УДК 517.926.4

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

Предлагаемая заметка содержит нелинейный аналог результата заметки [4].

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

V^n — n-мерное дифференцируемое (класса C^1), замкнутое многообразие; m — нормированная на V^n; $f(x): V^n \to TV^n (\pi f(x) = x)$— дифференцируемое (класса C^1) векторное поле на V^n, индуцирующее гладкую эргодическую (относительно инвариантной меры m) динамическую систему $f^t x$ на V^n; $p = A(x_0, t)p$ $(p \in R^n)$; в R^n фиксирована евклидова структура) — система в вариациях динамической системы $f^t x$ вдоль траектории $f^t x_0$, записанная, как в [2] (для чего временно фиксируется некоторая гладкая риманова метрика на v^n; результаты не зависят от ее выбора); $\lambda_1(f) \geqslant ... \geqslant \lambda_n(f)$ — характеристические показатели системы в вариациях вдоль траектории $f^t x$ для почти всякого x; $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — вероятностное пространство; $S_\sigma(\sigma = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ — конечные разбиения $(\mathrm{mod}\, 0)$ многообразия v^n

$$v^n = \bigcup_{q=1}^{q(\sigma)} M_{q,\sigma} (\mathrm{mod}\, 0)$$

причем для всякого $\gamma > 0$

$$\sigma e^{\gamma k(\sigma)} \xrightarrow[\sigma \to 0]{} \infty, \tag{*}$$

где $k(\sigma)$ таково, что из $M_{q,\sigma} \not\subset U_{\gamma, k(\sigma)}$ следует $M_{q,\sigma} \cap g_\sigma^t(\omega)\, M_{q,\sigma} = \varnothing$ при $1 \leqslant t \leqslant k(\sigma)$ причем $U_{\gamma,0}$ определяется как в п. А [4, стр. 581] с переобозначениями: $p \longleftrightarrow x$, (1) из [4] — система в вариациях системы $f^t x$ вдоль траектории $f^t x$; $g_\sigma(x, \omega): V^n \times \Omega \to TV^n$ $\pi q_\sigma(x, \omega) = x$ — семейство случайных векторных полей (класса C^1 по x и измеримых по ω); соответствующие динамические системы обозначаем $g_\sigma^t(\omega)x$; требуется, чтобы мера m была для каждой системы $g_\sigma^t(\omega)x$ инвариантной и транзитивной; систему в вариациях системы $g_\sigma^t(\omega)x$ вдоль траектории $g_\sigma^t(\omega)x$, записанную, как в [2], обозначим

$$\dot{p} = \left[A(x_k, t) + B_\sigma(x, t, \omega)\right] p \quad (k \leqslant t \cdot T_\varepsilon^{-1} < k + 1; k \in Z), \tag{1}$$

где $x_k = g_\sigma^{kT} \varepsilon(\omega) x$, $p \in R^n$ в R^n фиксирована евклидова структура; пусть в некотором фиксированном базисе линейные операторы $B_\sigma(x, t, \omega)$ задаются матрицами $b_{\sigma,ij}(x, t, \omega)$.

Заметим, что условия, налагаемые на $b_{\sigma,ij}$ в следующем определении, не инвариантны.

Впрочем, легко привести инвариантные условия, подобно тому, как это делается в определении 2 статьи [3].

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Семейство случайных векторных полей $g_\sigma(x, \omega)$ называется допустимым семейством случайных возмущений векторного поля $f(x)$, если для почти всякого $x \in V^n$ при всяком условии, состоящем в фиксации точек $g_\sigma^k(\omega)x$ (где $k=0,1,...,k(\sigma)$, условные распределения случайных функций $b_{\sigma,ij}(x,t,\omega)$ таковы, что (через E_c далее обозначается условное математическое ожидание):

а) при каждом (i,j,q) $(i\neq j)$ — сужение $\int_\tau^{\tau+1} b_{\sigma,ij}(x,y,\omega)dt$ на множество тех τ, при которых $g_\sigma^t(\omega)x\in M_{q,\sigma}$ независимо от совокупности сужений $\int_\tau^{\tau+1} b_{\sigma,i'j'}(x,t,\omega)d$ на множества тех τ, при которых $g_\sigma^t(\omega)x\in M_{q',\sigma'}$, где $(i',j',q')\neq(i,j,q)$ $(0\leqslant\tau\leqslant k(\sigma))$

б) плотности условных распределений величин $\int_\tau^{\tau+1} b_{\sigma,ij}(x,t,\omega)dt$ $i\neq j$ суть $O(\sigma^{-1})$ при $0\leqslant\tau\leqslant k(\sigma)$;

в) $E_c\left\{\int_\tau^{\tau+1}\left|b_{\sigma,ij}(x,t,\omega)\right|dt\right\}\precsim\sigma$;

г) для всякого $D>0$ равномерно по $\tau\in\left[0,k(\sigma)\right]$ и по $x\in V^n$

$$E_c\left\{\left|\exp D\int_\tau^{\tau+1}\left|b_{\sigma,ij}(x,t,\omega)\right|dt-1\right|\right\}\prec\sigma$$

§ 3. ТЕОРЕМА

Для всякого допустимого семейства $g_\sigma(x,\omega)$ случайных возмущений векторного поля $f(x)$ имеет место сходимость по мере μ (на Ω I:

$$\lambda_k(g_\sigma(\omega))\xrightarrow[\sigma\to 0]{}\lambda_k(f)\ \ (k=1,2,...,n)$$

Доказательство. Укажем на те изменения, которые надо сделать в доказательстве теоремы в [4], чтобы превратить его в доказательство сформулированной теоремы.

I. Пункт 1) заменим следующим пунктом: 1) при почти каждом $x\in V^n$ система (1) удовлетворяет условиям определения 2 [3] со следующими изменениями:

$$\text{А) }\ \Xi=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right\},\ F=\left\{(0,k)\bigcap\Xi\right\}_{k\in N},\ \Omega_\xi=\Omega;\ \mu_\xi=\mu,\ A(t)=A(x_k,t)$$

$$(k\leqslant t\cdot T_\varepsilon^{-1}<k+1),\ B_\xi(t,\omega)=A(x_k,t)+B_\sigma(x,t,\omega)\ \ (k\leqslant t\cdot T_\varepsilon^{-1}<k+1),\ \theta_{\xi,\varepsilon}=1.$$

Б) в п. 1) определения 2 [3] вместо независимости для всех i имеет место независимость случайной матрицы с индексом $i=j$ от совокупности случайных матриц с индексами $i=j+1,...,j+l$ такими, что при $k=1,...,l,$ $g_\sigma^{f+k}(\omega)x$ и $g_\sigma^f(\omega)x$ принадлежат разным элементам разбиения (здесь речь идет об условных распределениях (см. определение выше)).

II. Если $g_\sigma^{iT}(\omega)x\in U_\gamma$, $k(\sigma)$ и $\left[iT,(i+1)T\right]\not\subset\Sigma$ то $g_\sigma^{iT}(\omega)x$, $g_\sigma^{(i+1)T}(\omega)x$ принадлежат разным элементам разбиения S_σ. При этом T можно считать $\ll k(\sigma)$ вследствие условия (*) на разбиения S_σ и формулы (9) из [3].

III. Предыдущей фразой нужно заменить пункт 2б) доказательства теоремы в [4], а в пункте 3а) вместо пунктов A—C из [4] должны фигурировать условия на разбиения S_σ и определение допустимого семейства случайных возмущений из настоящей заметки.

IV. Теперь три исправления к [4] (и [3]): а) в определении $\xi_i(\omega)$ на стр. 511 в [3J вместо sup должно быть inf ; б) в [3] и в [4] нужно добавить замечание: sup плотности

условного распределения матриц $Y_\xi(mT+(k+1)\theta_{\xi,\varepsilon},\ \ mT+k\theta_{\xi,\varepsilon};\ \ \omega)\left(k<-\frac{T}{\theta_{\xi,\varepsilon}}\right)$ при условии, состоящем в фиксации $Y_\xi((m+1)Y,\, mY;\,\omega)$, удовлетворяет оценке: она $\prec \sup$ плотности безусловного распределения, если $\frac{T}{\theta_{\xi,\varepsilon}}$ достаточно велико; в) в п. А на стр. 581 в [4] вместо $x(p',t,0)$ должно быть $x_B(t,0)$, где $x_B(t,\tau)$ — оператор Коши системы $\dot{x}=B(t)x$, удовлетворяющей условию): $\delta>\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|B(\tau)-A(f^\tau p')\|d\tau$.
Доказательство закончено.

Замечание. В случае нетранзитивности меры m (остальные условия те же) утверждение теоремы заменяется следующим:

$$\int_{V^n}\lambda_k(g_\sigma^t(\omega)x)dm(x)\xrightarrow[\sigma\to 0]{}\int_{V^n}\lambda_k(f^t x)dm(x)$$

$(\lambda_1(f^t x)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(f^t x)$ — характеристические показатели системы в вариациях динамической системы $f^t x$ вдоль траектории $f^t x$ и аналогично обозначение $\lambda_k(g_\sigma^t(\omega)x)$.

Доказательство то же, но в соответствующем месте добавляется ссылка на теорему 4 из [1], эргодическую теорему Биркгофа и теорему Лебега о почленном интегрировании ограниченных последовательностей.

Литература

1. Millionscikov V. M Actes, Congres. Intern. Math., 1970. Paris, 1971, t. 2, p. 915—919. (Русский текст в книге: «Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. Доклады советских математиков. М., «Наука», 1972, стр. 207—211).
2. Миллионщиков В. М. Матем. заметки, 5, № 1, 1969.
3. Миллионщиков В. М. Матем. заметки, 7, № 4, 1970; 9, № 4, 1971.
4. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, И, № 3, 1975.

Поступила в редакцию
5 июля 1975 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова