МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 5, № 1 (1969), 49—54

УДК 517.9

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О СИСТЕМАХ В ВАРИАЦИЯХ ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.М. Миллионщиков

Динамическую систему, заданную векторным полем класса C^2 на n-мерном гладком замкнутом многообразии V^n, назовем дифференциально-однородной, если для всяких $v, w \in V^n$ существует диффеоморфизм V^n на себя, переводящий v в w и коммутирующий со сдвигом по траектории (на любое время t). Доказывается, что все системы в вариациях такой системы почти приводимы.

Далее рассматриваются динамические системы, заданные векторными полями $f(v)$, эргодические в смысле одного и того же интегрального инварианта (почти все системы в вариациях каждой такой системы имеют одни и те же показатели $\lambda_1(f) \geqslant \lambda_2(f) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(f)$). Доказывается, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(f)$ — полунепрерывная сверху функция от $f(v)$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$.

Библ. 12 назв.

§ 1. Рассмотрим динамическую систему Δ, заданную векторным полем класса C^2 на n-мерном гладком замкнутом многообразии V^n. Важные замечания о системах в вариациях такой динамической системы сделаны Д. В. Аносовым (см. [1], стр. 7—8, 50). Дополнительно сделаем следующие замечания.

Введем в V^n любую гладкую риманову метрику, зафиксируем ее и рассмотрим соответствующую ей риманову связность (см. [10], § 94). Систему в вариациях вдоль траектории $v(t)$ системы Δ будем записывать следующим образом. Зафиксируем в касательном пространстве к V^n (в точке $v(0)$) ортонормированный репер $r_1^{(0)}, \ldots, r_n^{(0)}$, а результат его параллельного перенесения вдоль дуги $v(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$ (в силу зафиксированной римановой связности) обозначим через $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ (это — тоже ортонорми-рованный репер). Отображения касательных пространств к V^n (взятых в точках кривой $v(t)$) будем записывать в полученных реперах; в результате мы получаем «глобальную» (т. е. не использующую локальных координат) запись системы в вариациях вдоль траектории $v(t)$:

$$\dot{x} = A(t)x \quad (x \in R^n) \tag{1}$$

($A(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на прямой).

Отметим, как это принято, что $A(t)$ не тензор (потому что при замене $x = L(t)y$ $A(t)$ преобразуется по формуле $L^{-1}AL - L^{-1}L$). Выбрав вместо репера $r_1^{(0)}, \ldots, r_n^{(0)}$ ортонормированный репер $s_1^{(0)}, \ldots, s_n^{(0)}$ (выражающийся через $r_1^{(0)}, \ldots, r_n^{(0)}$ с помощью ортогональной матрицы U), мы получим вместо (1) систему

$$\dot{y} = U^{-1}AUy \quad (y \in R^n)$$

(поскольку $s_1(t), \ldots, s_n(t)$ также выражается через $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ с помощью матрицы U). Мы получаем следующее утверждение.

Л Е М М А 1. *Пусть* $v(t)$ *— траектория динамической системы* Δ *и (1) —система в вариациях вдоль нее (для некоторого репера* $r_1^{(0)},\dots,r_n^{(0)}$ *в касательном пространстве* $R^n_{v(0)}$ *), и пусть*

$$v(t_R)\underset{R\to\infty}{\to}\tilde v\in V^n.$$

Пусть, далее, $\dot x=\tilde A(t)x$ *— система в вариациях вдоль траектории* $\tilde v(t)(\tilde v(0)=\tilde v)$ *(для некоторого репера* $s_1^{(0)},\dots,s_n^{(0)}$ *в касательном пространстве* $R^n_{\tilde v}$*). Тогда найдутся ортогональные матрицы* $U_R\,(k=1,2,\dots)$ *и U такие, что*

$$U_R^{-1}A(t_R+t)U_R\underset{R\to\infty}{\to}U^{-1}A(t)U$$

равномерно на отрезках.

О п р е д е л е н и е. Динамическую систему Δ, заданную векторным полем класса C^2 на n-мерном гладком замкнутом многообразии V^n, назовем *дифференциально-однородной*, если для всяких $v\in V^n, w\in V^n$ существует диффеоморфизм $\chi\, V^n$ на себя, коммутирующий со сдвигом по траекториям (на любое время t) и такой, что $\chi(v)=w$.

Т Е О Р Е М А 1. *Система в вариациях вдоль любой траектории* $v(t)$ *дифференциально-однородной системы* Δ *почти приводима (см. [2], § 21), а системы в вариациях вдоль равных траекторий приводимы (см. [3], гл. III, § 2 или [2], § 18) одна к другой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В V^n найдется минимальное множество M системы Δ ([3], гл. V, § 7); в силу дифференциальной однородности системы ΔV^n разбито на множества, гомеоморфные M, также являющиеся минимальными. Значит, все траектории системы — рекуррентные.

Рассмотрим множество R_A (см. [7]) матричных функций вида $\tilde A(t)=\lim\limits_{k\leftarrow\infty}A(t_k+t)$ (предел, равномерный на отрезках), насытим его (см. [11], § 9) по отношению эквивалентности: $A_1(t)\sim A_2(t)$, если существует ортогональная матрица U такая, что $A_1(t)=U^{-1}A_2(t)U$, наделим это насыщение топологией равномерной сходимости на отрезках (при этом получим компакт (см. [3], стр. 533—535) и возьмем факторпространство (см. [11], § 9) полученного компакта по упомянутому выше отношению эквивалентности.

Получим компакт $\hat R_A$, на котором зададим динамическую систему $\hat D_A$ по формуле

$$f(\tilde A(t),\tau)=\tilde A(t+\tau)$$

(см. [3], стр. 534, [7], стр. 2127).

В силу леммы 1, если $\dot x=A(t)x$ — система в вариациях вдоль рекуррентной траектории, то траектория $f(A(t),\tau)$ в динамической системе $\hat D_A$ рекуррентна. Точно так же, как теорема 1 в [7], доказывается, что систему $\dot x=A(t)x$ перроновским преобразованием $x=U(t)u$ (см. [2], стр. 261—266) можно привести к треугольному виду $\dot u=P(t)u$ с рекуррентной (см. [7], определение 1) матрицей $P(t)$.

Найдется правильная система $\dot u=\tilde P(t)u$, где $\tilde P(t)=\lim\limits_{k\leftarrow\infty}P(t_k+t)$ (предел, равномерный на отрезках) (см. [4] или [5], хотя [5] — краткое изложение, но этот факт там доказан полностью*)), а значит, в силу предложения (*) из [4] найдется правильная система $\dot x=A(t)x$, где $\tilde A(t)=\lim\limits_{k\leftarrow\infty}A(t_k+t)$ (предел, равномерный на отрезках).

---

*) Позже мне стало известно, что это утверждение доказало также в [8].

В силу дифференциальной однородности системы Δ системы в вариациях вдоль разных траекторий приводимы одна к другой. Значит, все системы в вариациях — правильные. Но тогда в силу леммы из [7], предложения (*) из [4], теоремы Ляпунова (см. [2], стр. 141) и теоремы Вылова (см. [2], стр. 276, следствие 21.1.2) все они почти приводимы. Теорема 1 доказана.

§ 2. Рассмотрим все динамические системы Δ_f, заданные векторными полями $f(v)$ класса C^2 на n-мерном гладком замкнутом многообразии V^n, имеющие одну и ту же транзитивную инвариантную меру μ, порожденную некоторой римановой метрикой $(\mu(V^n)=1)$. Системы в вариациях вдоль траекторий такой системы будем записывать, как в § 1. Через почти все точки $v \in V^n$ проходят траектории, системы в вариациях вдоль которых имеют одни и те же характеристические показатели $\lambda_1(f) \geqslant \lambda_2(f) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(f))$ (см. [8, 4, 5]).

ТЕОРЕМА 2. *Функция* $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(f)$ *есть полунепрерывная сверху функция от* $f(v)$ (для $f(v)$ *берем метрику* C^1*) для всякого* $k=1,2,\ldots,n.$

Прежде чем доказывать эту теорему, сформулируем следствия, которые непосредственно вытекают из нее и оценки (2), полученной Г. А. Маргулисом (см. ниже).

Следствие 1. *Пусть энтропия* Δ_{f0} *равна* $\sum_{\lambda_i(f_0)>0}\lambda_i(f_0)$. *Тогда при малом возмущении векторного поля* $f_0(v)$ *энтропия системы не может сильно возрасти.*
Следствие 2. *Оценка* Г. *А. Маргулиса*

$$H(\Delta_j) \leqslant \sum_{\lambda_i(j)>0}\lambda_i(f) \tag{2}$$

устойчивая, т. е. для $f_\varepsilon(v), \| f_\varepsilon - f \| C^1 < \varepsilon,$

$$H(\Delta_{j\varepsilon}) < \sum_{\lambda_i(j)>0}\lambda_i(f) + \delta(\varepsilon),$$

где $\delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$

Замечание. Здесь в определении энтропии двоичный логарифм заменен натуральным. Понятие энтропии динамической системы принадлежит А. Н. Колмогорову см. ([12]).

Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 2 из [6] (в данном случае в [5] надо заменить D_A на $\hat{D}_A$ (см. § 1); на доказательствах это не отражается; в качестве $\dot{x} = A(t)x$ можно взять систему в вариациях вдоль траектории, всюду плотной на V^n) для всякого $\varepsilon>0$ найдутся число T и множество $M_\varepsilon \subseteq V^n, \mu(M_\varepsilon)>1-\varepsilon,$ такие, что если $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ — система в вариациях вдоль траектории $v(t), v(0) \in M_{\varepsilon,}$ то

$$\frac{1}{T}\ln\frac{\langle x_1(T),\ldots,x_k(T)\rangle}{\langle x_1(0),\ldots,x_k(0)\rangle} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(f)+\varepsilon$$

для всяких решений $x_1(t),\ldots,x_k(t)$ системы $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ ($\langle x_1,\ldots,x_k\rangle$ обозначает объем (неориентированный) параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1,\ldots,x_k$).

Пусть $\|g-f\|_{C^1} < \delta(\delta=\delta(\varepsilon)$ выберем позже). Для почти всякой траектории $w(t)$ (мы можем считать ее всюду плотной) системы Δ_g относительное время ее пребывания в M_ε больше $1-\varepsilon.$ Пусть $v_{w(t)}(t)$ — траектория системы Δ_f, совпадающая с $w(t)$ при $t=\tau.$ Если $\delta>0$ достаточно мало, $v_{w(t)}(t)$ и $w(t)$ и системы в вариациях вдоль них близки при $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T$. Таким образом, при достаточно малом δ для почти всякой траектории $w(t)$ системы Δ_g множество тех τ, для которых

$$\frac{1}{T}\ln\frac{\left\langle y_1(\tau+T),...,y_k(\tau+T)\right\rangle}{\left\langle y_1(\tau),...,y_k(\tau)\right\rangle} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(f)+2\varepsilon \qquad (3)$$

(для всяких решений $y_1(t),...,y_k(t)$ системы в вариациях $\dot{y}=B(t)y$ вдоль $w(t)$), имеет относительную меру на прямой >1-ε. В силу теоремы 2 из [6] мы можем (без ограничения общности) считать, что систему $\dot{y}=B(t)y$ перроновским преобразованием можно привести к треугольному виду, обладающему свойствами, указанными в цитируемой теореме. Но тогда в силу формулы (20.3) на стр. 263 в [2] решения $y_1(t),...,y_k(t)$ системы $\dot{y}=B(t)y$ можно выбрать так, что левая часть (3) равна

$$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{k}\int_{\tau}^{\tau+T}p_{ii}(\xi)d\xi.$$

Имеем, следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T}\sum_{i=1}^{k}p_{ii}(\xi)d\xi d\tau \leqslant \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(f)+2(a+1)\varepsilon. \qquad (4)$$

где $a=\sup_t\left\|A(t)\right\|$.

Легкий подсчет (см. [2], стр. 540—541) показывает, что левая часть (4) равна

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{i=1}^{k}p_{ii}(\tau)d\tau=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(g).$$

Теорема 2 доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
16.1.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды Матем. ин-та АН СССР, 90 (1967).

[2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова, М., 1966.

[3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М., 1949.

[4] Миллионщиков В. М., Статистически правильные системы, Матем. сб., 75, № 1 (1968), 154—165.

[5] Миллионщиков В. М., Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР, 179, № 1 (1968), 20-23.

[6] Миллионщиков В. М., Критерий устойчивости вероятного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами, Докл. АН СССР, 179, № 3 (1968), 538—541.

[7] Миллионщиков В. М., О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти периодическими коэффициентами, Диф. уравнения, 3, № 12 (1967), 2127—2184.

[8] Оселедец В. И., Кандидатская диссертация, Моск. ун-т, 1967.

[9] Синай Я. Г., Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром, Изв. АН СССР, Сер. матем., 30, № 1 (1966), 15—62.

[10] Рашевский И. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967. [11] Бурбаки II., Общая топология. Основные структуры, М., 1958.

[12] Колмогоров А. Н., Новый метрический вариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега. Докл. АН СССР, 119, № 5 (1958), 861—864.