**Доклады Академии наук СССР**
**1962. Том 146, № 5**

***МАТЕМАТИКА***

**В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ**

# ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ МНОЖИТЕЛЕМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 12 V 1962)*

I. В в е д е н и е. В настоящей работе обобщается на случай произвольных линейных топологических пространств теория дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, разработанная А. Н. Тихоновым и И. С. Градштейном ([1–5]).

II. О п р е д е л е н и я. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{1}$$

в произвольном линейном топологическом пространстве $L$ ($x \in L$, $t$ — действительное число) ([6]).

О п р е д е л е н и е 1. Пусть дано множество уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, p) \tag{2}$$

где параметр $p \in P$ (множество произвольной природы). Пусть $R = \{(x, p)\}$ — некоторое множество особых точек этих уравнений, т. е. $f(R) = 0$. Множество уравнений (2) называется р а в н о м е р н о а с и м п т о т и ч е с к и у с т о й ч и в ы м (в положительном направлении) относительно $R$, если для всяких окрестностей нуля $U$ и $V \subset U$ существует окрестность нуля $W(U)$ и действительное число $\theta(W, V)$, такие, что для всякой $(x_0, p_0) \in R$ из того, что

$$x(0, p_0) - x_0 \in W$$

следует

$$x(\tau, p_0) - x_0 \in U \qquad \text{при } \tau \geqslant 0,$$
$$x(\tau, p_0) - x_0 \in V \text{ при } \tau \geqslant 0(W, V).$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $(x_0, p_0) \in R$. Множество $S_{(x_0, p_0)}$ всех точек $(x, p_0)$, таких, что

$$x(\tau) \xrightarrow[\tau \to +\infty]{} x_0$$

где $x(\tau)$ — решение начальной задачи

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, p_0),\ x(0) = x_0$$

называется м н о ж е с т в о м, о т д е л е н н ы м т о ч к о й $(x_0, p_0)$. Множество $S = \bigcup\limits_{(x_0, p_0) \in R} S_{(x_0, p_0)}$ называется о б о л о ч к о й м н о ж е с т в а $R$.

III. Пусть $L_1, L_2, ..., L_k$ — произвольные линейные топологические пространства. Рассмотрим систему уравнений

$$\varepsilon^{n_i}\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,...,x_k,t)\ \ \big(i=1,2,...,k\big);$$
$$n_1>n_2>...>n_k\geqslant 0;\quad x_i\in L_i\ \big(i=1,...,k\big).\qquad (3)$$

(Случай, когда среди $n_i$ некоторые равны между собой, очевидно, легко сводится к этому.)

Т е о р е м а. 1) *Пусть* $z_0(t)=\{x_{1,0}(t);...;x_{k,0}(t)\}$ — непрерывное *решение начальной задачи:*

$$0=f_1(x_1,...,x_k,t),$$
$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,...,x_k,t)\ \ \big(i=2,...,k\big)$$
$$x_{i,0}(t_0)=x_{i,0}\ \ \big(i=1,...,k\big).$$

2) *Пусть множество уравнений*

$$\frac{dx}{d\tau}=f_1(x_1,x_2,...,x_k,t)\qquad (4)$$

*где* $(x_2,...,x_k,t)=p$ — *параметр, равномерно асимптотически устойчиво (в положительном направлении) относительно* $R=z_0([t,T])$. *Пусть*

$$(\overline{x}_1;x_{2,0};...;x_{k,0};t)\in S_{(x_{1,0};x_{2,0};...;x_{k,0};t_0)}$$

*(см. определение* 2).

3) *Пусть для уравнения в* $L_1\times L_2\times...\times L_k$

$$\frac{dx_1^{'}}{d\tau}=f_1(x_1^{'},x_2^{'},...,x_k^{'},t^*+\varepsilon^{n_1}\tau),$$
$$\frac{dx_1^{'}}{d\tau}=\varepsilon^{n_1-n_i}f_i(x_1^{'},x_2^{'},...,x_k^{'},t^*+\varepsilon^{n_1}\tau),\big(i=2,...,k\big),\qquad (5)$$

*запишем его коротко*

$$\frac{dz^{'}}{d\tau}=\varphi(\varepsilon,z^{'},\tau),$$

*имеет место непрерывная зависимость от параметра: для всякой окрестности нуля* $U\subset L_1\times L_2\times...\times L_k$ *и всякого числа* $\theta>0$ *существует* $\delta>0$ *такое, что для всяких* $t^*\in[t_0,T]$, $\varepsilon<\delta$, $z_0\in S$ *(см. определение* 2) *решения* $z(\varepsilon,\tau)$ *и* $z(0,\tau)$ *начальных задач*

$$\frac{dz^{'}}{d\tau}=\varphi(\varepsilon,z^{'},\tau),\quad z^{'}(0)=z_0$$
$$\frac{dz^{'}}{d\tau}=\varphi(0,z^{'},\tau),\quad z^{'}(0)=z_0$$

*таковы, что* $z'(\varepsilon,\tau)-z'(0,\tau)\in U$ *для всякого* $\tau\in[0,\theta]$

4) *Пусть для системы* (3) *при всяких начальных данных* $(x_1(t_0),...,x_k(t_0))\in S$ *начальная задача (задача Коши) имеет единственное решение.*

*Если эти условия выполнены, то решение* $z(\varepsilon,t)$ *начальной задачи*

$$(x_1(t_0),x_2(t_0),...,x_k(t_0))=(\overline{x}_1,x_{2,0},...,x_{k,0})\qquad (3')$$

*для системы* (3) *таково, что*

$$z(\varepsilon,t)\xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{}z(0,t)$$

*равномерно на* $[t_1,T]$, *где* $t_1$ — *любое* $>t_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Сделаем замену в системе (3’):

$$t=t^*+\varepsilon^{n_1}\tau,\quad x_i(t)=x_i(t^*+\varepsilon^{n_1}\tau)=x_i^{'}(\tau)$$

(т.е. $z(t)=z'(t)$ ). При $t^*=t_0$ получим систему (5) с начальными данными

$$x_1'(0)=\overline{x}_1,\quad x_1'(0)=x_{i,0}\ (i=2,...,k) \tag{5'}$$,

Аналогичную замену делаем в $z_0(t)$

$$z_0(t)=z_0(t^*+\varepsilon^{n_1}\tau)=z_0'(\tau)$$

Доказательство теоремы проведем в три этапа:

1. Лемма 1. *Положим* $t^*=t_0$. *Тогда для всякой окрестности нуля* $V\subset V_1\times...\times V_k\subset L_1\times...\times L_k$ *существуют действительные числа* $\theta_1>0$ *и* $\delta_1>0$ *такие, что для всякого* $\varepsilon<\delta_1$ *для решения* $z'(\varepsilon,\tau)$ *системы* (5') *имеет место*

$$z'(\varepsilon,\tau)-z_0'(\tau)\in V \text{ при } \tau\in[\theta_1,2\theta_1]$$

Доказательство. А. Из условия 2) находим $\theta_1$ такое, что

$$x_i'(0,\tau)-x_0\in 1/3V_1 \text{ при } \tau\geqslant\theta_1$$

Кроме того, $x_1'(0,\tau)=x_{i,0}$ ($i=2,...,k$), поэтому $x_1'(0,\tau)=x_{i,0}\in 1/3V_i$ ($i=2,...,k$), следовательно, $z'(0,\tau)-z_0\in 1/3V_1$ при $\tau\geqslant\theta_1$.

Б. Из условия 3) для $\theta_1$ находим $\delta_0>0$ такое, что для всякого $\varepsilon<\delta_0$

$$z'(\varepsilon,\tau)-z'(0,\tau)\in 1/3V_1 \text{ при } \tau\in[0,2\theta_1]$$

В. Из непрерывности $z_0(t)$ (условие 1)) находим такое $\delta_2>0$, что

$$z_0(t)-z_0\in 1/3V_1 \text{ при } t\in[t_0,t_0+2\delta_2].$$

Отсюда при $\varepsilon<\delta_3=(\delta_2/\theta_1)^{1/n_1}$

$$z_0'(t)-z_0\in 1/3V_1 \text{ при } \tau\in[0,2\theta_1].$$

Г. Выбирая $\delta_1=\min(\delta_0,\delta_3)$ и комбинируя результаты А, Б, В, получаем: для всякого $\varepsilon<\delta_1$

$$z'(\varepsilon,\tau)-z_0'(\tau)\in V \text{ при } \tau\in[\theta_1,2\theta_1]$$

2. Лемма 2. *Для всякой окрестности нуля* $U\subset L_1\times...\times L_k$ *существует окрестность нуля* $V\subset L_1\times...\times L_k$ *и числа* $\theta_0>0$, $\delta_0>0$ *такие, что если для* $t^*\in[t_0,T]$ *(см. замену перед леммой* 1)

$$z'(\varepsilon,0)-z_0'(0)\in V,$$

*то для всякого* $\varepsilon<\delta_0$:

1) $z'(\varepsilon,\tau)-z_0'(\tau)\in U$ *при* $\tau\in[0,\theta_0]$;

2) $z'(\varepsilon,\tau)-z_0'(\tau)\in V$ *при* $\tau\in[\theta_0,2\theta_0]$.

Доказательство. А. Из условия 2) находим $V\subset U$ и $\theta_0>0$ такие, что:

1) $z'(0,\tau)-z_0\in \frac{1}{3}U$ при; $\tau\in[0,\theta_0]$;

2) $z'(0,\tau)-z_0\in \frac{1}{3}V$ при $\tau\in[\theta_0,2\theta_0]$.

Б. Из условия 3) находим $\delta_1>0$ такое, что при $\varepsilon<\delta_1$

$$z'(\varepsilon,\tau)-z'(0,\tau)\in \frac{1}{3}V \text{ при } \tau\in[0,2\theta_0]$$

В. Из равномерной непрерывности $z_0(t)$ на отрезке $[t_0,T]$ находим, как и в пункте В доказательства леммы 1, $\delta_0>0$ такое, что при $\varepsilon<\delta_2$

$$z_0(t)-z_0\in 1/3V_1 \quad \textit{при} \quad \tau\in[0,2\theta_0]$$

Г. Выбирая $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$ и комбинируя результаты А, Б, В, получаем: для всякого $\varepsilon < \delta_0$

1) $z'(\varepsilon, \tau) - z_0'(\tau) \in U$ при $\tau \in [0, \theta_0]$;

2) $z'(\varepsilon, \tau) - z_0'(\tau) \in V$ при $\tau \in [\theta_0, 2\theta_0]$

3. Докажем теорему. Пусть дана окрестность нуля $U \subset L_1 \times ... \times L_k$ и $t_1 > t_0$. Найдем $V$, $\delta_0$, $\theta_0$ леммы 2, по $V$ найдем и $\theta_1$ из $\delta_1$ леммы 1. Обозначим $\delta = \min\left(\delta_0, \delta_1, \left(\frac{t_1 - t_0}{2\theta_1}\right)^{1/n_1}\right)$. Применяя теперь лемму 2 последовательно для $t^* = t_0^* + \delta^{n_1} 2_1\theta,\quad t_0^* + \delta^{n_1} 2\theta_0, ..., t_0^* + n\delta^{n_1} 2\theta_0$ (здесь $n$ таково, что $t_0^* + n\delta^{n_1} 2\theta_0 > T$, т. е., например, $n = 1 + E\left(\frac{T - t_0}{\delta^{n_1} 2\theta_2}\right)$, получаем: для всякого $\varepsilon < \delta$ и всякого $t \in [t_1, T]$

$$z(\varepsilon, \tau) - z_0(\varepsilon, \tau) \in U$$

IV. 1. При $\varepsilon \to -0$ теорема верна, если заменить в условии теоремы асимптотическую устойчивость в положительном направлении на то же в отрицательном направлении.

2. Теоремы И. С. Градштейна ([2–5]) — частные случаи доказанной (при конечномерных $L_i$; из них ([2]) — при $k = 1$, $n_1 = 1$; ([3]) — при $k = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 0$).

3. Для локально выпуклых линейных топологических пространств теоремы существования, единственности, асимптотической устойчивости и непрерывной зависимости от правых частей известны ([6]).

Выражаю благодарность В. В. Немыцкому за постановку задачи и указания.

Поступило
8 V 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Матем. сборн., **27** (69), № 1 (1950). [2] И. С. Градштейн, ДАН, **65**, №6 (1949). [3] И. С. Градштейн, ДАН, **66**, №5 (1949). [4] И. С. Градштейн, ДАН, **81**, № 6 (1951). [5] И. С. Градштейн, ДАН, **82**, № 1 (1952). 6 В. М. Миллионщиков, ДАН, **131**, № 3 (1960).