УДК 517.926

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

§ 1. Мы рассматриваем линейные системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где x — вектор n-мерного евклидова пространства $E^n, A(t)$ — линейное преобразование $E^n \to E^n$, определенное и непрерывно зависящее от t при $t \geqslant 0$ или при всех действительных t, причем $\|A(t)\| \leqslant a_0$.

Напомним сначала определение Ляпунова (1892 г.). Характеристическим показателем решения $x(t)$ называется число

$$\lambda_x = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln\|x(t)\|.$$

Ляпунов доказал, что существует базис $x_1(t),...,x_n(t)$ пространства решений системы (1) такой, что для всякого базиса $y_1(t),...,y_n(t)$ того же пространства $\lambda_{y_i} \geqslant \lambda_{x_i}$ $(i = 1,2,...,n)$, если $\lambda_{y_1} \geqslant ... \geqslant \lambda_{y_n}$.

Числа $\lambda_{y_1}(A) \geqslant ... \geqslant \lambda_{y_n}(A)$, где $\lambda_i(A) = \lambda_{x_i}$, называются характеристическими показателями системы (1).

Допуская вольность речи, будем отождествлять систему (1) с функцией $A(t)$. Превратим множество систем (1) в метрическое пространство M_n, введя расстояние

$$\rho\left(A(t), B(t)\right) = \sup_t \|A(t) - B(t)\|.$$

Перрон доказал (1930 г.), что функции $\lambda_i(A)$ не всюду непрерывны на M_n и доказал (1931 г.) непрерывность функций $\lambda_i(A)$ в точках множества I_n [2]. По определению, система (1) принадлежит множеству I_n [3] в том и только в том случае, если существует базис $x_1(t),...,x_n(t)$ пространства ее решений, такой, что

$$\frac{\|x_{i+1}(t)\|}{\|x_{i+1}(\tau)\|} : \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(\tau)\|} \geqslant de^{a(t-\tau)}$$

для некоторых $a > 0$, $d > 0$ и всех $t \geq \tau$, $i = 1,...,n-1$.

Мною получены следующие результаты о множестве I_n.

Т е о р е м а 1 [13].

---

[1] Статья представляет собой текст доклада на Международном конгрессе математиков Ницце (1970 г.). Печатается также в трудах конгресса.

[2] См. [2], стр. 193-198, где замена условия $p_{ik}(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ $(i \neq k)$ условием $|p_{ik}(t)| < \delta$ $(i \neq k)$ приводит лишь к небольшим очевидным изменениям. в [5] и в [19] я ошибочно приписал теорему Перрона другим авторам.

[3] Эту инвариантную форму определению I_n придали Б. Ф. Былов и ДЖ. К. Лило (J. C. Lillo). В [3] доказано, что система (1) $\in I_n$ тогда и только тогда, когда она некоторым ляпуновским преобразованием приводится к системе $y_i = p_{ii}(t)y_i$ $(i = 1,2,...,n)$, удовлетворяющей условию теоремы Перрона [2] (стр. 193).

$$I_n = \mathrm{Int} S_n$$

($\mathrm{Int} S_n$ *— открытое ядро множества* S_n[1]) *всех тех точек пространства* M_n, *в которых все функции* $\lambda_i(A)$ *непрерывны).*

Теорема 2 [7]. Система (1) принадлежит множеству I_n *тогда и только тогда, когда для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для всякого решения* $y(t)$ *всякой системы* $y = B(t)y$, *удовлетворяющей неравенству* $\rho\big(B(t), A(t)\big) < \delta$, *найдется решение* $x(t)$ *системы (1), такое, что* $\measuredangle\big(x(t), y(t)\big) < \varepsilon$ *при всех t.*

Теорема 3 [12].

$$\overline{I}_n = M_n .$$

§ 2. При изучении неавтономных систем $x = g(x,t)$, *в* том числе и систем (1), важно следующее понятие (см. [4]).

Определение 1. $\tilde{x}(t)$ называется обобщенным решением системы $x = g(x,t)$, если $\tilde{x}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(t_k + t)$, где t_k — числа, $x_k(t)$ — решения этой системы, а предел равномерный на каждом отрезке.

Пусть $A(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на прямой. Тогда каждое обобщенное решение $\tilde{x}(t)$ системы (1) является решением некоторой системы $x = \tilde{A}(t)x$, где $\tilde{A}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} A(t_k + t)$ (предел равномерный на отрезках).

Используем известную (см. [2], стр. 533 — 535) конструкцию динамической системы сдвигов. Множество сдвигов функции $A(t)$ наделяется метрикой равномерной сходимости на отрезках и пополняется в этой метрике. На получившемся компакте R_A задается динамическая система D_A формулой

$$f\left(\tilde{A}(t), \tau\right) = \tilde{A}(t + \tau).$$

По теореме Боголюбова и Крылова система D_A имеет нормированные инвариантные меры[2]).

Определение 2 [11]. Систему (1) назовем абсолютно регулярной, если существует базис $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ пространства ее решений, обладающий свойствами

$$1)\ \lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|x_i(t)\| = \lambda_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

2) для всякого $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ имеем: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое *T*, что множество тех *h,* для которых хотя бы для одного решения $x(t)$, такого, что $\lim\limits_{|t|\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|x_i(t)\| = \lambda_i$ хотя бы при одном τ, $|\tau| \geqslant T$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|x(h+\tau)\|}{x(h)} - \lambda_i \right| \geqslant \varepsilon,$$

имеет относительную меру на прямой $< \varepsilon$.

---

1) Описание множества S_n см. в [17] или в [13].

2) Изложенный подход к изучению неавтономных систем выработан Фаваром (1927 г.), Степановым и Тихоновым (1934), Бебутовым (1939 – 1941 гг.), Немыцким, по инициативе которого была написана заметка [4], за которой последовали полезная статья Б. А. Щербакова [18] и еще несколько вариаций разных авторов на ту же тему.

Т е о р е м а 4 [11][1]. *Почти всякая* (*в смысле любой нормированной инвариантной меры системы* D_A) $\widetilde{A}(t)\in R_A$ *такова, что система* $x=\widetilde{A}(t)x$ *абсолютно регулярна.*

Определение 3 [15]. Скажем, что характеристические показатели системы (1) устойчивы почти наверное, если при $\sigma\to 0$ характеристические показатели системы

$$\dot{y}=A(t)y+\sigma^2 C(t,\omega)y$$

(элементы матрицы, задающей $C(t,\omega)$ в некотором базисе — независимые ненулевые белые шумы) стремятся с вероятностью 1 к характеристическим показателям системы (1).

Основным результатом излагаемой в этом параграфе вероятностной теории линейных систем дифференциальных уравнений является следующая

Т е о р е м а 5 [15]. *Характеристические показатели всякой абсолютно регулярной системы устойчивы почти наверное.*

§ 3. В этом параграфе рассматривается система (1) с почти периодической функцией $A(t)$. Здесь используются понятия правильной (Ляпунов) и почти приводимой (Б. Ф. Былов) систем, которые можно найти соответственно в [1] и в [3]. Замечу, что всякая почти приводимая система абсолютно регулярна, а из абсолютной регулярности следует правильность.

Т е о р е м а 6 [14]. *Существует k-периодическая* $A(t)$ *(*п р и *любых* $k>1$, $n>1$*), такая, что* с и с т е м а *(*1*)— неправильная.* (*Эта теорема является решением проблемы Еругина*).

При доказательстве этой теоремы я использовал следующую лемму *(* $A(t)$ называется рекуррентной (Биркгоф), если каждая траектория системы D_A всюду плотна в R_A*).*

Л е м м а [6] . *Если система (1) с рекуррентной* $A(t)$ *не почти приводима, то найдется* $\widetilde{A}(t)\in R_A$, *такая, что система* $\dot{x}=\widetilde{A}(t)x$ *неправильная.*

Наконец, имеет место следующая

Т е о р е м а 7 [11]. Д л я *того чтобы* система (1) *с почти периодической* $A(t)$ была *почти* приводима, *необходимо и достаточно, чтобы* $A(t)$ *была точкой непрерывности функций* $\lambda_i(A)$ $(i=1,\ 2,\ ...,\ n)$.

При доказательстве этой теоремы я использовал рассуждения, примененные затем при доказательстве теорем 1—3, а также теорему 4 и некоторые рассуждения метрического (вероятностного) характера.

Системы (1) возникают, в частности, как системы в вариациях гладких динамических систем. По этому поводу см. [10, 15].

---

[1] Эта теорема объединяет (в несколько улучшенном виде) некоторые результаты статей [8, 9] и, грубо говоря, эквивалента совокупности результатов В. И. Оселедца [16]. Эти результаты статей [8,9] я сообщил в качестве гипотез на семинаре Немыцкого зимой 1965 – 1966 гг.; статья [8] вышла из печати, а статьи [9, 11] поступили в редакцию задолго до выхода статьи [16].

Литература

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892 (2-ое издание, М.—Л., ГТТИ, 1935).

2. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., ГТТИ, 1949.

3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.

4. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, 161, № 1, 43—44, 1965.

5. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, 166, № 1, 34—37, 1966.

6. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 3, № 12, 2127—2134, 1967.

7. Миллионщиков В. М. Матем. заметки, 4, № 2, 173–180, 1968.

8. Миллионщиков В. М. Матем. сб., 75, № 1, 1968, стр. 154–165.

9. Миллионщиков В. М. Матем. сб., 77, № 2, 1968, стр. 163–173.

10. Миллионщиков В. М. Матем. заметки, 5, № 1, 49—54, 1969.

11. Миллионщиков В. М. Матем. сб., 78, № 2, 1969, стр. 179—201.

12. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 5, № 7, 1969.

13. Миллионщиков В. М. Диффернц. уравнения, 5, № 10, 1969.

14. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 5, № 11, 1969.

15. Миллионщиков В. М. Матем. заметки, 7, № 4, 503—513, 1970.

16. Оселедец В. И. Труды Московск. матем. общества, 19, 1968, стр. 179—210.

17. Былов Б. Ф., Изобов Н. А. Дифференц. уравнения, 5, № 10, 1969.

18. Щербаков Б. А. ДАН СССР, 167, № 5, 1004—1007, 1966.

19. Миллионщиков В. М. Труды Московск. матем. общества, 18, 147—186 1968.

Поступила в редакцию
28 сентября 1970 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова