СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X, № 1 **Январь — Февраль** **1969 г.**

УДК 517.9

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С постановкой вопроса, который решается в настоящей работе, читатель может познакомиться по книге ((2), гл. III, §§ 8, 13), где даны, в частности, все относящиеся сюда определения.

Здесь я только скажу кратко, что центральные показатели Ω и ω линейной системы

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{1}$$

($\|A(t)\| \leqslant a$, $A(t)$ кусочно-непрерывна по t; $t \geqslant t_0$), введенные Р. Э. Виноградом (см. (1) и (2), гл. III, § 8, 13), служат для оценки сверху и снизу всех характеристических показателей системы $\dot{y} = A(t)\,y + \varphi(y,\, t)$ где $\|\varphi(y,\, t)\| \leqslant \delta \|y\|$ малом δ. А именно, имеет место теорема 13.2.1 из (2) (стр. 164). С другой стороны, Р. Э. Виноград высказал предположение, что эти оценки неулучшаемы ((2), стр. 164), и доказал, что это действительно так в частном случае, когда система (1) диагональная ((2), стр. 168—186, теоремы 13.3.1. и 13.3.3).

В настоящей работе* доказывается неулучшаемость этих оценок для произвольной системы (1).

Т е о р е м а. *Центральные показатели достижимы, т. е. для всякого* $\varepsilon > 0$ *существуют кусочно-непрерывные матричные функции* $B_\varepsilon(t)$ *и* $C_\varepsilon(t)$, $\|B_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$, $\|C_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$, *такие, что у системы*

$$\dot{y} = A(t)\,y + B_\varepsilon(t)\,y \tag{2}$$

найдется решение с характеристическим показателем $> \Omega - \varepsilon$, *а у системы*

$$\dot{y} = A(t)\,y + C_\varepsilon(t)\,y \tag{3}$$

найдется решение с характеристическим показателем $< \omega + \varepsilon$.

1. Сначала изложим идею доказательства теоремы.

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (1). Положим $X(t,\, s) = X(t)\,X^{-1}(s)$. Выберем T так, чтобы число

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \|X((i+1)\,T,\; iT)\| \tag{$*$}$$

мало отличалось от Ω (см. (2), стр. 116, формула (8.7)). Пусть x_i ($i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$) — единичный вектор, для которого

$$\|X((i+1)\,T,\; iT)\,x_i\| = \|X((i+1)\,T,\; iT)\|.$$

Положим $x_i(t) = X(t,\; iT)\,x_i$ (решения системы (1)).

На отрезке $[0,\; T]$ решение $x_0(t)$ имеет максимальный рост (среди других решений). На отрезке $[T,\; 2T]$ решение $x_1(t)$ растет не медленнее $x_0(t)$; пусть быстрее. Тогда возмутим систему (1) так, чтобы за время $\ll T$ между решением $x_0(t)$ системы (1) и решением $y_0(t)$ возмущенной системы, совпадающим при $t = T$ с $x_0(t)$, образовался угол ε (причем

---

* Результаты настоящей работы опубликованы в (3).

чтобы этот угол лежал в плоскости векторов $x_0(t)$, $x_1(t)$, вычисленных в тот момент, когда этот угол $=\varepsilon$). Затем (т. е. при бóльших t) положим возмущение равным нулю. Так как $x_1(t)$ на рассматриваемом отрезке растет быстрее $x_0(t)$, то угол между решениями $y_0(t)$ и $x_1(t)$ через некоторое время (оказывается, что это время можно считать $\ll T$) станет $\leqslant \varepsilon$. Незадолго до этого момента снова возмутим систему (1) так, чтобы через время $\ll T$ решение $y_0(t)$ стало коллинеарным $x_1(t)$, после чего положим возмущение снова $=0$ вплоть до $t=2T$.

На отрезке $[2T,\ 3T]$ аналогично «перейдем» за время $\ll T$ на решение $x_2(t)$ (которое на нем имеет максимальный рост) и так далее, на каждом отрезке $[nT,\ (n+1)T]$ будем «переходить» на решение $x_n(t)$. В результате мы получаем возмущенную систему, имеющую решение с характеристическим показателем, близким к $(*)$, что и требовалось доказать.

2. Теперь перейдем к изложению доказательства во всех деталях. Пусть дано $\varepsilon > 0$.

1) В любом треугольнике ABC по теореме синусов
$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle B} \geqslant \sin \sphericalangle A. \tag{4}$$

Зафиксируем T_0 такое, что
$$e^{\frac{\varepsilon}{2}T_0} \cdot \sin^2 \varepsilon \geqslant 1. \tag{5}$$
Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ таковы, что
$$\frac{B_1C_1}{A_1C_1} : \frac{BC}{AC} \geqslant e^{\frac{\varepsilon}{2}T_0}; \quad \sphericalangle A = \varepsilon. \tag{6}$$
Тогда из (4), (5), (6) имеем
$$\sin \sphericalangle B_1 \leqslant \frac{A_1C_1}{B_1C_1} \leqslant e^{-\frac{\varepsilon}{2}T_0} \cdot \frac{1}{\sin \varepsilon} \leqslant \sin \varepsilon \leqslant 1,$$
откуда $\sphericalangle B_1 \leqslant \varepsilon$ (так как из $A_1C_1 / B_1C_1 \leqslant 1$ вытекает, что $\sphericalangle B_1 \leqslant \sphericalangle A_1$, а значит, $\sphericalangle B_1 < \pi/2$).

2) Фиксируем произвольную фундаментальную матрицу $X(t)$ системы (1) и положим
$$X(t,\ s) = X(t)\, X^{-1}(s).$$
Фиксируем теперь T такое, что
$$4\,(2a+\varepsilon)\, T_0 / T < \varepsilon / 4, \tag{7}$$
$$T_0 / T = s \text{ — целое}, \tag{8}$$
$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \| X((i+1)\,T,\ iT) \| > \Omega - \frac{\varepsilon}{4} \tag{9}$$
(возможность такого выбора T доказана в ([2]), стр. 116, формула (8.7)).

3) Обозначим через x_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ единичный вектор, для которого
$$\| X((i+1)\,T,\ iT)\, x_i \| = \| X((i+1)\,T,\ iT) \| \tag{10}$$
(если таких векторов (при данном i) несколько, то берем любой из них). Пусть
$$x_i(t) = X(t,\ iT)\, x_i \tag{10'}$$
решения системы (1).

Положим $B_\varepsilon(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть
$$\frac{\| x_1(2T) \|}{\| x_1(T) \|} : \frac{\| x_0(2T) \|}{\| x_0(T) \|} \geqslant e^{\frac{\varepsilon}{2}T}.$$
(Если это не так, то положим $B_\varepsilon(t) = 0$ при $T < t \leqslant 2T$) Разделим отрезок $[T,\ 2T]$ на s равных частей (длины T_0, см. формулу (8)): $Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_s$. Пусть Q_{j_0} — первый из

отрезков $Q_i = [a_i,\ b_i]$ $(i = 2,\ 3,\ \ldots,\ s-1)$, на которых

$$\frac{\| x_1(b_i) \|}{\| x_1(a_i) \|} : \frac{\| x_0(b_i) \|}{\| x_0(a_i) \|} \geqslant e^{\frac{\varepsilon}{2} T_0}. \tag{11}$$

(Если таких отрезков нет, то положим $B_\varepsilon(t) = 0$ при $T < t \leqslant 2T$.) Обозначим теперь для удобства начала и концы отрезков Q_{j_0-1}, Q_{j_0} по порядку $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$.

Зададим возмущение $B_\varepsilon(t)$ при $T < t \leqslant 2T$ следующим образом.

А) При $T < t \leqslant 2T$, $t \notin Q_{j_0-1} \cup Q_{j_0} = [\tau_1,\ \tau_3]$ положим $B_\varepsilon(t) = 0$.

Б) При $t \in Q_{j_0-1} = [\tau_1,\ \tau_2]$ положим

$$B_\varepsilon(t) = U_\varepsilon^{-1}(t)\, A(t)\, U_\varepsilon(t) - U_\varepsilon^{-1}(t)\, U_\varepsilon(t) - A(t) \tag{12}$$

(заметим, что так как $x_0(t)$ — решение системы (1), то

$$y_0(t) = \begin{cases} U_\varepsilon^{-1}(t)\, x_0(t) & \text{при} \quad t \in [\tau_1,\ \tau_2], \\ x_0(t) & \text{при} \quad t < \tau_1, \end{cases}$$

есть решение системы (2), (12)), где $U_\varepsilon(t)$ — ортогональная матрица, обладающая свойствами:

$$\text{а) } U_\varepsilon(\tau_1) = E. \tag{13}$$

$$\text{б) } U_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon / T_0, \tag{14}$$

В) вектор

$$y_0(\tau_2) = U^{\varepsilon-1}(\tau_2)\, x_0(\tau_2) = \alpha_1 x_0(\tau_2) + \alpha_2 x_1(\tau_2) \quad (\alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_2 > 0) \tag{15}$$

и угол

$$\sphericalangle\, (\widehat{x_0(\tau_2),\ y_0(\tau_2)}) = \varepsilon. \tag{16}$$

(Если угол $\sphericalangle\, (\widehat{x_0(\tau_2),\ x_1(\tau_2)}) < \varepsilon$, то положим $B_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in [\tau_1,\ \tau_2]$.) Из (13) и (14) вытекает, что

$$\| B_\varepsilon(t) \| \leqslant (2a+1)\, \varepsilon.$$

Легко убедиться в существовании такой матрицы $U_\varepsilon(t)$. Пусть E^{n-2} — ортогональное дополнение к плоскости E^2, натянутой на векторы $x_0(\tau_2)$ и $x_1(\tau_2)$; положим преобразование $x = U_\varepsilon(t)\, y$ равным ортогональному преобразованию, единичному на E^{n-2} и являющемуся поворотом на угол $-\varepsilon\,(t - \tau_1)/T_0$ (считая в направлении от $x_0(\tau_2)$ к $x_1(\tau_2)$) в плоскости E^2.

В) В силу (15), (16), (11), (5), угол

$$(\widehat{z_0(\tau_3),\ x_1(\tau_3)}) \leqslant \varepsilon \text{ (см. пункт 1)),}$$

где обозначено при $t \in [\tau_2,\ \tau_3]$:

$$\sphericalangle\, z_0(t) = \alpha_1 x_0(t) + \alpha_2 x_1(t)$$

(α_1 и α_2 определены формулой (15)).

При $t \in [\tau_2,\ \tau_3]$ положим $B_\varepsilon(t)$ снова удовлетворяющим (12) — (14), только в (13) τ_2 вместо τ_1, но вместо (15), (16) потребуем от $U_\varepsilon(t)$, чтобы вектор $U_\varepsilon^{-1}(\tau_3)[\alpha_1 x_0(\tau_3) + \alpha_2 x_1(\tau_3)]$ был коллинеарен вектору $x_1(\tau_3)$.

4) Построим далее возмущение $B_\varepsilon(t)$ на отрезке $[2T,\ 3T]$, исходя из решения $x_1(t)$, аналогично тому как сделали это на отрезке $[T,\ 2T]$, исходя из решения $x_0(t)$; затем на отрезке $[3T,\ 4T]$ и т. д.

Решение $y_0(t)$, $y_0(0) = x_0(0)$ так построенной системы (2) имеет характеристический показатель $>\Omega-\varepsilon$. Докажем это. В силу формул (9), (10), (10′) достаточно доказать, что при любом $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\frac{\| y_0((i+1)\,T)\|}{\| y_0(iT)\|} \geqslant \frac{\| x_i((i+1)\,T)\|}{\| x_i(iT)\|} e^{-\frac{3\varepsilon}{4}T}.$$

Из построения решения $y_0(t)$ ясно, что при каждом фиксированном i число тех k, для которых не выполнено неравенство

$$\frac{\| y_0(iT+(k+1)\,T_0)\|}{\| y_0(iT+kT_0)\|} \geqslant \frac{\| x_i(iT+(k+1)\,T_0)\|}{\| x_i(iT+kT_0)\|} e^{-\frac{\varepsilon}{2}T_0}, \tag{17}$$

не превосходит 4. Для тех k, при которых не выполнено (17), воспользуемся очевидным неравенством

$$\frac{\| y_0(iT+(k+1)\,T_0)\|}{\| y_0(iT+kT_0)\|} \geqslant \frac{\| x_i(iT+(k+1)\,T_0)\|}{\| x_i(iT+kT_0)\|} e^{-(2a+\varepsilon)T_0}. \tag{18}$$

Перемножив неравенства (17) и (18) при всех $k=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1$, получим

$$\frac{\| y_0((i+1)\,T)\|}{\| y_0(iT)\|} \geqslant \frac{\| x_i((i+1)\,T)\|}{\| x_i(iT)\|} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{4(2a+\varepsilon)T_0}{T}\right)T} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\| x_i((i+1)\,T)\|}{\| x_i(iT)\|} e^{-\frac{3}{4}\varepsilon T}.$$

2′. Теперь докажем достижимость ω. Зафиксируем T_0, удовлетворяющее (5). Затем выберем T так, чтобы выполнялись (7), (8) и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \| X^{-1}((i+1)\,T,\ iT)\| > -\omega - \frac{\varepsilon}{4} \tag{19}$$

(см. ([2]), стр. 117). Затем точно так же, как в пункте 1), но идя не от $t=0$ в сторону увеличения времени, а от $t=mT$ в сторону уменьшения времени, мы построим возмущение $C_{\varepsilon,\,m}(t)$ ($t\leqslant mT$) и решение $y_m(t)$ системы $\dot{y}=A\,(t)\,y+C_{\varepsilon,\,m}(t)$ такое, что

$$\frac{\| y_m((i-1)\,T)\|}{\| y_m(iT)\|} \geqslant \| X^{-1}(iT,\ (i-1)\,T)\| \, e^{-\frac{3\varepsilon}{4}T} \quad (i=m,\ m-1,\ \ldots). \tag{20}$$

Заметим, что можно выбрать последовательность индексов $\{m_j\}$ такую, что последовательность функций $C_{\varepsilon,\,m_j}(t)$ ($j=1,\ 2,\ \ldots$) сходится равномерно на отрезках к некоторой функции $C_\varepsilon(t)$, имеющей точки разрыва (первого рода) только в некоторых из точек kT_0 ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$), а последовательность $y_{m_j}(t)$ сходится равномерно на отрезках к некоторой функции $y\,(t)$, которая по теореме о непрерывной зависимости от правой части и от начальных условий является решением системы (3). Переходя в (20) к пределу при $m=m_j$, $j\to\infty$, получаем

$$\frac{\| y\,((i-1)\,T)\|}{\| y\,(iT)\|} \geqslant \| X^{-1}(iT,\ (i-1)\,T)\| \, e^{-\frac{3}{4}\varepsilon T} \quad (i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots). \tag{21}$$

Из (21) и (19) имеем: характеристический показатель решения $y\,(t)$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \| y\,(t)\|}{t} = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\ln \| y\,(kT)\|}{kT} =$$

$$= \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \frac{\| y\,((i+1)\,T)\|}{\| y\,(iT)\|} < \omega+\varepsilon.$$

З а м е ч а н и е. Проверим, что доказательство остается в силе и в случае комплексной матрицы $A\,(t)$. (На целесообразность такой проверки мне указал Р. Э. Виноград.)

В комплексном случае достаточно сделать следующие небольшие изменения:

1) описание построения матрицы $U_\varepsilon(t)$ заменить следующим: выберем в комплексном n-мерном пространстве C^n, в котором задана система (1), ортонормированный базис $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ такой, что $u_1,\ u_2 \in E^2$ (где E^2 — множество векторов вида $\lambda x_0(\tau_2) + \mu\gamma x_1(\tau_2)$ с действительными λ и μ, γ — некоторое комплексное число, причем репер $u_1,\ u_2$ имеет в E^2 ту же ориентацию, что и репер $x_0(\tau_2),\ \gamma x_1(\tau_2))$; зададим унитарное преобразование $x = U_\varepsilon(t)\,y$, которое в базисе $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ задается матрицей (с $\tau = (t-\tau_1)/T_0$):

$$\begin{pmatrix} \cos\varepsilon\tau & \sin\varepsilon\tau & & & \\ -\sin\varepsilon\tau & \cos\varepsilon\tau & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix};$$

2) слово «ортогональная» заменить всюду на «унитарная», а $x_1(t)$ — на $\gamma x_1(t)$.

Я благодарен Р. Э. Винограду за обсуждение результата.

Поступило
11.V.1967

ЛИТЕРАТУРА

[1] В и н о г р а д Р. Э., О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений, Матем. сб., 42, № 2 (1957), 207—222.

[2] Б ы л о в Б. Ф., В и н о г р а д Р. Э., Г р о б м а н Д. М., Н е м ы ц к и й В. В., Теория показателей Ляпунова, Изд. «Наука», М., 1966.

[3] М и л л и о н щ и к о в В. М., Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем дифференциальных уравнений, Успехи матем. наук, т. XXIII, № 1 (1968), стр. 213 (тезисы).