ДЕКАБРЬ 1974 г., ТОМ X, № 12

УДК 517.938

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ НЕМЫЦКОГО — БЕБУТОВА О ВПОЛНЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

В. В. Немыцким [2] получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы динамическая система $\dot{x} = g(x)$ $(x \in R^n)$ была гомеоморфна (топологически сопряжена) динамической системе $\dot{x} = 0$. Результат В. В. Немыцкого был обобщен М. В. Бебутовым на динамические системы, определенные в локально компактном метрическом пространстве (см. [3] или [1], основная теорема § 10, гл. V). Пример М. В. Бебутова (см. [4]) показывает, что отказаться от условия локальной компактности пространства в теореме Немыцкого—Бебутова нельзя (если не менять остальных условий). Поставим следующую

З а д а ч у. Какие условия (в дополнение к имеющимся в теореме Немыцкого — Бебутова) надо наложить на динамическую систему $f(p,t)$, заданную в произвольном метрическом пространстве *M*, чтобы для некоторого $S \subset M$ отображение $\varphi_S : S \times R \to M$, определенное формулой $\varphi_S(p,t) = f(p,t)$, было гомеоморфизмом $S \times R$ на M. (Если существует такой гомеоморфизм φ_S, то будем писать: система $f(p,t)$ гомеоморфна системе $S \times R$). (Заметим, что при $M=R^n$ из того, что φ_S —гомеоморфизм, не следует, что *S* гомеоморфно R^{n-1} (см. [6]); это—ответ на вопрос В. В. Немыцкого (см. [4, стр. 101—102]).

Пусть в метрическом пространстве *M* задана динамическая система $f(p,t)$. Она индуцирует в *M* отношение эквивалентности (точки эквивалентны, если они принадлежат одной траектории); через M_f обозначим фактор-пространство *M* (рассматриваемое как топологическое пространство) по этому отношению эквивалентности (см. [5, стр. 91]). Сечение инвариантного множества определим, как в [5, стр. 95] (в случае компактного сечения это определение совпадает с определением 3 на стр. 437 в [1]).

Л е м м а. Для того чтобы вполне неустойчивая динамическая система $f(p,t)$, заданная в метрическом пространстве M, не имела несобственной седловой точки, необходимо и достаточно, чтобы фактор-пространство M_f было хаусдорфовым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Если M_f не хаусдорфово, то в *M* найдутся точки p_n, $q_n (n \in N)$, p, q такие, что $p_n \underset{n\to\infty}{\to} p$, $q_n \underset{n\to\infty}{\to} q$, $p_n \sim q_n, p \nsim q$. Тогда система $f(p,t)$ имеет несобственную седловую точку (в силу следствия из леммы 1 в [1, стр. 435]). 2. Если система $f(p,t)$ имеет несобственную седловую точку, то в *M* найдутся $p_n \to p$, $f(p_n t_n) \to q (n \in N)$ $(t_n \in \infty)$. Если для некоторого t $q = f(p,t)$, то $f(p_n, t_n - t) \to p$, что в сочетании с $p_n \to p$ и $t_n \to \infty$ противоречит полной неустойчивости точки *p*. Следовательно, $p \nsim q$ и M_f не хаусдорфово. Лемма доказана.

Можем перефразировать теперь теорему Немыцкого— Бебутова так.

Т е о р е м а. *Для того чтобы динамическая система $f(p,t)$, заданная в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве M, была гомеоморфна системе $S \times R$ $(S \in M)$, необходимо и достаточно, чтобы она была вполне неустойчивой, а фактор-пространство M_f —хаусдорфовым.*

Поставленную нами задачу решает следующая

Т е о р е м а. *Для того чтобы динамическая система $f(p,t)$, заданная в сепарабельном метрическом пространстве M, была гомеоморфна системе $S \times R$* ($S \in M$), *необходимо и достаточно, чтобы она была вполне неустойчивой, а фактор-пространство M_f—регулярным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Укажем на те изменения, которые надо проделать в доказательстве теоремы Немыцкого—Бебутова ([1, стр. 437—443]).. 1) В теоремах 46 — 49 и их доказательствах слова «компактное сечение» заменить словом «сечение» и понимать его, как сказано выше; все рассуждения, использующие компактность, опустить (полученные с их помощью результаты непосредственно вытекают из принятого в [5] определения сечения). 2) Лемму 2 на стр. 438, следствие и лемму 3 на стр. 439 опустить. 3) В условии теоремы 47 потребовать, чтобы Φ_1 и Φ_2 были замкнуты. 4) (Главное изменение). В силу регулярности M_f в M существует базис открытых множеств V_n *(M* (его можно считать счетным в силу сепарабельности M*)* таких, что каждая трубка $f(V_n, R)$ замкнута в M. В доказательстве теоремы 48 множества $S(p_n, \delta_n)$ надо заменить множествами V_n. Теорема доказана.

Литература
1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., ГТТИ, 1949.
2. Немыцкий В. В. Annali di Mat., ser. IV, t. 14, 1935—1936.
3. Бебутов М. Бюллетень МГУ, т. II, вып. 3, 1939.
4. Немыцкий В. В. УМН, 4, вып. 6, 1949.
5. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. Физматгиз, 1958.
6. Bing R. H. Bull. Amer. Math. Soc, v. 64, № 2, 1958.
Поступила в редакцию
3 апреля 1974 г.
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова