ аналитическое по $x\in W$, и пусть $x_0(\cdot):V\to W$ - аналитическое отображение. Пусть при всяком $\mu\in V$ решение $x_\mu(t)$ задачи Коши $\dot{x}=f(t,x),\ x(0)=x_0(\mu)$ определено на $\mathbf{R}^{+}$, а $\sup\limits_{t\in\mathbf{R}^{+}}\| f'_x(t,x_\mu(t))\|$ локально ограничена как функция от $\mu\in V$.*

Тогда V содержит множество B меры нуль такое, что функция (ср. [1-3])

$$\mu\mapsto \operatorname{asp}(\mu):=\sup_{p>1}\lim_{q\to\infty}q^{-p}\sum_{s=1}^{q-1}\ln\| X_\mu((s+1)^p,s^p)\|,$$

где $X_\mu(\theta,\tau)$ - производная в точке $x_\mu(\tau)$ оператора Коши $X(\theta,\tau)$ уравнения $\dot{x}=f(t,x)$, полунепрерывна сверху на $V\setminus B$, а ее сужение на $V\setminus B$ непрерывно.

Литература. 1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 2. Изобов Н.А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5-8. 3. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034-2055.

В.М. Миллионщиков (Москва) "Орбитальный субстепенной показатель" (26 октября 2001 г.).

Теорема. *Пусть $y(\cdot)$ - аналитическое отображение эрмитова комплексного аналитического многообразия V в эрмитово комплексное аналитическое многообразие W, $f(x)$- аналитическое векторное поле на W и пусть при всяком $\mu\in V$ решение $x_\mu(t)$ задачи Коши $\dot{x}=f(x),\ x(0)=y(\mu)$), определено на $\mathbf{R}^{+}$, а функция $\mu\mapsto\sup\limits_{t\in\mathbf{R}^{+}}\| f'_x(x_\mu(t)\|$ локально ограничена на V.*

Тогда функция, определенная формулой (ср. [1, гл. VI; 2, гл. III; 3; 4])

$$\operatorname{asp}_{\mathrm{orb}}(\mu):=\sup_{\sigma>1}\overline{\lim_{q\to\infty}}\,q^{-\sigma}\sum_{s=1}^{q-1}\ln\| p_{x_\mu((s+1)^\sigma)}dX_f((s+1)^\sigma,s^\sigma)p_{x_\mu(s^\sigma)}\|,$$

где $p_x:T_xW\to T_xW$ - ортогональный проектор, ядро которого - минимальное векторное подпространство, содержащее $f(x)$, а $dX_f(\theta,\tau)$ - производная отображения, ставящего значению всякого решения уравнения $\dot{x}=f(x)$ в точке $t=\tau$ значение этого же решения в точке $t=\theta$, полунепрерывна сверху на некотором множестве полной меры в V, а сужение этой функции на некоторое множество полной меры в V непрерывно.

Литература. 1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., 1959. 2. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 3. Изобов Н.А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5-8. 4. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034-2055.

В.М. Миллионщиков (Москва) "Итерлогарифмический показатель нелинейной аналитической системы" (2 ноября 2001 г.).

Теорема. *Пусть $x_0(\cdot):V\to W$- аналитическое отображение эрмитова комплексного аналитического многообразия V в эрмитово комплексное аналитическое многообразие*

W. Пусть $f(t,x)$ - векторное поле на W, непрерывное по $(t,x)\in \mathbf{R}^{+}\times W$ и при каждом неотрицательном t аналитическое по $x\in W$. Пусть при всяком $\mu\in V$ решение $x_{\mu}(t)$ уравнения $\dot{x}=f(t,x)$, удовлетворяющее условию $x(0)=x_{0}(\mu)$, определено на положительной полупрямой, а функция $\mu\mapsto \sup\limits_{t\in\mathbf{R}^{+}}\| f_{x}'(t,x_{\mu}(t)\|$ локально ограничена на V.

Тогда в V имеется множество B меры нуль такое, что $V\setminus B$ содержится в множестве точек полунепрерывности сверху функции (ср. [1-3])

$$ail(\mu):=\sup_{k\in N}\overline{\lim_{q\to\infty}}(T_{k}(q))^{-1}\sum_{s=1}^{q-1}\ln\left\|X_{\mu}(T_{k}(s+1),T_{k}(s))\right\|$$

(здесь $T_{k}(r):=\sum_{s=1}^{r}(\ln^{k}s)\ln s$, $\ln^{k}$ - k-я итерация логарифма (в k-ю степень возводится отображение ln, а не его значение), $X_{\mu}(\theta,\tau)$ - производная в точке $x_{\mu}(\tau)$ оператора Коши $X(\theta,\tau)$ уравнения $\dot{x}=f(t,x)$), а сужение этой функции на $V\setminus B$ непрерывно.

Литература. 1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 2. Изобов Н.А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5-8. 3. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034-2055.

В.М. Миллионщиков (Москва) "Орбитальный показатель Изобова как функция комплексных параметров" (16 ноября 2001 г.).

Теорема. *Пусть $z(\cdot):V\to W$ - аналитическое отображение эрмитовых комплексных аналитических многообразий, $f(x)$ - аналитическое векторное поле на W, при всяком $\mu\in V$ решение $x_{\mu}(t)$ задачи Коши $\dot{x}=f(x)$, $x(0)=z(\mu)$ определено на R^{+}, а функция $\mu\mapsto\sup\limits_{t\in R^{+}}\left\|f_{x}'(x_{\mu}(t))\right\|$ локально ограничена на V.*

Тогда в V найдется подмножество G полной меры, содержащееся в множестве точек полунепрерывности сверху орбитального показателя Изобова, определяемого формулой (ср. [1, гл. VI; 2; 3])

$$\nabla_{orb}(\mu):=\sup_{\theta>1}\overline{\lim_{q\to\infty}}\,\theta^{-q}\sum_{s=1}^{q-1}\ln\left\|p_{x_{\mu}(\theta^{s+1})}dX_{f}(\theta^{s+1},\theta^{s})p_{x_{\mu}(\theta^{s})}\right\|$$

(здесь p_{x} - ортогональный проектор касательного пространства $T_{x}W$, ядро которого - минимальное векторное подпространство, содержащее $f(x)$, а $dX_{f}(\theta,\tau)$ - производная отображения, ставящего значению всякого решения уравнения $\dot{x}=f(x)$ при $t=\tau$ значение того же решения при $t=\theta$), и такое, что сужение функции $\nabla_{orb}(\cdot)$ на G непрерывно.

Литература. 1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., 1959. 2. Изобов Н.А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5-8. 3. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034-2055.

В.М. Миллионщиков (Москва) "О верхнем экспоненциальном показателе Изобова" (23 ноября 2001 г.).

Теорема. *Пусть отображение $A(\cdot,\cdot):R^{+}\times D\to End\,C^{n}$ непрерывно и при каждом значении первого аргумента аналитично по второму аргументу в области $D\subset C^{m}$. Пусть функция $\sup\limits_{t\in R^{+}}\left\|A(t,\cdot)\right\|$ локально ограничена в D.*

Тогда в D найдется подмножество B меры нуль такое, что множество точек полунепрерывности сверху функции $\nabla(\mu):D\to R$, где $\nabla(\mu)$ - верхний экспоненциальный *показатель Изобова (см. [1, 2]) системы* $\dot{x} = A(t,\mu)x$, *содержит* $D \setminus B$, *а сужение этой функции на* $D \setminus B$ *непрерывно.*

Литература. 1. Изобов Н.А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5-8. 2. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034-2055.

В.М. Миллионщиков (Москва) "Показатель Изобова как функция комплексных параметров" (30 ноября 2001 г.).

Теорема. *Пусть* $x_0(\cdot): V \to W$ *- аналитическое отображение эрмитовых комплексных аналитических многообразий.*

Пусть при всяком $\mu \in V$ *решение* $x_\mu(t)$ *задачи Коши* $\dot{x} = f(t,x)$, $x(0) = x_0(\mu)$ *определено на* R^+, *векторное поле* $f(\cdot,\cdot): R^+ \times W \to TW$ *непрерывно и при каждом значении первого аргумента аполитично по второму аргументу, а функция* $\mu \mapsto \sup\limits_{t \in R^+} \| f_x'(t, x_\mu(t)) \|$ *локально ограничена на V.*

Тогда множество точек полунепрерывности сверху показателя Изобова $\nabla(\mu)$ *(см. [1, 2]) уравнения в вариациях уравнения* $\dot{x} = f(t,x)$ *вдоль решения* $x_\mu(t)$ *имеет полную меру в V и для некоторого множества B меры нуль в V сужение функции* $\mu \mapsto \nabla(\mu)$ *на* $V \setminus B$ *непрерывно.*

Литература. 1. Изобов Н.А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5-8. 2. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034-2055.