УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

ФОРМУЛА ДЛЯ ЭНТРОПИИ ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Формула, доказанная в предлагаемой заметке, в весьма частном, но интересном случае была доказана Я. Г. Синаем (для динамических систем с «трансверсальными слоениями»); правда, в [3] на самом деле доказана для таких систем другая формула, но можно доказать, что она эквивалентна (в указанном частном случае) формуле, доказываемой ниже.

§ 2. Обозначения. $\mathbf{V}^n$ — замкнутое n-мерное дифференцируемое многообразие (класса C^2); $\mathbf{f}:\mathbf{V}^n\to\mathbf{V}^n$ — диффеоморфизм класса C^2, $\mathbf{f}^t\mathbf{x}$ ($t\in\mathbf{Z}$, $\mathbf{x}\in\mathbf{V}^n$) — индуцированная им гладкая динамическая система на $\mathbf{V}^n$ предполагается, что у нее имеется нормированная инвариантная мера m, индуцированная некоторой римановой метрикой $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ на $\mathbf{V}^n$;

$C^1(\mathbf{V}^n,m,\mathbf{Z})$ — пространство таких диффеоморфизмов с топологией, индуцированной равномерной топологией в пространстве их струй первого порядка; $\lambda_1(\mathbf{f},\mathbf{x})\geqslant\lambda_2(\mathbf{f},\mathbf{x})\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(\mathbf{f},\mathbf{x})$ — характеристические показатели системы в вариациях динамической системы $\mathbf{f}^t\mathbf{x}$ вдоль траектории $\mathbf{f}^t\mathbf{x}$; через $\Sigma_+\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})$ обозначаем $\sum\limits_{\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})\ge 0}\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})$; через $H(\mathbf{f})$ обозначаем энтропию системы $\mathbf{f}^t\mathbf{x}$.

§3. Теорема 1

$$H(\mathbf{f})=\int\limits_{\mathbf{V}^n}\Sigma_+\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})\,m(dx). \qquad (1)$$

Доказательство. 1. Пусть дано $\varepsilon>0$ (считаем для удобства, что $s_\varepsilon=\varepsilon^{-1}n\ln 2\in\mathbf{N}$). Возьмем $m\in\mathbf{N}$, кратное s_ε^2 (тогда $\varepsilon m\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\infty$), такое, что для каждого $\mathbf{x}\in\mathbf{M}_\varepsilon$ $(m(\mathbf{M}_\varepsilon)>1-\varepsilon)$ найдутся решения $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ системы в вариациях вдоль траектории $\mathbf{f}^t\mathbf{x}$, для которых:

а) $\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{1}{t}\ln\|x_i(t)\|=\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})$;

б) при $t\geqslant m$ $\left|\dfrac{1}{t}\ln\dfrac{\|x_i(\tau+t)\|}{\|x_i(\tau)\|}-\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})\right|<\dfrac{\varepsilon}{4n}$ для $\tau=0$ и для $<\varepsilon$ всех τ, не принадлежащих множеству относительной меры на $\mathbf{Z}$.

(Это возможно в силу теоремы 4 из [4] и § 1 из [5]).

2. Фиксируем конечный атлас на $\mathbf{V}^n:\{U_i,\varphi_i,\mathbf{R}^n\}_{i=1,\ldots,p}$ $(\varphi_i:U_i\to\mathbf{R}^n)$ такой, что $\|\varphi_i\varphi_j^{-1}-I\|_{C^2}<\varepsilon$ при всяких i, j, при которых $U_i\cap U_j\ne\varnothing$. Возьмем конечное измеримое разбиение $\xi:\mathbf{V}^n=\bigcup\limits_{i=1}^{q}\Xi_i$ со свойствами: а) большинство его элементов — кубы, отношения длин ребер которых $\le$ константы, не зависящей от ε (в некоторых картах фиксированного выше атласа); слово «большинство» здесь и далее означает: мера (относительная мера) объединения остальных $<\delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0$; б) $d_\xi\underset{\text{def}}{=}\max\limits_i\operatorname{diam}\Xi_i<\dfrac{1}{4}\varepsilon^2\left[\max\left(\|\mathbf{f}^m\|_{C^2},\|\mathbf{f}^{-m}\|_{C^2}\right)\right]^{-1}$; в) найдется C, не зависящее от ε, такое,

что (для всякого $\varepsilon>0$) найдется $\gamma_\varepsilon>0$ такое, что число элементов ξ, пересекающихся с γ_ε-окрестностью любой точки, $\leqslant C$.

3. Фиксируем конечные измеримые разбиения $\eta_0=\xi\leqslant\eta_1\leqslant\ldots\leqslant\eta_k\leqslant\ldots$ многообразия $\mathbf{V}^n$ такие, что: а) η_k подразбивает каждый «куб» разбиения η_{k-1} на $\exp(\varepsilon m)$ равных кубов (в той же карте);
б) $m_k\geqslant C_\varepsilon\exp\left(-\delta(\varepsilon)k\right)$, где m_k — минимум мер элементов разбиения η_k ($\delta(\varepsilon)$ здесь и всюду далее — стандартное обозначение для разных функций от ε, которые $\underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$); в) $d_{\eta_k}\leqslant C_\varepsilon\exp\left(-\varepsilon mk\right)$ $\left(k\in\mathbf{N}\right)$;
г) $d_{\eta_k}\exp\left(\left\|\mathbf{f}^{-1}\right\|_{C^1}^m\right)$ — окрестность каждой точки пересекается с $\leqslant C^m$ (C не зависит от ε и $k=0,1,\ldots$) элементами разбиения η_k $\left(k=0,1,\ldots\right)$.

Из б) следует $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\dfrac{1}{km}H\left(\eta_k\right)<\delta(\varepsilon)$. Отсюда для всяких конечных измеримых разбиений ξ_k в силу формул

$$H\left(\xi_k|\eta_k\right)\leqslant H\left(\xi_k\right)\leqslant H\left(\xi_k\vee\eta_k\right)=H\left(\xi_k|\eta_k\right)+H\left(\eta_k\right)$$

следует

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{1}{km}H\left(\xi_k\right)-\frac{1}{km}H\left(\xi_k|\eta_k\right)\right|<\delta(\varepsilon).$$

4. Если $\mathbf{x}\in\mathbf{M}_\varepsilon$, $\mathbf{f}^{im}\mathbf{x}\underset{\eta_i}{\sim}\mathbf{f}^{im}\mathbf{y}$ $\left(i=0,1,\ldots,k\right)$ ($u\underset{\eta_i}{\sim}v$ означает, что u и v содержатся в одном элементе разбиения η_i), то в силу а) и б) из п. 1, а),

в) п. 3 имеем (см. [6], стр. 395—399): существуют отображения $\Phi_1\in\operatorname{Lip}\left(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n\right)$ ($\Phi_1^{-1}\in\operatorname{Lip}\left(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n\right)$) и $\Phi_2\in\operatorname{Lip}\left(V,W\right)$ ($W\subset\mathbf{R}^n$; $\Phi_2^{-1}\in\operatorname{Lip}\left(V,W\right)$) ($V$ — множество тех $\varphi_{k(0)}\left(\mathbf{y}\right)$, для которых $\mathbf{f}^{im}\mathbf{y}\underset{\eta_i}{\sim}\mathbf{f}^{im}\mathbf{x}$ $\left(i=0,1,\ldots,k\right)$; $\left(U_{k(i)},\varphi_{k(i)},\mathbf{R}^n\right)$ — карта (см. п. 2)), для которой элемент разбиения, содержащий $\mathbf{f}^{im}\mathbf{x}$ и $\mathbf{f}^{im}\mathbf{y}$, $\subset U_{k(i)}$), для которых выполняются неравенства $\left(i=0,1,\ldots,k\right)$:

$$\left\|\left.\frac{d\varphi_{k(i)}\mathbf{f}^{im}\mathbf{x}}{d\varphi_{k(0)}\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}}v-\left.\frac{d\varphi_{k(i)}\mathbf{f}^{im}\mathbf{x}}{d\varphi_{k(0)}\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}}\Phi_1 v\right\|\leqslant\left\|\left.\frac{d\varphi_{k(i)}\mathbf{f}^{im}\mathbf{x}}{d\varphi_{k(0)}\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}}\Phi_1 v\right\|\cdot\varepsilon\exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon m\right),$$

$$\left\|\varphi_{k(i)}\mathbf{f}^{im}\mathbf{y}-\varphi_{k(i)}\mathbf{f}^{im}\mathbf{x}-\left.\frac{d\varphi_{k(i)}\mathbf{f}^{im}\mathbf{x}}{d\varphi_{k(0)}\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}}\Phi_2\left(\varphi_{k(0)}\mathbf{y}-\varphi_{k(0)}\mathbf{x}\right)\right\|\leqslant \tag{2}$$

$$\leqslant\left\|\left.\frac{d\varphi_{k(i)}\mathbf{f}^{im}\mathbf{x}}{d\varphi_{k(0)}\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}}\Phi_2\left(\varphi_{k(0)}\mathbf{y}-\varphi_{k(0)}\mathbf{x}\right)\right\|\cdot\varepsilon\exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon m\right).$$

Введем обозначение $\mathbf{E}_\varepsilon=\mathbf{E}\left(\mathbf{x}:\min\limits_{i\in E\left(i:\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})>0\right)}\lambda_i\left(\mathbf{f},\mathbf{x}\right)>3\varepsilon\right)$. Очевидно (мы используем это в п. 8)) $m\left(\mathbf{E}_\varepsilon\cup\mathbf{F}^0\right)>1-\delta(\varepsilon)$, где $\mathbf{F}^0=\mathbf{E}\left(\mathbf{x}:\lambda_i\left(\mathbf{f},\mathbf{x}\right)-0\right)$. Из а) и б) (см. п. 1) и свойств ξ в силу (2) следует, что большинство (большинство равномерно по $k\in\mathbf{N}$) элементов разбиения $\mathop{\vee}\limits_{i=0}^{k}\mathbf{f}^{im}\xi\vee\eta_k$ пересекающихся с множеством $\mathbf{E}_\varepsilon$, таковы, что каждый из них содержится в объединении $\leq \mathrm{const}\cdot\exp\big(\delta(\varepsilon)km\big)$ элементов разбиения $\overset{k}{\underset{i=0}{\vee}}\chi_i$, где $\chi_0=\xi$, $\chi_i=\mathbf{f}^m\chi_{i-1}\vee\eta_i \quad (i\in\mathbf{N})$, а большинство элементов разбиения $\overset{k}{\underset{i=0}{\vee}}\chi_i\geq\chi_k\vee\chi_{k-1}$, пересекающихся с множеством $\mathbf{E}_\varepsilon$ таково, что в каждом из них найдется точка $\mathbf{x}\in\mathbf{f}^{km}\mathbf{M}_\varepsilon$ такая, что этот элемент имеет меру $\leqslant\mathrm{const}\cdot\exp\Big[\big(-\Sigma_+\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})+\delta(\varepsilon)\big)km\Big]$.

5. Из результатов п. 3, 4 в силу г), из п. 2 и теоремы Лебега о почленном интегрировании ограниченных последовательностей и произвольности $\varepsilon>0$ непосредственно следует

$$H(\mathbf{f},\mathbf{x})\geqslant\int\limits_{\mathbf{V}}\Sigma_+\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})m(d\mathbf{x}). \tag{3}$$

6. Как известно, в определении $H(\mathbf{f})\underset{\mathrm{def}}{=}\sup\limits_{\xi}\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}H\left(\overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}}\mathbf{f}^i\xi\right)$ можно брать sup не по всем конечным измеримым разбиениям ξ, а по конечным измеримым разбиениям ξ, удовлетворяющим условию а) из п. 2. Напомним один из вариантов доказательства этого факта. Берем любое $\varepsilon>0$. Пусть конечное измеримое разбиение ξ_ε таково, что $h(\xi_\varepsilon,\mathbf{f})\underset{\mathrm{def}}{=}\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}H\left(\overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}}\mathbf{f}^i\xi_\varepsilon\right)>H(\mathbf{f})-\varepsilon$. Берем такое конечное измеримое разбиение ξ'_ε, удовлетворяющее условию а) из п. 2, что: 1) большинство (т. е. сумма мер $>1-\delta_1(\varepsilon)$) его элементов таково, что в каждом из них большинство (т. е. относительная мера $>1-\delta_1(\varepsilon)$) точек принадлежит одному элементу разбиения ξ_ε; 2) $2\delta_1(\varepsilon)\ln p<\varepsilon$, где p — число элементов ξ_ε. Обозначив $\zeta_0=\overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}}\mathbf{f}^i\xi'_\varepsilon$; $\zeta_i=\mathbf{f}^i\xi_\varepsilon\vee\zeta_{i-1} \quad (i\in\mathbf{N})$, имеем

$$H\left(\overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}}\mathbf{f}^i(\xi'_\varepsilon\vee\xi_\varepsilon)\right)-H\left(\overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}}\mathbf{f}^i\xi'_\varepsilon\right)=\sum_{i=0}^{k-1}H\left(\mathbf{f}^i\xi_\varepsilon\middle|\zeta_i\right)\leqslant k\delta(\varepsilon)$$

в силу свойств ξ'_ε.

7. Теперь снова воспользуемся рассуждениями п. 1—4, подчинив (это не обязательно, но так удобнее) разбиение ξ (см. п. 2) дополнительному требованию. Возьмем конечное измеримое разбиение ζ, обладающее свойством а) из п. 2, для которого $\frac{1}{m}h(\zeta,\mathbf{f}^m)>H(\mathbf{f})-\varepsilon$. Конечное измеримое разбиение $\xi\geqslant\zeta$ выберем так, чтобы оно обладало свойствами а)—в) из п. 2 и следующим свойством: г) большинство его элементов таково, что для каждого из них Ξ_j найдется карта (см. п. 2), такая, что Ξ_j — куб в ней, причем для всякого $\mathbf{x}\in\mathbf{M}_\varepsilon\cap\Xi_j$ плоскость L_x, порожденная всеми теми $x_i(0)$ (см. п. 1), для которых $\lambda_i(\mathbf{f},\mathbf{x})\geqslant 0$, содержится в ε-окрестности (в грассмановом многообразии) каждой (т. е. взятой в каждой точке), касательной плоскости к одной из граней «куба» (пользуемся римановой связностью, индуцированной римановой метрикой $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$). Разбиение ξ с этими свойствами, очевидно, существует (мы используем следующее утверждение, содержащееся в теореме 4 в [4] (см. также § 1 в [5]): L_x непрерывно по x на множестве меры $1-\delta(\varepsilon)$).

8. В силу свойств а) и б) п. 1, а)—г) п. 3, г) п. 7 и неравенств (2) имеем: большинство пересечений элементов разбиения $\chi_k\vee\chi_{k-1}$ с множеством $\Big[\big(\mathbf{E}_\varepsilon\cup\mathbf{F}^0\big)\cap\mathbf{f}^{km}\mathbf{M}_\varepsilon\Big]\backslash W_\varepsilon$, где W_ε — объединение окрестностей $W_{\varepsilon i}$ границ элементов разбиений

$\mathbf{f}^{im}\xi\left(m\left(W_{\varepsilon i}\right)\leqslant\delta\left(\varepsilon\right)\exp\left(-i\varepsilon m\right)\right)$ таково, что большинство точек в каждом из них принадлежит объединению $\leqslant\mathrm{const}\cdot\exp\left(\delta\left(\varepsilon\right)km\right)$ элементов разбиения $\overset{k}{\underset{i=0}{\vee}}\chi_i$, и каждый из большинства элементов разбиения $\chi_k\vee\chi_{k-1}$ содержит некоторую точку $\mathbf{x}\in\mathbf{f}^{km}\mathbf{M}_\varepsilon$ и содержится в объединении $\leqslant\mathrm{const}\cdot\exp\left(\delta\left(\varepsilon\right)km\right)$ элементов разбиения $\chi_k\vee\chi_{k-1}$, имеющем меру $\geqslant\mathrm{const}\cdot\exp\left[\left(-\Sigma_+\lambda_i\left(\mathbf{f},\mathbf{x}\right)-\delta\left(\varepsilon\right)\right)km\right]$. Применив рассуждения конца п. 6, получаем в силу теоремы Лебега о почленном интегрировании ограниченных последовательностей и произвольности $\varepsilon>0$.

$$H\left(\mathbf{f}\right)\leqslant\int\limits_{\mathbf{V}}\Sigma_+\lambda_i\left(\mathbf{f},\mathbf{x}\right)m\left(d\mathbf{x}\right).$$

Объединив это с (3), получаем (1). Теорема доказана*).

§ 4. Т е о р е м а 2. *Функция* $H\left(\mathbf{f}\right)$ *полунепрерывна сверху на* $C^1\left(\mathbf{V}^n,m,\mathbf{Z}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (Обозначения: $\mathbf{F}_s\bar{\mathbf{x}}=\left.\frac{d\mathbf{f}^s}{d\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$; $\mathbf{G}_s\bar{\mathbf{x}}=\left.\frac{d\mathbf{g}^s}{d\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$; $d_1\left(X\right)\geqslant\ldots\geqslant d_n\left(X\right)$ — спектр оператора $\left(X^*X\right)^{1/2}\geqslant0$; далее сопряжение берется относительно евклидовой структуры в касательных пространствах, индуцированной римановой метрикой $\rho\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)$; $k\left(\mathbf{g},\mathbf{x}\right)$ — наибольшее из i, для которых $\lambda_i\left(\mathbf{g},\mathbf{x}\right)\geqslant0$).

Пусть дано $\varepsilon>0$. Возьмем $T_\varepsilon\in\mathbf{N}$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbf{V}^n}\left|\frac{1}{T_\varepsilon}\ln d_i\left(\mathbf{F}_{T_\varepsilon}\mathbf{x}\right)-\lambda_i\left(\mathbf{f},\mathbf{x}\right)\right|m\left(d\mathbf{x}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

(такое T_ε существует в силу теоремы 4 из [4] и § 1 из [5] и ограниченности подынтегральной функции). Возьмем $\delta>0$ такое, что из $\left\|\mathbf{g}-\mathbf{f}\right\|_{C^1}<\delta$ следует

$$\sup_{x\in\mathbf{V}^n}\sum_{i=1}^{n}\left|\ln d_i\left(\mathbf{G}_{T_\varepsilon}\mathbf{x}\right)-\ln d_i\left(\mathbf{F}_{T_\varepsilon}\mathbf{x}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу теоремы 4 из [4] (и § 1 из [5]), неравенства

$$\prod_{i=1}^{k}d_i\left(X_1X_2\right)\leqslant\prod_{i=1}^{k}d_i\left(X_1\right)d_i\left(X_2\right),$$

теоремы Лебега о почленном интегрировании ограниченной последовательности, инвариантности меры m и очевидного свойства $k\left(\mathbf{g},\mathbf{g}\mathbf{x}\right)=k\left(\mathbf{g},\mathbf{x}\right)$, имеем: если $\left\|\mathbf{g}-\mathbf{f}\right\|_{C^1}<\delta$, то

$$\int\limits_{\mathbf{V}^n}\Sigma_+\lambda_i\left(\mathbf{g},\mathbf{x}\right)m\left(d\mathbf{x}\right)=\lim_{s\to\infty}\int\limits_{\mathbf{V}^n}\frac{1}{sT_\varepsilon}\sum_{i=1}^{k\left(\mathbf{g},\mathbf{x}\right)}\ln d_i\left(\mathbf{G}_{sT_\varepsilon}\mathbf{x}\right)m\left(d\mathbf{x}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{s\to\infty}\int\limits_{\mathbf{V}^n}\frac{1}{sT_\varepsilon}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{k\left(\mathbf{g},\mathbf{x}\right)}\ln d_i\left(\mathbf{G}_{T_\varepsilon}\mathbf{g}^{(i-1)T_\varepsilon}\mathbf{x}\right)m\left(d\mathbf{x}\right)=\int\limits_{\mathbf{V}^n}\frac{1}{T_\varepsilon}\sum_{i=1}^{k\left(\mathbf{g},\mathbf{x}\right)}\ln d_i\left(\mathbf{G}_{T_\varepsilon}\mathbf{x}\right)m\left(d\mathbf{x}\right)<$$
$$<\int\limits_{\mathbf{V}^n}\frac{1}{T_\varepsilon}\sum_{i=1}^{k\left(\mathbf{g},\mathbf{x}\right)}\lambda_i\left(\mathbf{f},\mathbf{x}\right)m\left(d\mathbf{x}\right)+\varepsilon\leqslant\int\limits_{\mathbf{V}^n}\Sigma_+\lambda_i\left(\mathbf{f},\mathbf{x}\right)m\left(d\mathbf{x}\right)+\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

*) П р и м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е. Мне сообщили, что формулой (1) занимался Я. Песин, работа которого мне пока не известна.

Литература

1. Колмогорова. Н. ДАН СССР, 119, № 5, 1958.
2. Халмош П. Р. Лекции по эргодической теории. М., ИЛ, 1959.
3. Синай Я. Г. Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 1, 1966.
4. Millionscikov V. M. Actes, Congres Intern. Math., 1970. Paris, 1971, t. 2, p. 915—919 (Русский текст в кн.: «Международный конгресс математиков в Ницце. 1970. Доклады советских математиков». М., «Наука», 1972, стр. 207—211).
5. Миллионщиков В. М. Матем. заметки, 5, № 1, 1969, стр. 49—54.
6. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
10 сентября 1975 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова