УДК 517.926.4

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

Предлагаемая заметка, в которой мы пользуемся определениями и обозначениями, приведенными в обзоре [1], содержит усовершенствование результатов работы [2]*) (см. также [1], теорема 5).

Пусть дана динамическая система $f^t p$ (непрерывное действие группы R) на компактном метрическом пространстве M с нормированной инвариантной мерой T. Каждой паре $\{p, A(q)\}$, где $p \in M$, $A(q)$ — непрерывное отображение M в $Hom(R^n, R^n)$ (R^n n-мерное вещественное векторное пространство), сопоставляется линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(f^t p)x \tag{1}$$

(Все дальнейшее легко переносится (см. начало заметки [5]) на более общую ситуацию, в которой на векторном расслоении (E, π, M, R^n) рассматривается динамическая система; $g^t e$, линейная на слоях и такая, что $\pi g^t e = f^t \pi e$ (предложенное Д. В. Аносовым обобщение уравнений в вариациях гладкой динамической системы на многообразии)). Через $X(p;t,\tau)$ будем обозначать оператор Коши системы (1). Если в R^n введена евклидова структура, то для $X \in Hom(R^n, R^n)$ через $d_k(X)\left(d_1(X) \geqslant d_2(X) \geqslant \ldots \geqslant d_n(X)\right)$ обозначаем спектр положительного оператора $(X^* X)^{\frac{1}{2}}$ (характеристические показатели от выбора евклидовой структуры в R^n, как известно, не зависят). Через $U_\delta(p)$ будем обозначать δ-окрестность точки $p \in M$.

А. Пусть $M_\Theta \subset M$ — множество неподвижных и периодических с периодом $\leqslant \Theta$ точек системы $f^t p$. Из теоремы Флоке—Ляпунова и теоремы Ляпунова—Перрона—Персидского об устойчивости характеристических показателей приводимых систем для всякого $\gamma > 0$ и для всякого $p \in M_\Theta$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $p' \in M$ и $\tau \geqslant 0$ таких, что $f^t p' \in U_\delta(f^t p)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, имеет место $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left| \ln d_k\left(X(p';t,0)\right) - \ln d_k\left(X(p;t,0)\right) \right| < \gamma t$$

Обозначим $U_{\gamma,\Theta} = \bigcup\limits_{p \in M_\Theta} U_\delta(p)$.

---

*) Для $k \neq 1$, n может не существовать $\lim\limits_{T \to +\infty}$ в формуле (3) в [2] (пользуюсь случаем поблагодарить М. И. Рахимбердиева, указавшего мне на это). В условии теоремы 3 в [2] надо дополнительно потребовать (при $k \neq 1$, я), чтобы в формуле (3) в [2] $\overline{\lim\limits_{s \to +\infty}} = \underline{\lim\limits_{s \to +\infty}}$ тогда $\lim\limits_{T \to +\infty}$ в формуле (3) в [2] существует при всех k. Для статистически почти приводимых [3], а значит, и для абсолютно регулярных систем все эти пределы существуют, причем $v_k = \lambda_k$ (где λ_k — характеристические показатели системы) (см. [2], пример 1). Для почти периодических систем все эти пределы также существуют, причем v_k равны вероятным показателям [3, 4] системы (см. [2], пример 2).

B. Рассмотрим конечные разбиения S_σ пространства M: $M=\bigcup_{q=1}^{k(\sigma)} M_{q,\sigma}$ зависящие от параметра $\sigma>0$, такие, что для всякого $\gamma>0$ найдется $C_\gamma>0$ такое, что для всякого $\Theta>0$ при некотором $\sigma \geqslant C_\gamma e^{-\gamma\Theta}$ разбиение S_σ обладает свойством: для всякого q из $M_{q,\sigma} \not\subset U_{\gamma,\Theta}$ следует $M_{q,\sigma} \cap f^t M_{q,\sigma}=\varnothing$ при $1 \leqslant t \leqslant \Theta$.

C. Пусть на некотором пространстве Ω с мерой $\mu\left(\mu(\Omega)=1\right)$ для каждого разбиения s_σ задано отображение $B_\sigma(p,\omega)$: $M \times \Omega \to Hom\left(R^n,R^n\right)$ непрерывное по $p \in M$ и измеримое по $\omega \in \Omega$, причем в некотором фиксированном базисе операторы $B_\sigma(p,\omega)$ задаются матрицами $b_\sigma, ij(p,\omega)$ и выполняются условия:

a) сужение $b_\sigma, ij(p,\omega)$ на $M_{q,\sigma} \times \Omega$ независимо с сужениями $b_\sigma, i'j'(p,\omega)$ на $M_{q',\sigma} \times \Omega$ при всяких $(i,j,q) \neq (i',j',q')$; при почти всех $p \in M$ плотности распределения величин $b_\sigma, ij(p,\omega)$ суть $0\left(\sigma^{-1}\right)$;

b) $\int\limits_\Omega \int\limits_0^1 \left| b_\sigma, ij\left(f^t p,\omega\right) \right| dt d\omega \lesssim \sigma$ (при $\sigma \to 0$) для почти всех $p \in M$ $(i,j=1,2,...,n)$;

c) $\int\limits_\Omega B_\sigma(p,\omega) d\omega=0$ при всех $p \in M$ $\sigma>0$;

d)*) для всякого $D>0$ равномерно по $p \in M$ при $\sigma \to 0$

$$\int\limits_\Omega \left| \exp D \int\limits_0^1 \left\| B_\sigma\left(f^t p,\omega\right) \right\| dt-1 \right| d\omega=0(\sigma)$$

Определение. Семейство систем

$$\dot{y}=\left[A\left(f^t p\right)+B_\sigma\left(f^t p,\omega\right)\right] y \tag{2}$$

называется допустимым семейством случайных возмущений системы (1), если $B_\sigma(p,\omega)$ удовлетворяют условиям A — C.

Теорема. Для всякого допустимого семейства случайных возмущений (2) системы (1) для почти всех $p \in M$ имеет место сходимость по мере μ (на Ω) $(k=1,2,...,n)$:

$$\lambda_k\left(A\left(f^t p\right)+B_\sigma\left(f^t p,\omega\right)\right) \xrightarrow[\sigma \to 0]{} \lambda_k\left(A\left(f^t p\right)\right)$$

Доказательство. Укажем на те изменения, которые надо сделать в доказательстве теоремы 3 в [2], чтобы превратить его в доказательство сформулированной теоремы. (Последний абзац стр. 512 [2] в доказательство теоремы 3 [2] не входит и сюда неприменим).

1) При почти каждом $p \in M$ система (2) удовлетворяет условиям определения 2 [2] со следующими изменениями:

a) $\Xi=(0,+\infty)$; $F=\left\{(0,\sigma)\right\}$ **);

*) Это условие вытекает из предыдущих, если случайные величины $b_\sigma, ij(p,\omega)$ при всех p имеют нормальные распределения с дисперсиями $\sigma^2(p)<const$, а также если $\sup\limits_{p,\omega} \left\| B_\sigma(p,\omega) \right\|=0(\sigma)$.

$$\Omega_\xi = \Omega \quad \mu_\xi = \mu \quad A(t) = A\left(f^t p\right);$$
$$B_\xi(t,\omega) = A\left(f^t p\right) + B_\sigma\left(f^t p, \omega\right);$$

б) в п. 1) определения 2 [2] независимость имеет место не для всех i, но для каждого набора $i = j, j+1, ..., j+l$ такого, что: $l\Theta_{\xi,e} < \Theta$ и $f^{i\Theta\xi,e} p \notin U_{\gamma,\Theta}$.

2) В п. 1) доказательства теоремы 3 [2]: а) T_ε выбирается не зависящим от $p \in M_\varepsilon$, $m\left(M_\varepsilon\right) > 1 - \varepsilon$ (что возможно в силу теорем о статистически почти приводимых системах из [3, 4] (или в силу теоремы 4 из [1]); б) T можно считать $< \frac{1}{3}\Theta$ в силу (9) из [2] и п. В (см. выше).

3) В п. 3) доказательства теоремы 3 [2]: а) во второй фразе добавить ссылку на пп. А — С (см. выше); б) теперь $\chi_i(\omega)$ не независимы и утверждение об условной мере (см. [2, стр. 511]) неверно, но

$$\int_\Omega \chi_i(\omega)\, d\omega < 2\varepsilon \quad (i = 0,1,2,...) \tag{3}$$

и вместо ссылки на усиленный закон больших [чисел рассуждаем так: из (3) следует: множество Ω_ε тех ω, для каждого из которых для бесконечного множества индексов k

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \chi_i(\omega) < 2\sqrt{\varepsilon},$$

имеет меру $\mu\left(\Omega_\varepsilon\right) > 1 - \sqrt{\varepsilon}$. Отсюда в силу статистической почти приводимости систем (1) и (2) (при почти всех $p \in M$) следует формула пункта 4а) письма в редакцию [2].

4) В пп. 4), 5) доказательства теоремы 3 [2] нужно сделать только исправления, приведенные в письме в редакцию [2]. Теорема доказана.

Литература

1. M i l l i o n s c i k o v V. M. Actes, Congres Intern. Math., 1970. Paris, 1971, t. 2, p. 915—919 (русский текст в книге: «Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. Доклады советских математиков. М., «Наука», 1972, стр. 207—211).

2. М и л л и о н щ и к о в В. М. Матем. заметки, 7, № 4, 503—513, 1970; 9, № 4, 735, 1971.

3. М и л л и о н щ и к о в В. М. Матем. сб., 75, № 1, 1968, стр. 154—165.

4. М и л л и о н щ и к о в В. М. Матем. сб., 77, № 2, 1968, стр. 163—173.

5. М и л л и о н щ и к о в В. М. Матем. заметки, 5, № 1, 1969, стр. 49—54.

6. О с е л е д е ц В. И. Труды московского математического общества, 19, 1968, стр. 179—210.

Поступила в редакцию
20 ноября 1974 г

Московский государственный университет

[**] В данном случае можно вместо $\{(0,\sigma)\}$ взять $\{[0,\sigma)\}$ и теорема не изменится, но в [2] (примеры 3 и 4) надо взять $F = \{(0,\varepsilon)\}$. Пользуюсь случаем поблагодарить И. Р. Суслова за указание на допущенную там неточность.