УДК-517.926.45

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

В работе [6] решена проблема Н. П. Еругина о системах с почти периодическими коэффициентами. Заметно большие трудности возникают при решении родственной ей проблемы (также принадлежащей Н. П. Еругину, см. [1]): всякая ли система

$$\dot{x} = A(t)x \ \ (x \text{ — } n\text{-мерный вектор}) \tag{1}$$

с квазипериодической (т. е. почти периодической, имеющей конечный базис частот, см. [3, 4]) $A(t)$ правильная?

В настоящей работе дается решение этой проблемы. Будем называть k-периодической функцией квазипериодическую функцию, базис частот которой состоит из k частот.

Т е о р е м а 1. При любых $n>1$, $k>1$ существует непрерывная k-периодическая $A(t)$ (матрица $n\times n$) такая, что система (1) не почти приводима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем утверждение теоремы для $k=n=2$, из чего общий результат следует моментально: если $n>2$, то достаточно добавить к не почти приводимой системе с $k=n=2$ $n-2$ уравнения с k-периодическими коэффициентами, а если $n=2$, $k>2$ то достаточно в не почти приводимой системе с $k=n=2$ сделать $(k-2)$-периодическое ляпуновское преобразование с базисом частот, не соизмеримым с базисом частот матрицы коэффициентов этой системы. Возьмем двумерный тор T^2, точка на котором задается циклическими координатами φ, ψ (mod 1) и зададим на этом торе динамическую систему уравнениями

$$\varphi = 1,\ \psi = \mu \ \ (\mu \text{ иррациональное}) \tag{2}$$

(иррациональная обмотка тора). Обозначим $(\varphi_t(\varphi),\psi_t(\psi))$ — решение системы (2), равное (φ,ψ) при $t=0$, M_t — множество значений в момент t тех решений, начальные значения которых $\in M$. Обозначим через U^δ множество точек тора, представимых в виде $(\varphi_t(0),\psi_t(\psi))$, где $|t|<\dfrac{1}{2},\psi<\delta$. Легко видеть, что U^δ — открытое множество, содержащее $(0,0)$, и что для всякого $T>1$ найдется $\delta_T>0$ такое, что из $\delta<\delta_T$ вытекает, что $U_t^\delta \bigcap U^\delta = \varnothing$ при $1\leqslant t\leqslant T$. Пусть $n_k \uparrow +\infty$ $(k=0,1,...)$ — натуральные числа.

Положим $\eta_k = \delta_{n_k}$. Пусть $f_\varepsilon(\varphi,\psi)$ — непрерывная функция на T^2 с носителем $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subseteq T^2 \setminus U^{\eta_0}$, равная единице в точках, удаленных от U^{η_0} на расстояние $\geqslant\varepsilon$ и удовлетворяющая тождеству $f_\varepsilon(-\varphi,-\psi)=f_\varepsilon(\varphi,\psi)$. Пусть $\alpha_i(\varphi,\psi)\geqslant 0$ $(i=1,2,...)$ — непрерывные на T^2 функции с носителями $\operatorname{supp}\alpha_i \subseteq U^{\eta_i}$ такие, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i(\varphi,\psi)$ сходится равномерно на T^2. Рассмотрим линейную систему порядка 2 с 2-периодической непрерывной матрицей коэффициентов

$$x = \left\{ f_\varepsilon(\varphi_t(0),\psi_t(0)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\varphi_t(0),\psi_t(0)) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} x \ . \tag{3}$$

Мы докажем, что $\varepsilon>0$, n_k и функции $\alpha_i(\varphi,\psi)$ могут быть выбраны так, чтобы система (3) была не почти приводимой.

Возьмем какую-нибудь последовательность $\lambda_i \downarrow \frac{1}{2} (\lambda_i < 1)$.

Система

$$\dot{x} = f_\varepsilon(\varphi_t(0), \psi_t(0)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \tag{4}$$

при достаточно большом n_0 и достаточно малом $\varepsilon > 0$ (мы зафиксируем для дальнейшего такие n_0 и $\varepsilon > 0$) обладает, как легко видеть, следующими свойствами: она имеет два решения $x_1^{(0)}(t)$, $x_2^{(0)}(t)$, лежащие при всех t в замкнутом первом квадранте плоскости x, такие, что

$$\frac{1}{n_0} \ln \frac{\left\| x_1^{(0)} \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right\|}{\left\| x_1^{(0)} \left(\frac{1}{2} \right) \right\|} \geqslant \lambda_0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{n_0} \ln \frac{\left\| x_2^{(0)} \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right\|}{\left\| x_2^{(0)} \left(\frac{1}{2} \right) \right\|} \leqslant -\lambda_0, \tag{6}$$

$$\gamma_0 = \inf_t \measuredangle (x_1^{(0)}(t), x_2^{(0)}(t)) = \measuredangle (x_1^{(0)}(0), x_2^{(0)}(0)) \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

($\measuredangle(x, y)$ обозначает угол между векторами x, y; по определению он $\geqslant 0$). (Замечу, что на самом деле эти решения при всех t лежат на осях координат).

Допустим, что мы построили непрерывные на T^2 функции $\frac{\pi}{2^i} \geqslant \alpha_i(\varphi, \psi) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, ..., k)$ с носителями $\operatorname{supp} \alpha_i \subseteq U^{\eta_i}$, такие, что $\alpha_i(-\varphi, -\psi) = \alpha_i(\varphi, \psi)$ и что система

$$\dot{x} = \left\{ f_\varepsilon(\varphi_t(0), \psi_t(0)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\varphi_t(0), \psi_t(0)) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} x \tag{8}$$

имеет два решения $x_1^{(k)}(t)$, $x_2^{(k)}(t)$, лежащие при всех t в замкнутом первом квадранте плоскости x, для которых

$$\frac{1}{n_k} \ln \frac{\left\| x_1^{(k)} \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \right\|}{\left\| x_1^{(k)} \left(\frac{1}{2} \right) \right\|} \geqslant \lambda_k, \tag{9}$$

$$\frac{1}{n_k} \ln \frac{\left\| x_2^{(k)} \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \right\|}{\left\| x_2^{(k)} \left(\frac{1}{2} \right) \right\|} \leqslant -\lambda_k, \tag{10}$$

$$\gamma_k = \inf_t \measuredangle (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t)) = \measuredangle (x_1^{(k)}(0), x_2^{(k)}(0)) \leqslant \frac{\pi}{2^{k+1}}. \tag{11}$$

Докажем, что тогда существует непрерывная на T^2 функция $\frac{\pi}{2^{k+1}} \geqslant \alpha_{k+1}(\varphi, \psi) \geqslant 0$ с носителем $\operatorname{supp} \alpha_{k+1} \subseteq U^{\eta_{k+1}}$ такая, что $\alpha_{k+1}(-\varphi, -\psi) = \alpha_{k+1}(\varphi, \psi)$ и что система

$$\dot{x}=\left\{f_{\varepsilon}(\varphi_t(0),\psi_t(0))\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i(\varphi_t(0),\psi_t(0))\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}x \tag{12}$$

имеет два решения $x_1^{(k+1)}(t)$ и $x_2^{(k+1)}(t)$ лежащие при всех t в замкнутом первом квадранте плоскости x, причем выполнены (9) — (11) с $k+1$ вместо k.

Возьмем некоторое натуральное N и определим вспомогательную систему с периодической матрицей коэффициентов (которую при желании легко можно сделать непрерывной, но нам это не понадобится), которая в плоскости x в аффинных координатах $y=(y_1,y_2)$ (по базису $x_1^{(k)}(0),x_2^{(k)}(0)$) задается так ($T_k$ — матрица перехода от координат (x_1,x_2) к (y_1,y_2))

$$\dot{y}=A_{k,N}(t)y\ , \tag{13}$$

где

$$A_{k,N}(t)=\begin{cases} T_k\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\gamma_k\\ \frac{1}{2}\gamma_k & 0\end{pmatrix}T_k^{-1}\ \textit{при}\quad qN-\frac{1}{2}\leqslant t<qN+\frac{1}{2}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad (q-\textit{любое целое число})\\ \begin{pmatrix}\lambda_k & 0\\ 0 & -\lambda_k\end{pmatrix}\textit{при}\quad \textit{остальных}\quad t.\end{cases} \tag{14}$$

Легко видеть (впрочем, подробно такие рассуждения проведены в [6] на стр. 393 — 394), что для каждого k найдется N_k такое, что при $N\geqslant N_k$ система (13) — (14) имеет решения $\overline{y}(t)$ и $\overline{\overline{y}}(t)$ лежащие при всех t в замкнутом первом квадранте плоскости $y=(y_1,y_2)$, и такие, что

а) $\overline{y}(t+N)=e^{\nu_k N}\overline{y}(t)$, $\overline{\overline{y}}(t+N)=e^{-\nu_k N}\overline{\overline{y}}(t)$, (15)

б) $\nu_k\geq\lambda_{k+1}$, (16)

в) всякое решение системы (13) — (14), начинающееся не между $\overline{y}(0)$, $\overline{\overline{y}}(0)$, при некотором $t=qN-\dfrac{1}{2}$ (q — целое) не лежит в первом квадранте плоскости (y_1,y_2). Возьмем теперь

$$n_{k+1}=\max(N_k,n_k)\,. \tag{17}$$

В качестве $\alpha_{k+1}(\varphi,\psi)$ возьмем какую-нибудь непрерывную на T^2 функцию, принимающую значения в $\left[0,\dfrac{\pi}{2^{k+1}}\right]$, имеющую носитель $\subseteq U^{\eta_{k+1}}$, удовлетворяющую тождеству, и такую, что для любых φ,ψ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\alpha_{k+1}(\varphi_t(\varphi),\psi_t(\psi))dt\leqslant\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\alpha_{k+1}(\varphi_t(0),\psi_t(0))dt=\frac{1}{2}\measuredangle(x_1^{(k)}(0),x_2^{(k)}(0))=\frac{1}{2}\gamma_k \tag{18}$$

(такая функция, очевидно, существует).

Будем обозначать: θ — полярный угол на плоскости $(x=x_1,x_2)$, отсчитываемый от положительной полуоси x_1 в сторону положительной полуоси x_2; x_θ — единичный вектор с полярным углом θ; $x_\theta(t)$ — решение системы (12) с начальным условием $x_\theta(0)=x_\theta$.

Пусть $\theta_2=\sup$ множества Θ тех θ, для которых решение $x_\theta(t)$ системы (12) при каждом t, при котором $(\varphi_t(0),\psi_t(0))\in\bar{U}^{\eta_0}\setminus U^{\eta_0}$ лежит в замкнутом угле, образованном векторами $x_1^{(k)}(t),x_2^{(k)}(t)$.

Обозначим θ_2' — полярный угол вектора $\bar{x}(0)=T_k^{-1}\bar{y}(0)$. Из приведенных выше свойств а) — в) системы (13) — (14), из (17) — (18) и из индуктивного предположения (9) — (11) вытекает, как нетрудно видеть, что $\Theta\neq\varnothing$ $\theta_2'\leqslant\theta_2$ и что поэтому решение $x_2^{(k+1)}(t)=x_{\theta_2}(t)$ системы (12) удовлетворяет (10) с $k+1$ вместо k.

Существование решения $x_1^{(k+1)}(t)$ системы (12), при всех t лежащего в замкнутом первом квадранте плоскости x и удовлетворяющего (9) (с $k+1$ вместо k), вытекает из предыдущего и того обстоятельства, что система (12) инвариантна относительно замены $(x,y,t)\to(y,x,-t)$ (поскольку $f_\varepsilon(-\varphi,-\psi)=f_\varepsilon(\varphi,\psi)$; $\alpha_i(-\varphi,-\psi)=\alpha_i(\varphi,\psi)$. При этом (11) (с $k+1$ вместо k) вытекает из (11) и (18). Тем самым по индукции доказано: существуют непрерывные на T^2 функции $\frac{\pi}{2^i}\geqslant\alpha_i(\varphi,\psi)\geqslant 0$ $(i=1,2,...)$ с носителями $\operatorname{supp}\alpha_i\subseteq U^{\eta_i}$ такие, что система (3) имеет для каждого $k=0,1,2,...$ два решения $x_1^{(k)}(t),x_2^{(k)}(t)$, для которых

$$\frac{1}{n_k}\ln\frac{\left\|x_1^{(k)}\left(n_k+\frac{1}{2}\right)\right\|}{\left\|x_1^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)\right\|}\geqslant\lambda_k\geqslant\frac{1}{2}\ , \tag{19}$$

$$\frac{1}{n_k}\ln\frac{\left\|x_2^{(k)}\left(n_k+\frac{1}{2}\right)\right\|}{\left\|x_2^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)\right\|}\leqslant-\lambda_k\leqslant-\frac{1}{2} \tag{20}$$

(напомню, что $U_t^{\eta_{k+1}}\bigcap U^{\eta_{k+1}}=\varnothing$ при $1\leqslant t\leqslant n_{k+1}$) и

$$\measuredangle(x_1^{(k)}(0),x_2^{(k)}(0))\leqslant\frac{\pi}{2^{k+1}} \tag{21}$$

Из того, что для каждого k выполнены (19), (20), следует, что верхний особый показатель системы (3) $\Omega^0>\frac{1}{2}$, а ее нижний особый показатель $\omega^0<-\frac{1}{2}$. Предположим, что полученная система (3) почти приводимая. Тогда она имеет решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, характеристические показатели которых, соответственно $>\frac{1}{2}$ и $<-\frac{1}{2}$ и угол $\alpha(t)$ между которыми удовлетворяет неравенству

$$\pi>const\geqslant\alpha(t)\geqslant const>0 \tag{22}$$

Это, однако, противоречит тому, что при каждом $k=0,1,2,...$ выполнены (19) — (21), где $n_{k_{k\to\infty}}\to+\infty$.

Т е о р е м а 2. При любых $n>1$, $k>1$ существует непрерывная k-периодическая $A(t)$ (матрица $n\times n$) такая, что система (1) неправильная.

Эта теорема вытекает из теоремы 1, в силу теоремы 1 и леммы из [5].

Д о б а в л е н о в о к т я б р е 1 9 6 9 г. В изложенной конструкции легко видеть, что можно взять $n_k\leqslant const\cdot k$ и что поэтому, вследствие известного свойства диофантовых приближений, при почти всяком μ функции α_i могут быть выбраны так, чтобы ряды из их производных равномерно сходились; тогда $A(t)$ в теоремах 1, 2 будет бесконечно дифференцируемой.

Теоремы 2 и 3 из [8], по-видимому, неверны. Поэтому представляет интерес следующая.

Теорема 3. Для всякой почти периодической матрицы $A(t)$ для всякого $\varepsilon>0$ существует почти периодическая (с тем же модулем частот) матрица $B(t)$ такая, что $\sup_t \|B(t)-A(t)\|<\varepsilon$ и система $\dot{x}=B(t)x$ статистически почти приводима [7].

Доказательство. В силу [7] существует $\tilde{A}(t)\in R_A$ [5,7] такая, что система $x=\tilde{A}(t)x$ статистически почти приводима. В силу почти периодичности $A(t)$ найдется θ такое, что $\sup_t \|\tilde{A}(\theta+t)-A(t)\|<\varepsilon$. Матрица $B(t)=\tilde{A}(\theta+t)$ — искомая.

Литература

1. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. АН БССР, 1963.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.

3. Бор Г. Почти периодические функции. ГТТИ, 1934.

4. Левитан Б. М. Почти периодические функции. ГТТИ, 1953.

5. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 3, № 12, 2127—2134, 1967.

6. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 4, № 3, 391—396, 1968.

7. Миллионщиков В. М. Матем. сб., 75, № 1, 1968, стр. 154—165.

8. Миллионщиков В. М. УМН, т. XXIII, вып. 2, 207 (резюме), 1968.

Поступила в редакцию
31 октября 1968 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова