УДК 517.941.92

Критерий устойчивости вероятного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами

В. М. Миллионщиков (Москва)

§ 1. Абсолютно регулярные системы линейных дифференциальных уравнений

В настоящем параграфе вводятся и изучаются линейные системы вида

$$x = A(t)x \tag{1.1}$$

($x \in E^n$, $A(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на прямой), которые будем называть абсолютно регулярными. Эти системы обладают весьма замечательными свойствами, а с другой стороны, почти все (см. ниже теорему 3) линейные системы (1.1) являются абсолютно регулярными.

Краткое изложение настоящей работы дано в заметке [7].

Определение 1. Назовем систему (1.1) абсолютно регулярной, если она имеет нормальный базис (см. [1], стр. 28) решений

$$x_1(t), \dots, x_n(t),$$

обладающий следующими свойствами:

1) $$\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|x_i(t)\| = \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n); \tag{1.2}$$

2) каково бы ни было $i = 1, 2, \dots, n$, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое T, что множество $H_{\varepsilon,T}$ тех h, для которых хотя бы при одном τ, $|\tau| > T$, хотя бы для одного решения $x(t)$ системы (1.1), являющегося линейной комбинацией тех $x_k(t)$, для которых $\lambda_k = \lambda_i$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|x(h+\tau)\|}{\|x(h)\|} - \lambda_i \right| > \varepsilon, \tag{1.3}$$

имеет относительную меру на прямой

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{2t} \operatorname{mes} H_{\varepsilon,T} \cap [-t, t] < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Замечание. Абсолютно регулярная система — бирегулярная и статистически правильная (см. [15], [4] —[6]). Обратное, вообще говоря, неверно.

Обозначим, как в [16], [4] —[6], через D_A динамическую систему сдвигов $A(t)$, через R_A — пространство системы D_A.

Теорема 1. *Почти всякая (в смысле любой инвариантной меры на D_A) система $\dot{x} = \widetilde{A}(t)x$ такова, что существует перроновское преобразование* (см. [1], § 20) $x = V(t)u$, *приводящее ее к треугольному виду*

$$\dot{u} = P(t)u, \qquad p(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

которое удовлетворяет следующим условиям:

1) *существуют*

$$\lambda_i = \lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{ii}(\tau)\, d\tau \ (i = 1, 2, ..., n)$$

(*т. е. система* (1.1) — *бирегулярная*; *см.* [5], [6]);

2) *для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* T, *что множество* $\Sigma_{\varepsilon,T}$ *тех* h, *для которых хотя бы при одном* $i = 1, 2, ..., n$ *и хотя бы при одном* τ, $|\tau| > T$, *справедливо неравенство*

$$\left| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau p_{ii}(h+\xi)\, d\xi - \lambda_i \right| \geqslant \varepsilon,$$

имеет относительную меру на прямой

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{2t} \operatorname{mes} \Sigma_{\varepsilon,T} \cap [-t, t] < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Зафиксируем некоторое перроновское преобразование $x = U(t)u$, приводящее систему (1.1) к некоторому треугольному виду (1.5), и рассмотрим динамическую систему D_P. Докажем сначала, что для всякой транзитивной инвариантной меры ν на D_P почти всякая (в смысле меры ν) матрица $\widetilde{P}(t) \in R_P$ такова, что система $\dot{u} = \widetilde{P}(t)u$ удовлетворяет требованиям 1), 2) теоремы 1, где вместо $p_{ii}(t)$ надо подставить $\widetilde{p}_{ii}(t)$. Итак, пусть фиксирована транзитивная инвариантная мера ν на D_P. Функции $\varphi_i(\widetilde{P}) = \widetilde{p}_{ii}(0)$ ($i = 1, 2, ..., n$), очевидно, непрерывны на R_P. По эргодической теореме Биркгофа (см. [13], стр. 480, 489) для почти всякой (в смысле меры ν) матрицы $\widetilde{P}(t) \in R_P$ существуют

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_i\left[\widetilde{P}(t+\tau)\right] d\tau = \int_{R_P} \varphi_i\left(\widetilde{P}(t)\right) \nu\left(d\widetilde{P}\right) \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{1.6}$$

По той же теореме существуют

$$\lim_{T\to-\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_i\left[\widetilde{P}(t+\tau)\right] d\tau = \int_{R_P} \varphi_i\left(\widetilde{P}(t)\right) \nu\left(d\widetilde{P}\right). \tag{1.7}$$

Из (1.6)—(1.7) вытекает, что для почти всех (в смысле меры ν) $\widetilde{P} \in R_P$ существуют

$$\lambda_i\left(\widetilde{P}\right) = \lim_{|T|\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \widetilde{p}_{ii}(\tau)\, d\tau \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{1.8}$$

Рассмотрим при каждом $i = 1, 2, ..., n$ последовательность функций

$$f_i^{(k)}\left(\widetilde{P}\right) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{m} \displaystyle\int_0^m \widetilde{p}_{ii}(\tau) & \text{при} \quad k = 2m-1 \\ -\dfrac{1}{m} \displaystyle\int_0^{-m} \widetilde{p}_{ii}(\tau) & \text{при} \quad k = 2m. \end{cases} \qquad (k = 1, 2, ...) \tag{1.9}$$

Так как при каждом $i = 1, 2, ..., n$

$$f_i^{(k)}\left(\widetilde{P}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_i\left(\widetilde{P}\right) \tag{1.10}$$

на множестве N, $\nu(N) = 1$, то по теореме Д. Ф. Егорова (см. [14], стр. 284) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется множество $N_\varepsilon \subseteq R_P$ такое, что $\nu(N_\varepsilon) < \varepsilon$, и число $k_\varepsilon = k_\varepsilon(\varepsilon, N_\varepsilon)$ такое, что при $k \geq k_\varepsilon$ для всякого $i = 1, 2, ..., n$ и для всякого $\widetilde{P} \notin N_\varepsilon$

$$\left| f_i^{(k)}\left(\widetilde{P}\right) - \lambda_i\left(\widetilde{P}\right) \right| < \varepsilon.$$

Пусть M_ε — множество тех $\widetilde{P}(t) \in R_P$, для которых
$$\lim_{|T|\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \chi_{N_\varepsilon}\left(\widetilde{P}(t+h)\right)dh = \nu(N_\varepsilon) < \varepsilon \qquad (1.11)$$
(χ_B — характеристическая функция множества B). По эргодической теореме Биркгофа
$$\nu(M_\varepsilon) = 1. \qquad (1.12)$$
Положим $\hat{M} = \left(\bigcap_{s=1}^{\infty} M_{\frac{1}{s}}\right) \cap N$. Тогда $\nu(\hat{M}) = 1$ (в силу (1.12)). Пусть $\widetilde{P} \in \hat{M}$. Тогда система $\dot{u} = \widetilde{P}(t)u$ удовлетворяет требованиям 1), 2) теоремы 1, где вместо $P(t)$ надо поставить $\widetilde{P}(t)$.

Докажем это. Условие 1) вытекает из того, что $\hat{M} \subseteq N$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем $s > \frac{1}{\varepsilon}$. Так как $\widetilde{P}(t) \in \hat{M}$, то $\widetilde{P}(t) \in M_{\frac{1}{s}}$. Пусть $\Sigma_{\varepsilon,m}$ — множество тех h, для которых хотя бы при одном $i = 1,2,\ldots,n$ и хотя бы при одном целом k, $|k| > m$, имеет место неравенство
$$\left|\frac{1}{k}\int_0^k \widetilde{p}_{ii}(h+\xi)\,d\xi - \lambda_i(\widetilde{P})\right| = \left|\frac{1}{k}\int_0^k \varphi_i\left[\widetilde{P}(\tau+h)\right]d\tau - \lambda_i(\widetilde{P})\right| \geqslant \varepsilon.$$
Очевидно, из $h \in \Sigma_{\varepsilon,k_\varepsilon}$ следует, что $\widetilde{P}(t+h) \in N_\varepsilon$. Поэтому
$$\varepsilon > \frac{1}{s} > \lim_{|T|\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \chi_{N_{\frac{1}{s}}}\left(\widetilde{P}(t+h)\right)dh = \lim_{|T|\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \chi_{N_{\frac{1}{s}}}\left(\widetilde{P}(t+h)\right)dh \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2t}\operatorname{mes}\Sigma_{\frac{1}{s},k_{\frac{1}{s}}} \cap [-t,t] \geq \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2t}\operatorname{mes}\Sigma_{\varepsilon,k_{\frac{1}{s}}} \cap [-t,t]$$
последнее неравенство получено в силу очевидного включения $\Sigma_{\frac{1}{s},T} \supseteq \Sigma_{\varepsilon,T}$, $\left(\frac{1}{s} < \varepsilon\right)$. Здесь рассматривались лишь целые значения $T = k$, но это — не ограничение, как показывает простое рассуждение, использующее ограниченность $P(t)$ (см., например, [13], стр. 483). Пусть теперь найдется инвариантная мера μ на динамической системе D_A такая, что множество M тех $\widetilde{A}(t) \in R_A$, для которых система $\dot{x} = \widetilde{A}(t)x$ не удовлетворяет заключению теоремы 1, имеет меру $\mu(M) > 0$. Тогда (см. лемму 2 из [5], [6]) на динамической системе D_P найдется инвариантная мера ν_1 такая, что множество N тех $\widetilde{P}(t) \in R_A$, для которых система $\dot{u} = \widetilde{P}(t)u$ не удовлетворяет заключению теоремы 1, имеет меру $\nu_1(N) > 0$. Отсюда рассуждением, примененным в доказательстве теоремы 3 из [6], получаем, что существует транзитивная инвариантная мера ν на D_P такая, что $\nu(N) > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Лемма 1. *Пусть* λ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ — *некоторые числа* (*среди которых могут быть одинаковые*). *Пусть* ν — *инвариантная мера на* D_P *и пусть почти все* (*в смысле меры* ν) $\widetilde{P}(t) \in D_P$ *таковы, что*
$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau = \lambda_i \ (i = 1,2,\ldots,n).$$
Пусть μ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ — *те же числа* λ_i, *но занумерованные в любом другом порядке*:

$\mu_i=\lambda_{m_i}$. *Тогда существует* $\hat{A}(t)\in D_A$ *и существует перроновское преобразование* $x=\hat{V}(t)v$, *приводящее систему* $\dot{x}=\hat{A}(t)x$ *к треугольному виду* $\dot{v}=\hat{Q}(t)v$ *такому, что на динамической системе* $D_{\hat{Q}}$ *существует инвариантная мера* ν', *в смысле которой почти все* $\widetilde{Q}(t)\in R_{\hat{Q}}$ *таковы, что*

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \widetilde{q}_{ii}(\tau)\,d\tau=\mu_i.$$

При этом, если система $\dot{u}=P(t)u$ *удовлетворяет требованиям* 1), 2) *теоремы* 1, *то в качестве* $\hat{A}(t)$ *можно взять* $A(t)$.

Доказательство. Предположим (не уменьшая общности), что подстановка m_i ($i=1,2,...,n$) обладает свойством: если $\lambda_{m_i}=\lambda_{m_j}$ и $i<j$, то $m_i<m_j$. В силу условия леммы и в силу теоремы 1 найдется система $\dot{u}=\hat{P}(t)u$ ($\hat{P}(t)\in D_P$) такая, что выполнены условия 1), 2) определения 1 (с $\hat{p}_{ii}$ вместо p_{ii}).

Приведем систему $\dot{u}=\hat{P}(t)u$ к треугольному виду (так как она — треугольная, то речь идет, вообще говоря, о приведении ее к другому треугольному виду) так. В качестве набора подпространств, по которому будем строить перроновское преобразование (см. [1], § 20), возьмем

$$L_1\subset L_2\subset ...\subset L_n,$$

где L_k $(k=1,2,...,n)$ — линейное подпространство пространства решений, натянутое на решения $u_{m_1}(t),...,u_{m_k}(t)$ системы $\dot{u}=\hat{P}(t)u$, причем эти решения задаются формулами

$$u_m(t)=\left\{u_m^{(1)}(t),...,u_m^{(n)}(t)\right\}, \tag{1.13}$$

$$u_m^{(n)}(t)=...=u_m^{(m+1)}(t)\equiv 0, \tag{1.14}$$

$$u_m^{(m)}(t)=c_m^{(m)}\exp\left\{\int_0^t \hat{p}_{m,m}(\tau)\,d\tau\right\} \tag{1.15}$$

(где $c_m^{(m)}$ — произвольная константа, не равная нулю), а далее (при $m\geqslant i\geqslant 2$) индуктивно:

$$u_m^{(i-1)}(t)=c_m^{(i-1)}\cdot\exp\left\{\int_0^t \hat{p}_{i-1,i-1}(\tau)\,d\tau\right\}+$$
$$+\int_{a_{i-1}}^t\left[\hat{p}_{i-1,i}(\tau)u_m^{(i)}(\tau)+\hat{p}_{i-1,i+1}(\tau)u_m^{(i+1)}(\tau)+...+\hat{p}_{i-1,m}(\tau)u_m^{(m)}(\tau)\right]\cdot\exp\left\{\int_\tau^t \hat{p}_{i-1,i-1}(\xi)\,d\xi\right\}d\tau, \tag{1.16}$$

причем

$$a_{i-1}=\begin{cases}+\infty, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}>\lambda_m,\\ -\infty, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}<\lambda_m,\\ 0, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}=\lambda_m,\end{cases} \tag{1.17}$$

$$c_m^{i-1}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}\neq\lambda_m,\\ \text{произвольной константе}, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}=\lambda_m.\end{cases} \tag{1.18}$$

Несмотря на неопределенность выбора c_m^{i-1}, эти решения определяют набор подпространств $L_1\subset L_2\subset ...\subset L_n$ однозначно. Нетрудно проверить, что решение $u_m(t)$ имеет

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left\|u_m(t)\right\| = \lambda_m \ \ (m = 1, 2, ..., n). \tag{1.19}$$

Мы определили, таким образом, перроновское преобразование $u = \hat{W}(t)v$, приводящее систему $\dot{u} = \hat{P}(t)u$ к треугольному виду $\dot{v} = \hat{Q}(t)v$*.

Пусть h — произвольное фиксированное число. По тому же правилу, как выше для системы $\dot{u} = \hat{P}(t)u$, построим набор подпространств, определяющий перроновское преобразование, приводящее систему $\dot{u} = P'(h+t)u$ к треугольному виду

$$\dot{v} = \hat{Q}_h(t)v. \tag{1.20}$$

Поскольку, как легко проверить, из формул (1.13) — (1.18) при замене всюду t *на* $h+t$ *и* $\hat{p}_{k,l}(\theta)$ на $\hat{p}_{k,l}(h+\theta)$ получаем, что $u_m(h+t)$ выражается через $\hat{p}_{k,l}(h+t)$ с помощью тех же формул, что и $u_m(t)$ через $\hat{p}_{k,l}(t)$ (изменяются лишь значения констант $c_m^{(j)}$, но они не важны), то

$$\hat{q}_{h,ii}(t) \equiv \hat{q}_{ii}(h+t).$$

По тому же правилу приведем к треугольному виду и каждую из систем

$$\dot{u} = \widetilde{P}(t)u$$

таких, что

а) $\widetilde{P}(t)$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 1 (с $\widetilde{p}_{ii}$ вместо p_{ii});

б) $$\widetilde{P}(t) = \lim_{k\to\infty}\hat{P}(h_k+t), \tag{1.21}$$

где $\{h_k\}$ — любая последовательность действительных чисел таких, что

$$h_k \in E^1 \setminus \Sigma_{\varepsilon,T}. \tag{1.21'}$$

Множество всех таких $\widetilde{P}(t)$ обозначим через M_ε. Рассуждения, изложенные в лемме 2 статьи [6], показывают, что в динамической системе $D_{\hat{P}}$ существует инвариантная мера $\hat{\nu}$ такая, что

$$\hat{\nu}(M_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon > 0 \tag{1.22}$$

(при условии, что $\varepsilon < 1$, а T достаточно велико).

Из той же леммы следует, что

$$\mu_{\hat{A}}\left(F^{-1}(M_\varepsilon)\right) \geqslant 1-\varepsilon > 0$$

($\mu_{\hat{A}}$ — индивидуальная мера точки $\hat{A} \in D_A$; отображение F определено в [5], [6]). Заменим в правых частях формул (1.15), (1.16) t на h_k+t, после чего константы $c_m^{(j)}$ изменим так (как указано выше, значения этих констант несущественны, и мы можем выбирать их, как хотим), чтобы подвергшиеся этим изменениям формулы (1.13)—(1.18) дали следующие решения систем $\dot{u} = \hat{P}(h_k+t)u$:

$$u_{m,k}(t) = \left\{u_{m,k}^{(1)}(t), ..., u_{m,k}^{(n)}(t)\right\}, \tag{1.23}$$

$$u_{m,k}^{(n)}(t) = ... = u_{m,k}^{(m+1)}(t) \equiv 0, \tag{1.24}$$

$$u_{m,k}^{(m)}(t) = \exp\left\{\int_0^t \hat{p}_{m,m}(h_k+\tau)\,d\tau\right\}, \tag{1.25}$$

а далее (при $m \geqslant i \geqslant 2$) индуктивно:

---

* Набор пространств однозначно определяет $\hat{q}_{ii}(t)$ (перроновское преобразование он определяет не вполне однозначно).

$$
\begin{gathered}
u_{m,k}^{(i-1)}(t)=\int\limits_{a_{i-1}}^{t}[\hat{p}_{i-1,i}(h_k+\tau)u_{m,k}^{(i)}(\tau)+\hat{p}_{i-1,i+1}(h_k+\tau)u_{m,k}^{(i+1)}(\tau)+\ldots+\\
+\hat{p}_{i-1,m}(h_k+\tau)u_m^{(m)}(\tau)]\exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t}\hat{p}_{i-1,i-1}(h_k+\xi)\,d\xi\right\}d\tau,
\end{gathered}
\tag{1.26}
$$

причем a_{i-1} задано формулой (1.17).

В силу (1.21') при достаточно малом ε несобственные интегралы в формулах (1.26) сходятся равномерно относительно k. Поэтому, в силу (1.21), переходя в формулах (1.23) — (1.26) к пределу при $k\to\infty$, получаем решения системы $\dot{u}=\widetilde{P}(t)u$, определенные формулами ($m=1,2,\ldots,n$):

$$\widetilde{u}_m(t)=\left\{\widetilde{u}_m^{(1)}(t),\ldots,\widetilde{u}_m^{(n)}(t)\right\}, \tag{1.27}$$

$$\widetilde{u}_m^{(n)}(t)=\ldots=\widetilde{u}_m^{(m+1)}(t)\equiv 0, \tag{1.28}$$

$$\widetilde{u}_m^{(m)}(t)=\exp\left\{\int\limits_0^t\widetilde{p}_{m,m}(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{1.29}$$

а далее (при $m\ge i\ge 2$) индуктивно:

$$
\begin{gathered}
\widetilde{u}_m^{(i-1)}(t)=\int\limits_{a_{i-1}}^{t}[\widetilde{p}_{i-1,i}(\tau)\widetilde{u}_m^{(i)}(\tau)+\widetilde{p}_{i-1,i+1}(\tau)\widetilde{u}_m^{(i+1)}(\tau)+\ldots+\\
+\widetilde{p}_{i-1,m}(\tau)\widetilde{u}_m^{(m)}(\tau)]\cdot\exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t}\widetilde{p}_{i-1,i-1}(\xi)\,d\xi\right\}d\tau,
\end{gathered}
\tag{1.30}
$$

причем a_{i-1} задано формулой (1.17). Мы получили, что последовательность перроновских преобразований сходится равномерно на отрезках к преобразованию $u=\widetilde{W}(t)v$ системы $\dot{u}=\widetilde{P}(t)u$ ($\widetilde{P}(t)$ определено в (1.21)—(1.21')), определенному по тому же правилу, по какому выше было определено преобразование $u=\hat{W}(t)$ системы $\dot{u}=\hat{P}(t)u$.

Итак, доказано, что перроновское преобразование $u=\hat{W}(t)$ переводит систему $\dot{u}=\hat{P}(t)u$ в систему $\dot{v}=\hat{Q}(t)v$, причем на динамической системе $D_{\hat{Q}}$ существует инвариантная мера $\hat{\nu}$ такая, что почти все (в смысле меры $\hat{\nu}$) $\widetilde{Q}\in D_{\hat{Q}}$ таковы, что

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\widetilde{q}_{ii}(\tau)\,d\tau=\mu_i\ \ (i=1,2,\ldots,n).$$

Тогда преобразование $x=\hat{U}(t)\hat{W}(t)v$, где

$$\hat{U}(t)=\lim_{j\to\infty}U(t_j+t) \tag{1.31}$$

(предел (1.31) — равномерный на отрезках) — искомое. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть система* (1.1) *перроновским преобразованием* $x=U(t)u$ *приводится к треугольному виду* (1.5), *удовлетворяющему условиям* 1), 2) (см. теорему 1); *пусть из* $\lambda_i=\lambda_j$ *следует* $\lambda_k=\lambda_j$ *для всех* k, *заключенных между* i *и* j. *Тогда система* (1.1) *абсолютно регулярна.*

Доказательство. Приведем систему перроновским преобразованием $x=U(t)u$ к треугольному виду (1.5), удовлетворяющему условиям теоремы. Рассмотрим решения $u_1(t),\ldots,u_n(t)$ системы (1.5), заданные формулами ($m=1,2,\ldots,n$):

$$u_m(t)=\left\{u_m^{(1)}(t);\ldots;u_m^{(n)}(t)\right\}, \tag{1.32}$$

$$u_m^{(n)}=\ldots=u_m^{(k+1)}(t)\equiv 0, \tag{1.33}$$

$$u_m^{(k)}(t)=\exp\int_0^t p_{m,m}[\tau]\,d\tau, \tag{1.34}$$

а далее (при $m\geqslant i\geqslant 2$) индуктивно:

$$u_m^{(i-1)}(t)=c_m^{(i-1)}\cdot\exp\left\{\int_0^t p_{i-1,i-1}(\tau)\,d\tau\right\}+$$
$$+\int_{a_{i-1}}^t\left[p_{i-1,i}(\tau)u_m^{(i)}(\tau)+p_{i-1,i+1}(\tau)u_m^{(i+1)}(\tau)+\ldots+p_{i-1,m}(\tau)u_m^{(m)}(\tau)\right]\exp\left\{\int_\tau^t p_{i-1,i-1}(\xi)\,d\xi\right\}d\tau, \tag{1.35}$$

причем

$$a_{i-1}=\begin{cases}+\infty, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}>\lambda_m,\\ -\infty, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}<\lambda_m,\\ 0, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}=\lambda_m,\end{cases} \tag{1.36}$$

$$c_m^{(i-1)}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}\neq\lambda_m,\\ 1, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}=\lambda_m.\end{cases} \tag{1.37}$$

Докажем, что решения

$$x_m(t)=U(t)u_m(t)\quad (m=1,2,\ldots,n) \tag{1.38}$$

системы (1.1) удовлетворяют требованиям теоремы 2.

1) С помощью требования 1) теоремы 1 из формул (1.32) —(1.37) получаем

$$\left\|u_m(t)\right\|\leqslant C_\varepsilon\exp\left\{\lambda_m t+\varepsilon|t|\right\}\quad (-\infty<t<+\infty) \tag{1.39}$$

($m=1,2,\ldots,n$) для всякого $\varepsilon>0$. С другой стороны, в силу (1.34) и требования 1) теоремы 1

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left\|u_m^{(m)}(t)\right\|=\lambda_m. \tag{1.40}$$

Из (1.38) — (1.40) следует (1.2).

2) Пусть задано $\varepsilon>0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\varepsilon<\min_{\lambda_i\neq\lambda_j}\left|\lambda_i-\lambda_j\right|. \tag{1.41}$$

а) Предположим сначала, что все λ_i различны. Пусть $h\notin\Sigma_{\varepsilon,T}$ (см. теорему 1). Из формулы (1.35), заменяя t на $h+t$ и учитывая (1.37) и $\left\|P(t)\right\|\leqslant C$, получаем

$$\left|u_m^{(i-1)}(h+t)\right|\leqslant C\exp\left\{\int_0^t p_{i-1,i-1}(h+\xi)\,d\xi\right\}\int_{a_{i-1}}^t\left[\left|u_m^{(i)}(h_k+\tau)\right|+\ldots+\left|u_m^{(m)}(h_k+\tau)\right|\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\int_0^\tau p_{i-1,i-1}(h+\xi)\,d\xi\right\}d\tau\qquad (m\geqslant i\geqslant 2), \tag{1.42}$$

откуда, полагая $t=0$, учитывая (1.34) и проводя индукцию по $i=m,m-1,\ldots,2$, получаем

$$\left|u_m^{(i-1)}(h)\right|\leqslant C_1\left|u_m^{(m)}(h)\right|\ (m=1,2,\ldots,n;\,i=2,\ldots,m), \tag{1.43}$$

причем константа C_1 не зависит от $h\notin\Sigma_{\varepsilon,T}$ (поскольку несобственные интегралы в правых частях формул (1.42) сходятся равномерно относительно $h\notin\Sigma_{\varepsilon,T}$). Из (1.43) имеем:

$$\frac{\left\|u_m(h+\tau)\right\|}{\left\|u_m(h)\right\|} \geqslant C_2 \frac{\left|u_m^{(m)}(h+\tau)\right|}{\left|u_m^{(m)}(h)\right|} = C_2 \exp\left\{\int_0^\tau p_{m,m}(h+\xi)\,d\xi\right\} \geqslant C_\varepsilon \exp\left\{\lambda_m\tau - \varepsilon|\tau|\right\}, \quad (1.44)$$

причем C_ε не зависит от $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$. Из (1.44) следует, что найдется такое T'_ε, что при $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$, $|\tau| > T'_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\operatorname{sgn}\tau\left(\frac{1}{\tau}\ln\frac{\left\|x_i(h+\tau)\right\|}{\left\|x_i(h)\right\|} - \lambda_i\right) \geqslant -2\varepsilon\cdot\operatorname{sgn}\tau. \quad (1.45)$$

Из формул (1.42), учитывая (1.34) и проводя индукцию по $i = m, m-1, ..., 2$ получаем

$$\left|u_m^{(i-1)}(h+\tau)\right| \leqslant C_\varepsilon \left|u_m^{(m)}(h)\right|,\ \exp\left\{\lambda_m t - \varepsilon|t|\right\} \quad (1.46)$$

причем C_ε не зависит от $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$. Из (1.46) следует, что найдется такое T''_ε, что при $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$, $|\tau| > T''_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\operatorname{sgn}\tau\left(\frac{1}{\tau}\ln\frac{\left\|x_i(h+\tau)\right\|}{\left\|x_i(h)\right\|} - \lambda_i\right) \leqslant 2\varepsilon\cdot\operatorname{sgn}\tau \qquad (i = 1, 2, ..., n). \quad (1.47)$$

Возьмем теперь $T \geqslant \max\left(T'_\varepsilon, T''_\varepsilon\right)$ и такое, чтобы выполнялось второе неравенство в требовании 2) теоремы 1. Тогда из (1.45), (1.47) следует, что множество $H_{\varepsilon,T} = \Sigma_{\frac{\varepsilon}{2},T}$ удовлетворяет требованию 2) определения 1. Тем самым теорема доказана для случая, когда все λ_i различны.

б) Пусть среди λ_i есть совпадающие. В этом случае нетрудно получить доказательство теоремы, усложнив рассуждения, изложенные в пункте а).

В самом деле, неравенство (1.42) получается лишь тогда, когда $\lambda_{i-1} \neq \lambda_m$; если же $\lambda_{i-1} = \lambda_m$, то вместо (1.42) получаем неравенство

$$\begin{gathered}\left|u_m^{(i-1)}(t+h)\right| \le \left|u_m^{(i-1)}(h)\right|\cdot\exp\left\{\int_0^t p_{i-1,i-1}(h+\tau)\,dt\right\} + C\exp\left\{\int_0^t p_{i-1,i-1}(h+\tau)\,dt\right\}\times \\ \times\int_0^t\left[\left|u_m^{(i)}(h+\tau)\right| + ... + \left|u_m^{(m)}(h+\tau)\right|\right]\exp\left\{\int_0^\tau p_{i-1,i-1}(h+\xi)\,d\xi\right\}d\tau.\end{gathered} \quad (1.48)$$

Теперь из неравенства (1.42) (при $\lambda_{i-1} \neq \lambda_m$) и из (1.48) (при $\lambda_{i-1} = \lambda_m$) индукцией по $i = m, m-1, ..., 2$, получаем:

1) (при $t = 0$)

$$\left\|u_m(h)\right\| \leqslant C_1 \sum_{\lambda_i = \lambda_m}\left|u_m^{(i)}(h)\right| \text{ для всех } m = 1, 2, ..., n, \quad (1.49)$$

причем константа C_1 не зависит от $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$;

2) (при произвольном t)

$$\left\|u_m(h+t)\right\| \leqslant C_\varepsilon \left\|u_m(h)\right\|\exp\left\{\lambda_m t + \varepsilon|t|\right\} \quad (1.50)$$

причем константа C_ε не зависит от $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$.

Из (1.50), (1.38) следует, что найдется такое T''_ε, что при $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$, $|\tau| > T''_\varepsilon$, справедливо неравенство

$$\operatorname{sgn}\tau\left(\frac{1}{\tau}\ln\frac{\left\|x_i(h+\tau)\right\|}{\left\|x_i(h)\right\|} - \lambda_i\right) \leqslant 2\varepsilon\cdot\operatorname{sgn}\tau \qquad (i = 1, 2, ..., n). \quad (1.51)$$

Из (1.49) имеем

$$\frac{\left\|u_m(h+\tau)\right\|}{\left\|u_m(h)\right\|} \geqslant C_2 \frac{\sum\limits_{\lambda_i=\lambda_m}\left|u_m^{(i)}(h+\tau)\right|}{\sum\limits_{\lambda_i=\lambda_m}\left|u_m^{(i)}(h)\right|} \geqslant C_\varepsilon \exp\left\{\lambda_m\tau-\varepsilon|\tau|\right\}, \tag{1.52}$$

причем константа C_ε не зависит от $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$.

Второе неравенство в (1.52) вытекает из следующего рассуждения. Те $i \leqslant m$, для которых $\lambda_i = \lambda_m$, по условию теоремы суть подряд идущие натуральные числа $i_m, i_m+1, \dots, i_m+k_m = m$. Поэтому координаты $u_m^{(i)}(t)$ $(\lambda_i = \lambda_m)$ образуют вектор — решение системы

$$\begin{aligned} \dot u_m^{(i_m)} &= p_{i_m,i_m}(t)u_m^{(i_m)} + p_{i_m,i_m+1}(t)u_m^{(i_m+1)} + \dots + p_{i_m,m}(t)u_m^{(m)} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot u_m^{(m)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p_{m,m}(t)u_m^{(m)}. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Запишем систему (1.53) так:

$$\frac{d\breve u}{dt} = \breve P(t)\breve u\,. \tag{1.54}$$

Для решений обратно-сопряженной к ней системы

$$\frac{d\breve v}{dt} = -\breve P(t)^* \breve v$$

по аналогии с тем, как было получено (1.50), находим

$$\left\|\breve v(t+h)\right\| \leqslant D_\varepsilon \left\|\breve v(h)\right\| \exp\left(-\lambda_m t - \varepsilon|t|\right), \tag{1.55}$$

причем константа D_ε не зависит от $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$ и от $\breve v(t)$. Отсюда для всякого решения $\breve u(t)$ системы (1.53) — (1.54) имеем:

$$\left\|\breve u(t+h)\right\| \cdot \left\|\breve v(t+h)\right\| \geqslant \left|\left(\breve u(t+h), \breve v(t+h)\right)\right| = \left|\left(\breve u(h), \breve v(h)\right)\right|. \tag{1.56}$$

Для решения $\breve u(t)$ системы (1.53) — (1.54) и для $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$ выберем $\breve v(h)$ так, чтобы

$$\left|\breve u(h), \breve v(h)\right| = \left\|\breve u(h)\right\| \cdot \left\|\breve v(h)\right\| \tag{1.57}$$

(т. е. выберем $\breve v(h)$ коллинеарным $\breve u(h)$). Из (1.55) — (1.57) имеем

$$\left\|\breve u(t+h)\right\| \geqslant \frac{\left\|\breve v(h)\right\| \cdot \left\|\breve u(h)\right\|}{\left\|\breve v(t+h)\right\|} \geqslant \frac{1}{D_\varepsilon}\left\|\breve u(h)\right\| \exp\left(\lambda_m t - \varepsilon|t|\right),$$

что и доказывает (1.52).

Из (1.52) и (1.38) следует, что найдется такое T'_ε, что при $h \notin \Sigma_{\varepsilon,T}$, $|\tau| > T'_\varepsilon$

$$\operatorname{sgn}\tau\left(\frac{1}{\tau}\ln\frac{\left\|x_i(h+\tau)\right\|}{\left\|x_i(h)\right\|} - \lambda_i\right) \geqslant -2\varepsilon \cdot \operatorname{sgn}\tau \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{1.58}$$

Возьмем теперь $T \geqslant \max\left(T'_\varepsilon, T''_\varepsilon\right)$ и таким, чтобы выполнялось второе неравенство требования 2) теоремы 1. Тогда из (1.51), (1.58) следует, что множество $H_{\varepsilon,T} = \Sigma_{\frac{\varepsilon}{2},T}$ удовлетворяет требованию 2) определения 1. Теорема 2 доказана.

Из теорем 1,2, леммы 1, замечания после формулы (1.22) и формулы (5') на стр. 520 в [13] вытекает

Т е о р е м а 3. *Почти всякая $\widetilde A(t) \in R_A$ (в смысле любой инвариантной меры на D_A) такова, что система $\dot x = \widetilde A(t)x$ абсолютно регулярна.*

§ 2. Критерий устойчивости вероятного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и структура решений линейных систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами

В работах [4] — [6] введено и изучено понятие вероятного спектра* линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2.1}$$

Определение 2. Будем говорить, что вероятный спектр системы (2.1) устойчив, если для почти всякой (в смысле любой инвариантной меры на D_A) $\widetilde{A}(t) \in R_A$ система $\dot{x} = \widetilde{A}(t)x$ имеет устойчивые показатели (т. е. ее показатели мало меняются при прибавлении к $\widetilde{A}(t)$ матрицы $B_\varepsilon(t)$ с малой $\sup\limits_t \|B_\varepsilon(t)\|$).

Цель настоящего параграфа — нахождение критерия устойчивости вероятного спектра системы (2.1) с рекуррентной $A(t)$ (мы говорим, что $A(t)$ рекуррентна, если в динамической системе D_A каждая траектория всюду плотна). Результаты прилагаются затем к исследованию систем с почти периодическими коэффициентами. В дальнейшем через F_τ обозначаем множество тех x, которые представимы в виде $x = x(\tau)$, где $x(t)$ — решение системы (2.1) с начальным условием $x(0) \in F$.

Лемма 2. *Пусть* $A(t)$ *рекуррентна. Тогда* E^n (*пространство* x-*ов*) *представляется в виде прямой суммы линейных подпространств*

$$E^n = E^{m_1} \dotplus \ldots \dotplus E^{m_s}, \tag{2.2}$$

причем

1) *угол* $\alpha_i(t)$ *между подпространствами* $E_t^{m_i}$ *и* $E_t^{m_1} \dotplus \ldots \dotplus E_t^{m_{i-1}} \dotplus E_t^{m_{i+1}} \dotplus \ldots \dotplus E_t^{m_s}$ *имеет* $\inf\limits_{\substack{-\infty<t<+\infty \\ i=1,\ \ldots,\ s}} \alpha_i(t) > 0$;

и для любого $i = 1,\ \ldots,\ s$ *выполнено условие*

2) *для любых* E^{d_1}, $E^{d_2} \subset E^{m_i}$ *таких, что* $E^{m_i} = E^{d_1} + E^{d_2}$, *угол* $\alpha(t)$ *между подпространствами* $E_t^{d_1}$ *и* $E_t^{d_2}$ *таков, что для всякого* $\varepsilon > 0$ *множество тех* t, *для которых* $\alpha(t) \leqslant \varepsilon$, *относительно плотно на прямой.*

Замечание. Углом между подпространствами L_1 и L_2 называем $\inf$ углов между $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$.

Доказательство. Пусть имеется разложение E^n в прямую сумму (2.2),. удовлетворяющее требованию 1) леммы 2 (такое разложение существует: $E^n = E^n$). Докажем, что если оно не удовлетворяет требованию 2) для некоторого i (без ущерба для общности можно предположить, что $i = 1$), то существует другое разложение $E^n = L^{d_1} \dotplus \ldots \dotplus L^{d_{s+1}}$, причем $d_1 + d_2 = m_1$, $d_{i+1} = m_i$ $(i \geqslant 2)$, которое для любого $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s+1$ удовлетворяет требованию 1) леммы, где E^{m_i} надо заменить на L^{d_i}. Тем самым лемма будет доказана, так как, пользуясь этим утверждением, можно за конечное число шагов прийти от разложения $E^n = E^n$ к требуемому разложению.

---

* Д. В. Аносов любезно обратил внимание автора на то, что определения 1 и 2 в [4] неэквивалентны. Ниже используется определение 2, и ошибка устраняется простым выбрасыванием определения 1. В. Н. Фомин и В. А. Якубович любезно обратили внимание автора на то, что теорема 5 в [5] неверна. В исправленном виде она приведена в [6] (теорема 4). (Все сноски и ссылка [12] вставлены в конце 1968 года; соответствующие сведения автор получил после поступления настоящей статьи в редакцию.)

Итак, пусть разложение (2.2) удовлетворяет требованию 1) леммы, но не удовлетворяет для $i=1$ требованию 2), т. е. $E^{m_1}=E^{d_1}+E^{d_2}$ и угол $\alpha(t)$ между подпространствами $E_t^{d_1}$ и $E_t^{d_2}$ таков, что для некоторого $\varepsilon_0>0$ множество тех t, для которых $\alpha(t)>\varepsilon_0$, содержит отрезки $[\tau_k-t_k,\ \tau_k+t_k]$ ($t_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$).

По теореме Асколи (см. [2], стр. 43) существует последовательность индексов k_j такая, что при $j\to\infty$

$$E^{d_1}_{\tau_{k_j}+t}\to F_t^{d_1},\ E^{d_2}_{\tau_{k_j}+t}\to F_t^{d_2},\ E^{m_i}_{\tau_{k_j}+t}\to F_t^{d_{i+1}}\ \ (i=2,\ \dots,\ s),$$
$$A(\tau_{k_j}+t)\to \tilde{A}(t)$$

равномерно на отрезках.

Из рекуррентности $A(t)$ следует существование θ_k таких, что

$$\tilde{A}(\theta_k+t)\xrightarrow[k\to\infty]{} A(t) \text{ равномерно на отрезках.}$$

По теореме Асколи существует последовательность индексов k_j такая, что

$$F^{d_i}_{\theta_{k_j}+t}\xrightarrow[j\to\infty]{} L_t^{d_i} \text{ равномерно на отрезках.}$$

Положим $L^{d_i}\to L_0^{d_i}$. Разложение $E^n=L^{d_1}\dot{+}\ldots\dot{+}L^{d_{s+1}}$ — искомое.

Лемма 2 доказана.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $A(t)$ *рекуррентна и система* (2.1) *абсолютно регулярна. Пусть ее характеристические показатели устойчивы. Тогда разложение* (2.2), *удовлетворяющее требованиям* 1), 2) *леммы* 2, *обладает тем свойством, что если* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *— решения системы* (2.1) *и* $x_1(0)$, $x_2(0)$ *принадлежат одному и тому же подпространству* E^{m_j}, *то характеристические показатели решений* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Без ограничения общности будем считать, что $j=1$. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — решения системы (2.1); $x_1(0)$, $x_2(0)\in E^{m_1}$, но характеристический показатель $x_1(t)$ равен λ_i, а характеристический показатель $x_2(t)$ равен $\lambda_j\neq\lambda_i$ (пусть для определенности $\lambda_j<\lambda_i$). Без ущерба для общности будем считать, что всякое решение $x(t)$ системы (2.1) с начальным условием $x(0)\in E^{m_1}$ имеет характеристический показатель либо λ_i, либо λ_j, либо $<\lambda_j$. Рассмотрим линейное подпространство L^{d_3} векторов $x\in E^{m_1}$ таких, что решение системы (2.1), равное x при $t=0$, имеет характеристический показатель $<\lambda_j$ (может быть случай, когда $L^{d_3}=0$).

Пусть $L^{m_1-d_3}\subseteq E^{m_1}$ — линейное подпространство, такое, что

$$E^{m_1}=L^{d_3}\dot{+}L^{m_1-d_3}. \tag{2.3}$$

Пусть $L^{d_2}\subset L^{m_1-d_3}$ — линейное подпространство векторов x таких, что решение системы (2.1), равное x при $t=0$, имеет характеристический показатель $\leqslant\lambda_j$ (так как $L^{d_2}\bigcap L^{d_3}=0$, то этот показатель на самом деле равен λ_j); пусть $L^{d_1}\subset L^{m_1-d_1}$ — линейное подпространство такое, что

$$L^{m_1-d_3}=L^{d_2}\dot{+}L^{d_1}. \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) следует, что

$$E^{m_1}=L^{d_1}\dot{+}L^{d_2}\dot{+}L^{d_3}; \tag{2.5}$$

решения $\in L_t^{d_1}$ имеют характеристические показатели $=\lambda_i$,

решения $\in L_t^{d_2}$ имеют характеристические показатели $=\lambda_j$,

решения $\in L_t^{d_3}$ имеют характеристические показатели $<\lambda_j$.

Из теоремы 2 (см. также теорему 2 в [7]) вытекает (хотя $x_1(t)$ и $x_2(t)$ могут и не совпадать ни с одним из решений $x_i(t)$, о которых говорится в формулировке упомянутой теоремы), что для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое T, что множество $\Xi_{\varepsilon,\,T}$ тех $h>0$, для которых хотя бы при одном $\tau>T$ хотя бы для одного решения $x(t)\neq 0$ системы (2.1) такого, что $x(0)\in L^{d_1}$, выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{\tau}\ln\frac{\|x(h+\tau)\|}{\|x(h)\|}-\lambda_i\right|\geqslant\varepsilon, \tag{2.6}$$

или хотя бы для одного решения $x(t)\neq 0$ системы (2.1) такого, что $x(0)\in L^{d_2}$, выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{\tau}\ln\frac{\|x(h+\tau)\|}{\|x(h)\|}-\lambda_j\right|\geqslant\varepsilon, \tag{2.7}$$

или хотя бы для одного решения $x(t)\neq 0$ системы (2.1) такого, что $x(0)\in L^{d_3}$ выполнено неравенство $\frac{1}{\tau}\ln\frac{\|x(h+\tau)\|}{\|x(h)\|}-\lambda_k\geqslant\varepsilon$ ($\lambda_k<\lambda_j$), имеет относительную меру на полупрямой

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\operatorname{mes}\Xi_{\varepsilon,\,T}\bigcap[0,\ t]<\varepsilon. \tag{2.8}$$

Угол $\alpha(t)$ между $L_t^{d_1}$ и $L_t^{m_1-d_1}$ обладает, по условию, таким свойством: для всякого $\varepsilon>0$ множество F_ε тех t, для которых $\alpha(t)\leqslant\varepsilon$, относительно плотно на прямой, т. е. на всяком отрезке длины $\geqslant T(\varepsilon)$ найдется t, для которого $\alpha(t)\leqslant\varepsilon$.

Мы придем к противоречию с условием теоремы, построив для каждого $0<q<1$ и для каждого $\varepsilon>0$ систему

$$\dot{y}=B_\varepsilon(t)y \tag{2.9}$$

такую, что

$$\sup_{-\infty<t<+\infty}\|B_\varepsilon(t)-A(t)\|\leqslant\varepsilon, \tag{2.10}$$

имеющую решение с характеристическими показателями

$$\lambda\in(q\lambda_i+(1-q)\lambda_j-\varepsilon,\ q\lambda_i+(1-q)\lambda_j+\varepsilon)$$

(отсюда будет следовать неустойчивость характеристических показателей системы (2.1), так каких — конечное число, а чисел вида $q\lambda_i+(1-q)\lambda_j$ ($0<q<1$) — бесконечное число). При этом достаточно построить кусочно-непрерывную функцию $B_\varepsilon(t)$, так как в силу леммы Д. М. Гробмана (см. [1], стр. 400) по ней уже можно построить непрерывную $B_\varepsilon(t)$ с теми же свойствами. Для построения системы (2.9) воспользуемся приемом, впервые примененном в работах [8] — [10] и состоящим в следующем*:

Пусть $x'(t)$, $x''(t)$ — два решения системы (2.1) и угол между векторами $x'(t_0)$ и $x''(t_0)$ не больше ε. Пусть $U_\varepsilon(\tau)$ — ортогональное преобразование пространства E^n в себя,

---

* В [10] формулу (22) следует читать так: $de^{\frac{\delta}{2}T_0}\sin^2\frac{\delta}{2}\geqslant 1$, $T_0>1$. В [9] в формуле (19) вместо $\overline{\lim}$ следует читать $\underline{\lim}$ В [8], [9] в отличие от [1], ω по определению равно $\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X^{-1}((i+1)T,\ iT)\|^{-1}$ (тривиально проверяется, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что при $\|\varphi(t,\ y)\|<\delta\|y\|$ все показатели системы $\dot{y}=A(t)y+\varphi(t,\ y)$ превосходят $\omega-\varepsilon$). На это расхождение в определениях ω внимание автора любезно обратил Б. Ф. Былов.

дифференцируемое по τ и обладающее свойствами:

а) $U_\varepsilon(0)=E$,

б) $U_\varepsilon^{-1}(1)\,x'(t_0)$ коллинеарно $x''(t_0)$, (2.11)

в) $\|U_\varepsilon(\tau)-E\|\leqslant\varepsilon$, $\|\dot U_\varepsilon(\tau)\|\leqslant\varepsilon$.

Тогда система

$$\dot y = A_\varepsilon(t)\,y,$$

где

$$A_\varepsilon(t)=\begin{cases} U_\varepsilon^{-1}(t-t_0+1)\,A(t)\;U_\varepsilon(t-t_0+1)- \\ -U_\varepsilon^{-1}(t-t_0+1)\,\dot U_\varepsilon(t-t_0+1) & \text{при } t_0-1\leqslant t\leqslant t_0, \\ A(t) & \text{при остальных } t, \end{cases} \tag{2.13}$$

такова, что

$$\|A_\varepsilon(t)-A(t)\|\leqslant\varepsilon(2a+1)\;\;(-\infty<t<+\infty), \tag{2.14}$$

где $a=\sup\|A(t)\|$, и имеет решение

$$y(t)=\begin{cases} x'(t) & \text{при } t<t_0-1, \\ U_\varepsilon^{-1}(t-t_0+1)x'(t) & \text{при } t_0-1\leqslant t\leqslant t_0, \\ x'(t)\cdot\dfrac{\|x'(t_0)\|}{\|x''(t_0)\|} & \text{при } t\geqslant t_0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Преобразование $U_\varepsilon(\tau)$ с указанными свойствами легко построить; впрочем, это подробно сделано в работе [9].

Итак, пусть заданы q $(0<q<1)$ такое, что $q\lambda_i+(1-q)\lambda_j\neq\lambda_k$ $(k=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ и $\varepsilon>0$. Без ограничения общности считаем ε столь малым, что

а) всякое λ_k отличается от $q\lambda_i+(1-q)\lambda_j$ больше чем на ε;

б) $$\varepsilon<\frac{1}{4}\min_{\lambda_k\neq\lambda_l}|\lambda_k-\lambda_l|. \tag{2.16}$$

Зафиксируем T_0, удовлетворяющее неравенствам:

$$e^{\frac{\varepsilon}{2}T_0}\sin^2\varepsilon\geqslant1,\;T_0>1,\;\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\operatorname{mes}\Xi_{\varepsilon,\,T_0}\bigcap[0,\;t]<\frac{\varepsilon}{4\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}\|A(t)\|}. \tag{2.17}$$

Положим

$$T_1=\frac{8T_1'\cdot\sup\|A(t)\|}{\varepsilon}, \tag{2.18}$$

где $T_1'=T(\varepsilon)+T_0+3$.

Разобьем полупрямую $[0,\;+\infty)$ на равные отрезки длины T_1+2T_1', а каждый из этих отрезков разобьем на 4 отрезка, длины которых (слева направо) равны qT_1, T_1', $(1-q)T_1$, T_1'. При построении системы (2.9) будем для краткости и наглядности пользоваться следующим выражением, смысл которого разъясняется ниже. Пусть $x'(t)$ и $x''(t)$ — два решения системы (2.1) и пусть угол между векторами $x'(t_0)$ и $x''(t_0)$ меньше или равен ε. Выражение «перейдем с решения $x'(t)$ на решение $x''(t)$ в момент t_0» будет для нас равносильно следующему: «положим $B_\varepsilon(t)=A_\varepsilon(t)$ при $t_0-1\leqslant t\leqslant t_0$, где $A_\varepsilon(t)$ определено формулами (2.11), (2.13)».

Итак, строим систему (2.9).

1) На отрезке $[0,\;qT_1]$ положим $B_\varepsilon(t)=A(t)$ (возмущение равно нулю).

2) На отрезке $[qT_1+1,\ qT_1+1+T(\varepsilon)]$ найдется точка t_1, в которой угол между некоторым решением $x'(t)\in L_t^{d_1}$ и некоторым решением $x''(t)\in L_t^{d_2}+L_t^{d_3}$ не больше ε. Перейдем с решения $x'(t)$ на решение $x''(t)$ в момент t_1.

3) Если на отрезке

$$[qT_1+T_1',\ T_1+T_1'] \tag{2.19}$$

найдется точка, не принадлежащая множеству $\Xi_{\varepsilon,\,T_0}$, то пусть t_2 — нижняя грань множества таких точек. Пусть $x'''(t)$ — какое-нибудь решение системы (2.1), принадлежащее $L_t^{d_2}$. Пусть $x^{\mathrm{IV}}(t)=\alpha x'''(t)+\beta x''(t)$, причем α и β выбраны так, что угол между $x^{\mathrm{IV}}(t_2)$ и $x''(t_2)$ равен min (ε; угол между $x'''(t_2)$ и $x''(t_2)$).

Перейдем с решения $x''(t)$ на решение $x^{\mathrm{IV}}(t)$ в момент t_2. Из (2.16), (2.17) вытекает, что угол между $x^{\mathrm{IV}}(t_2+T_0)$ и $x'''(t_2+T_0)$ не превосходит ε. Перейдем с решения $x^{\mathrm{IV}}(t)$ на решение $x'''(t)$ в момент t_2+T_0.

4) Если на отрезке (2.19) нет точек, не принадлежащих множеству $\Xi_{\varepsilon,\,T_0}$, то пункт 3) пропускаем.

5) Если на отрезке

$$[T_1+2T_1',\ T_1+2T_1'+qT_1] \tag{2.20}$$

найдется точка, принадлежащая множеству $\Xi_{\varepsilon,\,T_0}$, то пусть t_3 — нижняя грань множества таких точек. Введем обозначение:

$$x^{\mathrm{V}}(t)=\begin{cases}x''(t), & \text{если пункт 3) пропущен;}\\ x^{\mathrm{IV}}(t), & \text{если пункт 3) не пропущен.}\end{cases}$$

Выберем решение $x^{\mathrm{VI}}(t)\in L_t^{d_1}$ так, чтобы на отрезке

$$[T_1+2T_1'+qT_1+T_0,\ T_1+2T_1'+qT_1+T_0+T(\varepsilon)] \tag{2.21}$$

нашлась точка t_4 такая, что угол между $x^{\mathrm{VI}}(t_4)$ и $L_{t_4}^{d_2}\dotplus L_{t_4}^{d_3}$ был не больше ε. Точно так же, как это описывается в пункте 3), перейдем в момент t_3 с решения $x^{\mathrm{V}}(t)$ на некоторое решение, затем в момент t_3+T_0 с этого решения — на решение $x^{\mathrm{VI}}(t)$.

6) Если на отрезке (2.20) нет точек, не принадлежащих множеству $\Xi_{\varepsilon,\,T_0}$, то пункт 5) пропускаем.

7) Если пункт 5) не пропущен, то точно так же, как описано в пункте 2) при $t=t_4$, где t_4 принадлежит отрезку (2.21), переходим с решения $x^{\mathrm{VI}}(t)$ на решение, принадлежащее $L_t^{d_2}\dotplus L_t^{d_3}$.

8) Если пункт 5) пропущен, то пункт 7) пропускаем.

9) Затем действуем, как в пункте 3), и т. д., но уже на отрезках, смещенных вправо: сначала на T_1+2T_1', затем на $2(T_1+2T_1')$ и т. д.

Всюду, кроме отрезков $[t_k-1,\ t_k]$ положим возмущение равным нулю:

$$B_\varepsilon(t)=A(t).$$

Пусть пункт 3) не пропускается. Будем говорить, что в пункте 3) «происходит задержка на время τ», если $t_2-qT_1-T_1'=\tau$.

Если пункт 3) пропускается, то будем говорить, что в пункте 3) «происходит задержка на время $\tau=T_1+T_1'-(qT_1-T_1')=(1-q)T_1$».

Аналогично, будем говорить, что в пункте 5) «происходит задержка на время qT_1», если он пропускается; происходит задержка на время $\tau = t_3 - T_1 - 2T_1'$», если он не пропускается. Ясно теперь, что если на каждом шаге в каждом из пунктов 3), 5) «происходит задержка на время, равное нулю», то в силу (2.18) решение $\overline{x}(t)$ так построенной возмущенной системы, совпадающее с $x'(t)$ при $t=0$, имеет характеристический показатель

$$\lambda \in \left(q\lambda_i + (1-q)\lambda_j - \frac{\varepsilon}{2},\ q\lambda_i + (1-q)\lambda_j + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

В пункте 3) (или в пункте 5)) «происходит задержка на время τ» на k-м шаге в том случае, если отрезок длины τ с началом в точке $(k-1)(T_1+2T_1') + qT_1 + T_1'$ (соответственно в точке $(k-1)(T_1+2T_1') + T_1 + 2T_1'$) принадлежит множеству $\Xi_{\varepsilon,\, T_0}$. Значит, в силу (2.18), решение $\overline{x}(t)$ построенной возмущенной системы ($\overline{x}(0) = x'(0)$) имеет характеристический показатель

$$\lambda \in (q\lambda_i + (1-q)\lambda_j - \varepsilon,\ q\lambda_i + (1-q)\lambda_j + \varepsilon).$$

Теорема доказана.

Л е м м а 3. *Пусть* $A(t)$ *рекуррентна и выполнены условия леммы* 2, *тогда существует замена переменных*

$$x = L(t)y, \tag{2.22}$$

приводящая систему (2.1) *к виду*

$$\dot{y} = B(t)y, \tag{2.23}$$

где $B = \operatorname{diag}\{B_1, \ldots, B_s\}$ *— блочно-диагональная матрица*, k-*й блок которой есть верхне-треугольная матрица порядка* m_k (m_k *— размерность подпространства* E^{m_k} *из леммы* 2), *при этом преобразование* $x = L(t)y$ *удовлетворяет условиям:*

$$\| L(t) \| \leqslant \mathrm{const},\ \| L^{-1}(t) \| \leqslant \mathrm{const},\ \| \dot{L}(t) \| \leqslant \mathrm{const}\ (-\infty < t < +\infty),$$

и, кроме того, $\dot{L}(t)$ *равномерно непрерывна на прямой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Почти все эти утверждения доказаны Б. Ф. Быловым в теореме 20.3.1 (см. [1]), кроме утверждения о том, что $\dot{L}(t)$ равномерно непрерывна. Докажем равномерную непрерывность $\dot{L}(t)$, где $x = L(t)y$ — преобразование, которое строится в доказательстве цитируемой теоремы Б. Ф. Былова. В «предложении» (в [4]) доказано, что если $A(t)$ равномерно непрерывна, то $\dot{U}(t)$ равномерно непрерывна, где $x = U(t)u$ — любое перроновское преобразование, приводящее систему (2.1) к треугольному виду.

В доказательстве теоремы 20.3.1 в [1] ограниченность $\dot{L}(t)$ доказывается ссылкой на ограниченность производной от матрицы перроновского преобразования; точно тем же рассуждением равномерная непрерывность матрицы $\dot{L}(t)$ выводится из равномерной непрерывности $\dot{U}(t)$, которая в силу «предложения» из [4] имеет место.

Лемма доказана.

Л е м м а 4. *Пусть* $A(t)$ *рекуррентна. Тогда существует преобразование* (2.22), *удовлетворяющее требованиям леммы* 3, *системы* (2.1) *к виду* (2.23), *удовлетворяющему требованиям леммы* 3, *причем* $B(t)$ *рекуррентна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Берем преобразование $x = L(t)y$, то самое, которое строится в доказательстве теоремы 20.3.1 в [1], и для него проводим те рассуждения, которые в доказательстве «предложения» в [4] проводятся для $x = U_k(t)u$ (в данном случае нужно считать, что $U_k(t)$ не зависит от k), опустив лишь доказательство равномерной непрерывности $\dot{U}_k(t)$ (равномерная непрерывность $\dot{L}(t)$ уже доказана выше в лемме 3).

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть* $A(t)$ *рекуррентна, система* (2.1) — *абсолютно регулярная и пусть ее характеристические показатели устойчивы. Приведем систему* (2.1) *преобразованием* (2.22), *удовлетворяющим требованиям леммы* 3, *к виду* (2.23), *удовлетворяющему требованиям леммы* 3, *причем* $B(t)$ *рекуррентна.*

Тогда для любых i *и* j ($1 \leqslant i < j \leqslant s$) *таких, что системы* $\dot{x}_i = B_i(t)x_i$ *и* $\dot{x}_j = B_j(t)x_j$ *имеют различные характеристические показатели (равные* λ_i *и* λ_j *соответственно), либо*

$$\frac{\| X_i(\tau)\, X_i^{-1}(t) \|^{-1}}{\| X_j(t)\, X_j^{-1}(\tau) \|} \geqslant d_0 e^{\varepsilon_0 (t-\tau)} \ (+\infty > t \geqslant \tau > -\infty) \tag{2.24}$$

для некоторых $d_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, *либо*

$$\frac{\| X_j(\tau)\, X_j^{-1}(t) \|^{-1}}{\| X_i(t)\, X_i^{-1}(\tau) \|} \geqslant d_0 e^{\varepsilon_0 (t-\tau)} \ (+\infty > t \geqslant \tau > -\infty) \tag{2.25}$$

для некоторых $\varepsilon_0 > 0$, $d_0 > 0$, *где* $X_i(t)$ — *фундаментальная матрица системы* $\dot{x}_i = B_i(t)x_i$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Пусть для некоторых i и j ($1 \leqslant i < j \leqslant s$) не выполнено ни (2.24), ни (2.25). Тогда найдется δ_0, $|\delta_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, такое, что в силу рекуррентности $B(t)$ имеем: для всякого T найдется $T_1 = T_1(T)$ такое, что на всяком отрезке, длина которого не меньше T_1, найдутся отрезки $[\tau', t']$ и $[\tau'', t'']$, длины которых не меньше T, такие, что системы

$$\dot{x}_i = (B_i(t) - \delta_0 E_i)x_i,$$

$$\dot{x}_j = (B_j(t) - \delta_0 E_j)x_j$$

(E_i и E_j — единичные матрицы) имеют решения (соответственно) $x_i'(t)$ и $x_j''(t)$, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{\| x_i'(t') \|}{\| x_i'(\tau') \|} \left(\frac{\| x_j(t') \|}{\| x_j(\tau') \|} \right)^{-1} \geqslant e^{\frac{1}{2}\delta_0 (t'-\tau')} \tag{2.26}$$

(их решения (соответственно) $x_i(t)$, $x_j(t)$ — любые) и удовлетворяющие неравенству

$$\frac{\| x_j''(t'') \|}{\| x_j''(\tau'') \|} \left(\frac{\| x_i(t'') \|}{\| x_i(\tau'') \|} \right)^{-1} \geqslant e^{\frac{1}{2}\delta_0 (t''-\tau'')}. \tag{2.27}$$

Считаем (без ущерба для общности) $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Фиксируем достаточно большое T_1', а затем фиксируем T_1 такое, что отношение T_1 / T_1' достаточно велико. Разобьем полупрямую $[0, +\infty]$ на равные отрезки длины $T_1 + 2T_1'$, а каждый из них разобьем на четыре отрезка, длины которых (слева направо) таковы: qT_1, T_1', $(1-q)T_1$, T_1'. Как и в доказательстве теоремы 4, построим систему (2.9) — (2.10), у которой есть характеристический показатель $\lambda \in (q\lambda_i + (1-q)\lambda_j - \varepsilon,\ q\lambda_i + (1-q)\lambda_j + \varepsilon)$, где число $q \in (0, 1)$ выбрано так, что $q\lambda_i + (1-q)\lambda_j \neq \lambda_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) (тогда и $\lambda \neq \lambda_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, что можно предположить без ограничения общности). Пользуясь (2.26), (2.27), мы точно так же, как в пункте 3) доказательства теоремы 4,

1) на $(2k-1)$-м отрезке длины переходим T_1' с решения вида $\{0,\ \ldots,\ x_j(t),\ \ldots,\ 0\}$ на другое решение (правило его выбора указано в пункте 3)) в некоторый момент t_{2k-1}, затем с этого решения — на решение вида $\{0,\ \ldots,\ x_i'(t),\ \ldots,\ 0\}$ в момент $t_{2k-1}+T_0$;

2) на $2k$-м отрезке длины T_1' переходим с решения вида $\{0,\ \ldots,\ x_i'(t),\ \ldots,\ 0\}$ на другое (правило его выбора указано в пункте 3)) решение в некоторый момент t_{2k}, затем с этого решения — на решение вида $\{0,\ \ldots,\ x_j''(t),\ \ldots,\ 0\}$ в момент $t_{2k}+T_2$. Везде, кроме отрезков $[t_k-1,\ t_k]$, полагаем $B_\varepsilon(t)=A(t)$. В результате получаем систему (2.9) — (2.10), одно из решений которой имеет характеристический показатель $\lambda\in(q\lambda_i+(1-q)\lambda_j-\varepsilon,\ q\lambda_i+(1-q)\lambda_j+\varepsilon)$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $A(t)$ *рекуррентна и вероятный спектр системы* (2.1) *устойчив. Тогда система* (2.1) *некоторым преобразованием* (2.22), *удовлетворяющим требованиям леммы* 3, *приводится к виду* (2.23), *удовлетворяющему требованиям леммы* 3, *причем* $B(t)$ *такова, что для всякого* $i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$, *для всяких двух диагональных элементов* $b'(t)$ *и* $b''(t)$ *матрицы* $B_i(t)$ *или матриц* $B_i(t)$ *и* $B_j(t)$ *таких, что* $\lambda_i=\lambda_j$, *имеем*

$$\overline{\lambda}_{b'(t)-b''(t)}=\underline{\lambda}_{b'(t)-b''(t)}=0,$$

где

$$\overline{\lambda}_{p(t)}=\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)\,d\xi\,,\ \underline{\lambda}_{p(t)}=\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)\,d\xi\,.$$

(Из теорем 5 и 6 вытекает, что система $\dot{x}=B(t)x$ удовлетворяет в этом случае условиям интегральной разделенности — близости; см. [1], стр. 537 — 540).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть для некоторого i это не так. Воспользовавшись леммой 1 из [4] и теоремами 1 — 3 (теоремы 1, 2 из [7]), получим абсолютно регулярную систему

$$\dot{x}=\tilde{B}(t)x\ \ (\tilde{B}(t)=\lim_{k\to\infty}B(t_k+t)),$$

у которой диагональные элементы $\tilde{b}'(t)$, $\tilde{b}''(t)$ таковы, что

$$\lambda_{\tilde{b}'(t)-\tilde{b}''(t)}=\lambda_{\tilde{b}'(t)-\tilde{b}''(t)}\neq 0,$$

($\lambda_{p(t)}$ означает $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t p(\tau)\,d\tau$). Применим к системе $\dot{x}=\tilde{B}(t)x$ теорему 4 и лемму 5, а если $b'(t)$, $b''(t)$ из разных блоков, то и теорему 5, а затем, воспользовавшись тем, что, в силу рекуррентности $B(t)$ [1],

$$B(t)=\lim_{k\to\infty}\tilde{B}(\theta_k+t),$$

получим, что разложение (2.2) не удовлетворяет требованию 2) леммы 3. Это противоречие доказывает теорему.

Теоремы 5 и 6 дают полный ответ на поставленный вопрос (о нахождении критерия устойчивости вероятного спектра), так как из условий интегральной разделенности — близости для любой системы (2.1) вытекает устойчивость характеристических показателей (см. [1], стр. 208 — 210, теорема 15.2.1).

Установим теперь следующий замечательный факт.

Пусть задано преобразование (2.22), удовлетворяющее требованиям леммы 3 и приводящее систему (2.1) к виду (2.23).

Определим на пространстве R_A динамической системы D_A функции $\beta_i(\tilde{A})$ формулами

$$\beta_i(\tilde{A}(t) = \lim_{k\to\infty} A(t_k + t)) = \mathrm{Sp}\,\tilde{B}_i(t), \tag{2.28}$$

$$\tilde{B}_i(t) = \lim_{k\to\infty} B_i(t_k + t). \tag{2.29}$$

Здесь $\lim$ означает не предел, а всякую предельную точку последовательности (в смысле равномерной сходимости на отрезках); таким образом, функции $\beta_i(\tilde{A})$, вообще говоря, — многозначные.

Т е о р е м а 7. *Пусть* $A(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 5 *и пусть преобразование* (2.22) *приводит систему* (2.1) *к виду* (2.23), *причем это преобразование и система* (2.23) — *те самые*, *о которых говорится в заключении теоремы* 6 (*и те самые*, *которые строятся в теореме* 20.3.1 *из* [1]). *Тогда функции* $\beta_i(\tilde{A})$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) *однозначны и непрерывны всюду на* R_A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (Всюду в доказательстве $\lim$ означает предел, равномерный на отрезках).

Пусть

$$\tilde{A}_1(t) = \lim_{k\to\infty} A(t_k + t),\ \tilde{A}_2(t) = \lim_{k\to\infty} A(\theta_k + t),\ \tilde{A}_1(t) = \tilde{A}_2(t),$$

$$\tilde{B}_i^{(1)}(t) = \lim_{k\to\infty} B_i(t_k + t),\ \tilde{B}_i^{(2)}(t) = \lim_{k\to\infty} B_i(\theta_k + t),$$

$$\beta_i^{(1)}(\tilde{t}) = \mathrm{Sp}\,\tilde{B}_i^{(1)}(t), \tag{2.30}$$

$$\beta_i^{(2)}(t) = \mathrm{Sp}\,\tilde{B}_i^{(1)}(t) \tag{2.31}$$

и пусть

$$\tilde{L}^{(1)}(t) = \lim_{k\to\infty} L(t_k + t),\ \tilde{L}^{(2)}(t) = \lim_{k\to\infty} L(\theta_k + t).$$

Преобразование $y = [\tilde{L}^{(1)}(t)]^{-1}\,[\tilde{L}^{(2)}(t)]z$ переводит систему $\dot{y} = \tilde{B}^{(1)}(t)\,\dot{y}$ в систему $\dot{z} = \tilde{B}^{(2)}(t)z$.

Докажем, что $\beta_i^{(1)}(t) \equiv \beta_i^{(2)}(t)$.

Рассуждение Б. Ф. Былова (см. [1], стр. 268, третий абзац) показывает, что нам достаточно рассмотреть случай $i = 1$, а это делается так же, как в доказательстве теоремы 5 из [6].

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь важный частный случай.

Т е о р е м а 8. *Пусть вероятный спектр системы* (2.1) *устойчив и пусть динамическая система* D_A (см. [5]) — *строго эргодическая*. *Тогда система* (2.1) *почти приводима* (см. [1], § 21).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если это не так, то (см. [1], стр. 276, следствие 21.1.2) для некоторого i найдется диагональный элемент $b(t)$ матрицы $B_i(t)$ такой, что $\overline{\lambda}_{b(t)} > \underline{\lambda}_{b(t)}$. В силу лемм 1, 2* из 4, теоремы 1 (теорема 1 из [7]) и теоремы 6 настоящей статьи, на

---

* Д. В. Аносов и Я. Г. Синай любезно обратили внимание автора на то, что лемма 2 в [4] доказана неправильно. Сохранив условия этой леммы, заменим ее утверждение следующим:

Тогда для всякого множества $A \subseteq R_f$ *такого, что* $\check{\mu}(A) = 1$, *на динамической системе* $D_{(f,\,g)}$ *существует инвариантная мера* μ *такая, что* $\mu(\widehat{A}) = \check{\mu}(A)$, *где* $\widehat{A}$ — *множество всех тех* $(\tilde{f},\ \tilde{g}) \in R_{(f,\,g)}$, *для которых* $\tilde{f} \in A$.

Это утверждение доказывается дословно так же, как лемма 2 в [6] (лемма 2 в [5]), если отображение $F: D_{(f,\,g)} \to D_f$ определить так:

$$F[(\tilde{f},\ \tilde{g})] = \tilde{f}.$$

динамической системе D_B найдется инвариантная мера ν_1, в которой почти все $\tilde{B}(t) \in R_B$ (множество N_1, $\nu_1(N_1)=1$) таковы, что система $\dot{y} = \tilde{B}(t)y$ абсолютно регулярна, и каждый диагональный элемент клетки $\tilde{B}_i(t)$ и всякой клетки $\tilde{B}_j(t)$ такой, что $\lambda_i = \lambda_j$, имеет среднее, равное $\overline{\lambda}_{b(t)}$, и найдется инвариантная мера ν_2, в которой почти все (множество N_2, $\nu_2(N_2)=1$) $\tilde{B}(t) \in R_B$ таковы, что система $\dot{y} = \tilde{B}(t)y$ — абсолютно регулярная и каждый диагональный элемент клетки $\tilde{B}_i(t)$ и всякой клетки $\tilde{B}_j(t)$ такой, что $\lambda_i = \lambda_j$ у $B_i(t)$ и $B_j(t)$, имеет среднее, равное $\underline{\lambda}_{b(t)}$. Так как для тех j, для которых $\lambda_j \neq \lambda_i$ (λ_k — характеристический показатель системы $\dot{x}_k = B_k(t)x_k$), в силу теоремы 2, средние диагональных элементов клеток $\tilde{B}_j(t)$ всегда либо больше $\overline{\lambda}_{b(t)}$, либо меньше $\underline{\lambda}_{b(t)}$, то полные прообразы инвариантных множеств N_1 и N_2 при отображении $F: R_A \to R_B$, определенном формулой $F(\lim\limits_{k\to\infty} A(t_k+t)) = \lim\limits_{k\to\infty} B(t_k+t)$ ($\lim$ означает здесь не предел, а всякую, предельную точку последовательности в смысле равномерной сходимости на отрезках; таким образом, отображение F, вообще говоря, многозначнее в обе стороны), не пересекаются:

$$F^{-1}(N_1) \cap F^{-1}(N_2) = \varnothing; \tag{2.32}$$

$F^{-1}(N_1)$ и $F^{-1}(N_2)$ — инвариантные множества в динамической системе D_A. Отображения F и F^{-1} переводят замкнутые множества в замкнутые. Отсюда следует, что на D_A найдутся инвариантные меры μ_1 и μ_2 такие, что

$$\mu_i(F^{-1}(N_i)) = 1 \ (i = 1,\ 2) \tag{2.33}$$

(доказательство такое же, как доказательство леммы 2 в [6]).

Из (2.32) и (2.33) вытекает, что меры μ_1 и μ_2 различны, чего по условию быть не может.

Теорема доказана (ее можно вывести также из теоремы 7).

Применим теперь полученные результаты к изучению систем (2.1) с почти периодическими коэффициентами.

Л е м м а 5. *Пусть* $A(t)$ — *почти периодическая по* t. *Для того чтобы показатели системы* (2.1) *были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы показатели всякой системы* $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ ($\tilde{A}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} A(t_k+t)$ — *предел равномерный на отрезках*) *были устойчивы*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть показатели системы (2.1) устойчивы и пусть $\tilde{A}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} A(t_k+t)$. Тогда существует $\{k_j\}$ такая, что $A(t_{k_j}+t) \underset{j\to\infty}{\to} \tilde{A}(t)$ равномерно на прямой. Поэтому характеристические показатели систем (2.1) и $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ совпадают.

Пусть

$$\| A_\varepsilon(t) - \tilde{A}(t) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{2.34}$$

Возьмем θ такое, что

$$\| \tilde{A}(\theta+t) - A(t) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{2.35}$$

Тогда из (2.34), (2.35) следует, что $\| A_\varepsilon(\theta+t) - A(t) \| \leqslant \varepsilon$. Значит, при малых ε показатели

В [4] имеется ссылка на кандидатскую диссертацию автора, которая напечатана в [17].

системы $\dot{x} = A_\varepsilon(t)x$ и показатели системы $\dot{x} = A(t)x$ (а значит, и системы $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$) мало отличаются друг от друга.

Лемма доказана.

Из леммы 5 и теоремы 8 вытекает

Теорема 9. *Пусть $A(t)$ — почти периодическая по t. Для того чтобы система* (2.1) *была почти приводима, необходимо и достаточно, чтобы ее показатели были устойчивы.*

Замечание 1. Почти приводимые системы с почти периодическими коэффициентами (в случае отсутствия кратных характеристических показателей) изучены Б. Ф. Быловым (см. [3]).

Б. Ф. Былов получил для таких систем обобщение теоремы Флоке — Ляпунова (см. [3], теорема 2). Заметим также, что этот результат Б. Ф. Былова может быть выведен из доказанной выше теоремы 7.

Замечание 2. В заметке [7] приведен пример не почти приводимой системы с почти периодическими коэффициентами (до построения этого примера вопрос о существовании таких систем оставался открытым). Подробное изложение этого примера, а также доказательство существования неправильных систем с почти периодическими коэффициентами см. в [11].

(Поступила в редакцию 26/XII 1967 г.)

Литература

1. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, Теория показателей Ляпунова, Москва, изд-во «Наука», 1966.
2. N. Bourbaki, Topologie generate, Chapitre 10: Espaces fonctionnels, Paris, 1949.
3. Б. Ф. Былов, О структуре решений системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, Матем. сб., **66** (**108**) (1965), 215—229.
4. В. М. Миллионщиков, Статистически правильные системы, Матем. сб., **75** (**117**) (1968), 140—151.
5. В. М. Миллионщиков, Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **179**, № **1** (1968), 20—23.
6. В. М. Миллионщиков, Метрическая теория линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. сб., **77** (**119**) (1968), 163—173.
7. В. М. Миллионщиков, Критерий устойчивости вероятного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами, ДАН СССР, **179**, № **3** (1968), 538—541.
8. В. М. Миллионщиков, Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем (дифференциальных уравнений, Успехи матем. наук, **XXIII**, вып. **1** (**139**) (1968), 213.
9. В. М. Миллионщиков, Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем, Сиб. матем. ж., **X**, № **1** (1969).
10. В. М. Миллионщиков, Критерий малого изменения направлений решений линейной системы дифференциальных уравнений при малых возмущениях коэффициентов системы, Матем. заметки, **4**, вып. **2** (1968), 173—180.
11. В. М. Миллионщиков, Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, Дифф. уравнения, **IV**, № **3** (1968), 391—396.
12. В. И. Оселедец, Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем, Труды Моск. матем. об-ва, **19** (1968),. 179—1210.

13. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных: уравнений, Москва — Ленинград, Гостехизд;ат, 1949.

14. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, изд-во «Наука», 1968.

15. В. М. Миллионщиков, О неустойчивости характеристических показателей статически правильных систем, Матем. заметки, **2**, вып. **3** (1967), 315—318.

16. В. М. Миллионщиков, О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью линейных систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, Дифф. уравнения, **III**, № **12** (1967), 2127—2134.

17. В. М. Миллионщиков, К спектральной теории неавтономных систем линейных, дифференциальных уравнений, Труды Моск. матем. об-ва, **18** (1968), 146—186.