УДК 517.936

ОБ ОДНОМ ПЛОТНОМ МНОЖЕСТВЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

Предлагаемая заметка содержит нелинейный аналог результата заметки [3].

Обозначения. V^n — n-мерное дифференцируемое (класса C^r) замкнутое многообразие; m —нормированная мера, индуцированная некоторой гладкой римановой метрикой на $V^n, f(x): V^n \to TV^n (\pi f(x) = x)$ —гладкое (класса C^1) векторное поле такое, что мера m инвариантна относительно индуцированной им гладкой динамической системы $f^t x (t \in R)$ и $m(P) = 0$ где P — множество всех неподвижных и периодических точек системы $f^t x$; через $C^1(V^n, m, R)$ обозначаем множество таких векторных полей, наделенное топологией, индуцированной равномерной топологией в множестве их струй порядка 1. $fx: V^n \to V^n$ — диффеоморфизм класса C^1, сохраняющий меру m и такой, что $m(P) = 0$, где P — множество всех неподвижных и периодических точек диффеоморфизма $fx; f^t x (t \in Z)$ — порожденная им динамическая система; через $C^1(V^n, m, Z)$ обозначаем множество таких диффеоморфизмов, наделенное топологией, индуцированной равномерной топологией в множестве их струй порядка 1; $\lambda_1(f^t x) \geqslant ... \geqslant \lambda_n(f^t x)$ – характеристические показатели системы в вариациях динамической системы $f^t x$ вдоль траектории $f^t x$.

Определение 1. Через $M(V^n, m, R)$ обозначим подпространство пространства $C^1(V^n, m, R)$. состоящее из тех векторных полей $f(x)$ класса C^r, для которых $\lambda_1(f^t x) > ... > \lambda_n(f^t x)$ *) для почти всех x (в смысле меры m).

Определение 2. Через $M(V^n, m, Z)$ обозначим подпространство пространства $C^1(V^n, m, Z)$, состоящее из тех диффеоморфизмов fx класса C^r для которых:

а) $\lambda_i(f^t x) \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$; б) $\lambda_i(f^t x) > ... > \lambda_n(f^t x)$

для почти всех x (в смысле меры m).

Теоремы. При всяком $r \in N$ справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. $\overline{M(V^n, m, R)} = C^1(V^n, m, R)$ *(при $n \geqslant 3$).*

Теорема 2. $\overline{M(V^n, m, Z)} = C^1(V^n, m, Z)$ *(при $n \geqslant 2$).*

Доказательство теоремы 2. Укажем на те изменения, которые надо проделать в доказательстве теоремы в [3]**), что5ы превратить его в доказательство теоремы 2.

I. В утверждении п. 2: а) условие заменить следующим: условное распределение всякого $y_{ij,k}(\omega)[Y_k = \{y_{ij,k}\}_{i,j=1,...,n}]$ при условии, состоящем в фиксации значений всех $y_{i'j',k'}(\omega)$ $((i', j', k') \neq (i, j, k))$ удовлетворяет условиям *b) –ɀ)* п. 2; б) заключение усилить: дополнительно утверждается, что $\mu(\min_m \sum_{i \neq m} \ln d_i (Y_1 Y_2 ... Y_k) > R) > 1 - \varepsilon)$ (легко проверяется, что утверждение п. 2 с такими изменениями также верно).

---

*) Так как для системы $f^t x (t \in R)$ для всякого $x \in V^n$ некоторое $\lambda_i(f^t x) = 0$, то отсюда следует, что для почти всякого $x \in V^n$ все $\lambda_R(f^t x)$ кроме одного, отличны от нуля.

**) Исправления к заметке [3]: в п. 5 на стр. 756: а) вместо $-R/2$ должно быть $-R/4$, а вместо $R/2$ должно быть $3R/4$; б) в 5-й строке п. 5 вместо $< \varepsilon$ должно быть $> 1 - \varepsilon$; в) в определении $\xi_i(\omega)$ вместо sup должно быть inf

II. Пункт 3 заменить следующим пунктом: 3. Пусть $fx \in C^1(V^n, m, Z)$. Выберем (нетрудно видеть, что такой выбор возможен) семейство разбиений $S_\sigma(\mathrm{mod}\,0)$ многообразия V^n на открытые множества

$$V^n = \bigcup_{q=1}^{\infty} M_{q\sigma}(\mathrm{mod}\,0); \quad m\left(\bigcup_{q=1}^{\infty} Fr(M_{q\sigma})\right) = 0$$

зависящих от $\sigma>0$ и семейство измеримых по параметру $\omega \in \Omega$ (где $\{\Omega, \mathfrak{A}, \eta\}$ — некоторое вероятностное пространство) диффеоморфизмов $g_\sigma(\omega)x$ (класса C^r) $V^n \to V^n$, для которых мера m инвариантна и которые удовлетворяют следующим условиям:

1) для всяких $q, \sigma M_{a\sigma} \cap g_\sigma^k(\omega) M_{a\sigma} = \varnothing$ при $k = \pm 1, \pm 2, ..., \pm N_{\sigma_\infty}$ (все неподвижные и периодические с периодами $\leqslant N_\sigma$ точки систем $g_\sigma^k(\omega)x$ принадлежат $\bigcup_{q=1}^{\infty} Fr(M_{q\sigma})$) (здесь N_σ определяется так же, как в условии 5) пункта 3 в [3]);

2) найдется атлас многообразия $V^n : \{U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \to R^n\}$ (в R^n фиксирован базис) такой, что для почти всякого (в смысле меры *m.)* $x \in V^n$ найдутся $\alpha = \alpha(x, \omega)$ и $\beta = \beta(x, \omega)$ и найдутся числовые функции $b_\sigma(\omega; x; \alpha, \beta)$, измеримые по ω и гладкие по x, для которых*) случайные величины

$$b_{\sigma,ij}(x, \omega) = b_\sigma(\omega; x; \alpha, \beta)[g_{\sigma,ij}(\omega; x; \alpha, \beta) - h_{ij}(x; \alpha, \beta)]$$

таковы, что найдется $C = const>0$, для которой при всяких $(i, j, k)(i, j = 1, 2, ..., n; k = 0, \pm 1, ..., \pm N_\sigma)$, при всяком σ, при всяком условии, состоящем в фиксации точек $g_\sigma^k(\omega)x$ при всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm N_\sigma$ (если $g_\sigma^k(\omega)x \notin \bigcup_{q=1}^{\infty} Fr(M_{q\sigma})$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm N_\sigma$) и (одновременно) в фиксации значений всех

$$b_{\sigma,i',j'}(g_\sigma^{k'}(\omega)x, \omega) \quad (i', j', k') \neq (i, j, k),$$

$$a)\ \sup_{V^n x\Omega} |b_{\sigma,ij}(g_\sigma^k(\omega)x, \omega)| < C \bullet \sigma; ; \quad b) |E_c(b_{\sigma,ij}(g_\sigma^k(x, \omega))| < C \bullet \sigma,$$

где через E_c обозначено условное математическое ожидание;

c) плотность условного распределения случайной величины $b_{\sigma,ij}(g_\sigma^k(\omega)x, \omega)$ не превосходит $C \bullet \sigma^{-1}$.

III. В пп. 4, 5 сделать очевидные переобозначения: p заменить на $x; \dot{y} = (A(f^t p) + B_\sigma(f^t p, \omega))y$ заменить на систему в вариациях системы $g_\sigma^k(\omega)x$ вдоль траектории $g_\sigma^k(\omega)x; B_\sigma(p, \omega)$ заменить на $\{b_{\sigma,ij}(x, \omega)\}_{i,j=1,...,n}; \sup_M \|A(p)\|$ заменить на $\|f\|_{C^1}; P_\sigma$ заменить на $\bigcup_{q=1}^{\infty} Fr(M_{q\sigma})$

Объединение этой и предыдущей [4] работ непосредственно дает следующую теорему (при $t \in R$, $n \geqslant 3$ формулировка аналогична):

Теорема 3. *При* $n \geqslant 2$ *для всякого* $fx \in C^1(V^n, m, Z)$ *для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется* $gx \in M(V^n, m, Z)$, *для которого* $\|g - f\|_{C^1} < \varepsilon, |\int_{Y^n} \lambda_i(g^t x) m(dx) - \int_{V^n} \lambda_i(f^t x) m(dx)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, ..., n)$

О б о з н а ч е н и е. Пусть дан атлас $\{U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \to R^n\}$ ($B \bullet R^n$ фиксирован базис) многообразия V^n. Через $\{h_{ij}(x; \alpha, \beta)\}_{i,j=1,\dots,n}$ обозначаем матрицу, которой задается в картах, $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ $\{U_\beta, \varphi_\beta\}(x \in U_\alpha, hx \in U_\beta)$ производная диффеоморфизма h в точке x.

Литература

1. M i l l i o n s c i k o v V. M. Actes, Congres Intern. Math., 1970. Paris, 1971, t. 2, p. 915—919 (русский текст в книге: «Международный конгресс математиков в Ницце. 1970. Доклады советских математиков». М., «Наука», 1972, стр. 207—211).
2. М и л л и о н щ и к о в В. М. Матем. заметки, 5, № 1, 1969, 49—54.
3. М и л л и о н щ и к о в В. М. Дифференц. уравнения, 11, № 4, 1975.
4. М и л л и о н щ и к о в В. М. Дифференц. уравнения, 11, № 11, 1975.

Поступила в редакцию
25 июля 1975 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова