К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах

В. М. Миллионщиков (Москва)

В этой работе обобщаются на случай полных локально выпуклых пространств некоторые теоремы, известные для уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ в банаховых пространствах (см. [1]; [2], стр. 231).

§ 1. Интегрирование в локально выпуклых пространствах

Пусть E — полное локально выпуклое пространство и $\{p(x)\}$ — достаточное множество полунорм в E (см. [3], стр. 46—52). Пусть $F(S,E)$ — множество отображений измеримого множества $S \subseteq E^n$ ($\text{mes } S \le \infty$) в E (E^n — n-мерное эвклидово пространство).

I. Определим сначала интеграл от счетнозначной функции (см. [4], стр. 54, определение 3.2.2) $x(\alpha) \in F(S,E)$. Счетнозначную функцию $x(\alpha)$ назовем и н т е г р и р у е м о й на S, если для каждой полунормы $p(x) \in \{p(x)\}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p\left[x(\alpha_i)\right] \text{mes } S_i < \infty,$$

где S_i ($i = 1, 2, \ldots$) — множества, на каждом из которых $x(\alpha)$ постоянна, а $\alpha_i \in S_i$. Тогда сумма

$$I_S = \sum_{i=1}^{\infty} x(\alpha_i) \text{mes } S_i$$

существует (так как E полно) и не зависит от порядка суммирования. Положим

$$\int_S x(\alpha)\, d\alpha = I_S.$$

Множество счетнозначных интегрируемых на S функций обозначим через $F_\omega(S,E)$.

Непосредственно получается следующее свойство.

1. *Если* $x(\alpha)$, $y(\alpha) \in F_\omega(S,E)$ *и* λ, μ — *действительные числа, то* $\lambda x(\alpha) + \mu y(\alpha) \in F_\omega(S,E)$ *и*

$$\int_S \left[\lambda x(\alpha) + \mu y(\alpha)\right] d\alpha = \lambda \int_S x(\alpha)\, d\alpha + \mu \int_S y(\alpha)\, d\alpha. \tag{1.1}$$

Докажем свойство

2. *Если* $p(x) \in \{p(x)\}$ *и* $x(\alpha) \in F_\omega(S,E)$, *то* $p(x(\alpha)) \in F_\omega(S,E^1)$ *и*

$$p\left(\int_S x(\alpha)\, d\alpha\right) \le \int_S p(x(\alpha))\, d\alpha. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Имеем:

$$p\left(\int_S x(\alpha)\, d\alpha\right) = p\left(\sum_{i=1}^{\infty} x(\alpha_i) \text{mes } S_i\right) = p\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x(\alpha_i) \text{mes } S_i\right) = \lim_{n\to\infty} p\left(\sum_{i=1}^{n} x(\alpha_i) \text{mes } S_i\right) \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p(x(\alpha_i)) \text{mes } S_i = \sum_{i=1}^{\infty} p(x(\alpha_i)) \text{mes } S_i = \int_S p(x(\alpha))\, d\alpha$$

(последнее равенство мы получили, положив $E = E^1$).

3. Абсолютная непрерывность. *Если $x(\alpha)\in F_{\omega}(S,E)$, то для всякой окрестности нуля $U\subset E$ существует $\delta>0$, такое, что если $\operatorname{mes} Q<\delta$, $Q\subseteq S$, то*

$$\int_Q x(\alpha)\,d\alpha\in U.$$

Доказательство. Пусть

$$U=U\left(x: p_k(x)<\varepsilon\right)\ \left(k=1,2,\ldots,n;\ p_k(x)\in\{p(x)\}\right)$$

(см. [3], стр. 52). Так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_k\left(x(\alpha_i)\right)\cdot\operatorname{mes} S_i<\infty$$

для всякого $k=1,2,\ldots,n$, то существует такое m, что

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} p_k\left(x(\alpha_i)\right)\cdot\operatorname{mes} S_i<\frac{\varepsilon}{2}\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Положим

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2\max\limits_{k=1,2,\ldots,n}\left[\sum\limits_{i=1}^{m} p_k\left(x(\alpha_i)\right)\right]}.$$

Если знаменатель в этой формуле равен нулю, то считаем δ произвольным положительным числом.

Пусть $\operatorname{mes} Q<\delta$, $Q\subseteq S$. Тогда

$$\int_Q x(\alpha)\,d\alpha\in U.$$

В самом деле,

$$p_k\left(\int_Q x(\alpha)\,d\alpha\right)\le\int_Q p_k\left(x(\alpha)\right)d\alpha=\sum_{i=1}^{\infty} p_k\left(x(\alpha_i)\right)\cdot\operatorname{mes}\left(S_i\cap Q\right)<$$

$$<\sum_{i=1}^{m} p_k\left(x(\alpha_i)\right)\cdot\operatorname{mes}\left(S_i\cap Q\right)+\frac{\varepsilon}{2}\le\operatorname{mes}Q\sum_{i=1}^{m} p_k\left(x(\alpha_i)\right)+\frac{\varepsilon}{2}<\delta\sum_{i=1}^{m} p_k\left(x(\alpha_i)\right)+\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Отметим еще два непосредственно получаемых свойства.

4. *Если $x(\alpha)\in F_{\omega}(S,E)$, то $x(\alpha)\in F_{\omega}(P,E)$ для всякого измеримого множества $P\subset S$. Если при этом $x(\alpha)$ — действительная неотрицательная функция, то*

$$\int_P x(\alpha)\,d\alpha\le\int_S x(\alpha)\,d\alpha.$$

5. *Если $x(\alpha)\in F_{\omega}(S,E)$, а $S_i\,(i=1,2,\ldots)$ — измеримые множества, такие, что* $S=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$, $\operatorname{mes}\left(S_i\cap Q\right)=0$ $(i\ne j)$, то

$$\int_S x(\alpha)\,d\alpha=\int_{S_1} x(\alpha)\,d\alpha+\int_{S_2} x(\alpha)\,d\alpha+\ldots.\qquad (1.3)$$

II. Рассмотрим направленную последовательность счетнозначных интегрируемых функций $\left\{x_{\beta}(\alpha)\right\}_{\beta\in B}$ (B — направленное множество), для которой выполнены условия:

(*) Для всякого $p(x)\in\{p(x)\}$ и всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\beta\in B$, что для всяких $\beta'>\beta$, $\beta''>\beta$

$$\int_S p\left(x_{\beta''}(\alpha)-x_{\beta'}(\alpha)\right)d\alpha<\varepsilon.$$

(**) Существует такая функция $x(\alpha)$, что для всякого $\varepsilon > 0$ имеется множество $S_\varepsilon \subset S$, для которого $\mathrm{mes}(S \setminus S_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность $\{x_\beta(\alpha)\}_{\beta\in B}$ сходится к $x(\alpha)$ равномерно на S_ε.

Последовательность из одинаковых функций удовлетворяет этим условиям. Менее тривиальный пример такой последовательности даст теорема 1.7.

Рассмотрим для каждого измеримого множества $Q \subset S$ последовательность

$$\left\{\int_Q x_\beta(\alpha)\,d\alpha\right\}_{\beta\in B}$$

(в силу свойства 4 эти интегралы существуют). В силу свойств 1, 2, 4 для всякого $p(x) \in \{p(x)\}$

$$p\left(\int_Q x_{\beta''}(\alpha)\,d\alpha - \int_Q x_{\beta'}(\alpha)\,d\alpha\right) \le \int_S p\left(x_{\beta''}(\alpha) - x_{\beta'}(\alpha)\right)d\alpha$$

для любых $\beta', \beta'' \in B$. Отсюда и из условия (*) вытекает, что последовательность $\left\{\int_Q x_\beta(\alpha)\,d\alpha\right\}_{\beta\in B}$ — фундаментальная. Так как E полно, то существует

$$\lim_{\beta\in B}\int_Q x_\beta(\alpha)\,d\alpha.$$

Имеем функцию

$$\Phi(Q) = \lim_{\beta\in B}\int_Q x_\beta(\alpha)\,d\alpha,$$

определенную на совокупности измеримых подмножеств множества S.

Впоследствии мы положим $\int_Q x(\alpha)\,d\alpha = \Phi(Q)$, но для этого надо доказать, что $\Phi(Q)$ не зависит от выбора последовательности $\{x_\beta(\alpha)\}_{\beta\in B}$, обладающей свойствами (*) и (**). Удобно сначала доказать абсолютную непрерывность и полную аддитивность функции $\Phi(Q)$, а затем установить, что $\Phi(Q)$ не зависит от выбора $\{x_\beta(\alpha)\}_{\beta\in B}$.

Лемма 1.1. (Аддитивность функции $\Phi(Q)$.) *Если* $Q_1 \subset S$, $Q_2 \subset S$, $\mathrm{mes}(Q_1 \cap Q_2) = 0$, *то*

$$\Phi(Q_1 \cup Q_2) = \Phi(Q_1) + \Phi(Q_2).$$

Утверждение леммы получается предельным переходом в (1.3).

Лемма 1.2. (Абсолютная непрерывность функции $\Phi(Q)$.) *Для всякой окрестности нуля* $U \subset E$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что если* $\mathrm{mes}Q < \delta$, $Q \subset S$, *то* $\Phi(Q) \in U$.

Доказательство. Имеем:

$$U = U\left(x : p_k(x) < \varepsilon\right)\ \left(k = 1, 2, \ldots, n;\ p_k(x) \in \{p(x)\}\right).$$

Возьмем такое $\beta' \in B$, что для всякого $\beta'' > \beta'$

$$\int_S p_k\left(x_{\beta'}(\alpha) - x_{\beta''}(\alpha)\right)d\alpha \le \frac{\varepsilon}{4}$$

при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ (существование такого β' вытекает из условия (*)). Пусть $\delta > 0$ таково, что для всякого множества $Q \subset S$, такого, что $\mathrm{mes}Q < \delta$, выполнены неравенства

$p_k\left(\int\limits_Q x_{\beta'}(\alpha)\,d\alpha\right)<\frac{\varepsilon}{4}$ ($k=1,2,\ldots,n$). Существование такого δ уже доказано, так как $x_{\beta'}(\alpha)$ — счетнозначная функция. Тогда для всякого $\beta''>\beta'$, всякого измеримого множества $Q\subset S$, такого, что $\mathrm{mes}Q<\delta$, и всякого $k=1,2,\ldots,n$

$$p_k\left(\int\limits_Q x_{\beta''}(\alpha)\,d\alpha\right)\le p_k\left(\int\limits_Q x_{\beta''}(\alpha)\,d\alpha-\int\limits_Q x_{\beta'}(\alpha)\,d\alpha\right)+p_k\left(\int\limits_Q x_{\beta'}(\alpha)\,d\alpha\right)<$$

$$<\int\limits_S p_k\left(x_{\beta''}(\alpha)-x_{\beta'}(\alpha)\right)d\alpha+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для всякого измеримого $Q\subset S$, такого, что $\mathrm{mes}Q<\delta$, будет

$$p_k\left(\lim_{\beta\in B}\int\limits_Q x_\beta(\alpha)\,d\alpha\right)\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\quad(k=1,2,\ldots,n).$$

Л е м м а 1.3. (П о л н а я а д д и т и в н о с т ь ф у н к ц и и $\Phi(Q)$.) *Если множества Q_i ($i=1,2,\ldots$) измеримы, $Q=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}Q_i\subset S$ и $\mathrm{mes}\left(Q_i\cap Q_j\right)=0$ при $i\ne j$, то*

$$\Phi(Q)=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(Q_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из леммы 1. 1 следует:

$$\Phi(Q)=\sum_{i=1}^{m}\Phi(Q_i)+\Phi\left(Q_m^*\right);\ Q_m^*=\bigcup_{i=m+1}^{\infty}Q_i\quad(m=1,2,\ldots).$$

Докажем, что $\Phi\left(Q_m^*\right)\to 0$ при $m\to\infty$.

Пусть дана окрестность нуля

$$U=U\left(x:p_k(x)<\varepsilon\right)\ \left(k=1,2,\ldots,n;\,p_k(x)\in\{p(x)\}\right).$$

Выбираем β', как указано в доказательстве леммы 1.2. В силу (1.3) существует такое N, что при $m>N$

$$p_k\left(\int\limits_{Q_m^*}x'_\beta(\alpha)\,d\alpha\right)<\frac{\varepsilon}{4}\qquad(k=1,2,\ldots,n).$$

Проводя те же выкладки, что и в доказательстве леммы 1.2, получаем при $m>N$

$$\Phi\left(Q_m^*\right)\in U.$$

Л е м м а 1.4. *Пусть последовательности $\left\{x_\beta(\alpha)\right\}_{\beta\in B}$ и $\left\{y_\gamma(\alpha)\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ (где B и Γ — направленные множества) удовлетворяют условиям* (*) *и* (**) *для функции $x(\alpha)$. Тогда*

$$\lim_{\beta\in B}\int\limits_Q x_\beta(\alpha)\,d\alpha=\lim_{\gamma\in\Gamma}\int\limits_Q y_\gamma(\alpha)\,d\alpha$$

для всякого измеримого $Q\subset S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Докажем равносильное утверждение: для всякого измеримого множества $Q\subset S$

$$\lim_{\delta\in\Delta}\int\limits_Q z_\delta(\alpha)\,d\alpha=0,$$

где введено обозначение $z_\delta(\alpha)=x_\beta(\alpha)-y_\gamma(\alpha)$ и $\delta=(\beta,\gamma)\in\Delta=B\times\Gamma$ с отношением порядка: $(\beta',\gamma')\ge(\beta,\gamma)$, тогда и только тогда, когда $\beta'\ge\beta$ и $\gamma'\ge\gamma$ (при этом Δ также становится направленным множеством).

Очевидно, последовательность $\{z_\delta(\alpha)\}_{\delta\in\Delta}$ удовлетворяет условиям (*) и (**) для функции $z(\alpha)\equiv 0$. Отсюда, в силу лемм 1.2 и 1.3, $\Psi(Q)=\lim\limits_{\delta\in\Delta}\int\limits_Q z_\delta(\alpha)\,d\alpha$ — абсолютно непрерывная, вполне аддитивная функция множеств.

Пусть $\Psi(Q_0)\neq 0$ для некоторого измеримого множества $Q_0\subset S$. Пусть U — такая окрестность нуля в E, что $\Psi(Q_0)\,\overline{\in}\,U$, и пусть $\varepsilon>0$ таково, что если $\mathrm{mes}Q<\varepsilon$ ($Q\subset S$), то $\Psi(Q)\in U$. Пусть $S_\varepsilon\subset S$ таково, что $\mathrm{mes}(S\setminus S_\varepsilon)<\varepsilon$ и последовательность $\{z_\delta(\alpha)\}_{\delta\in\Delta}$ сходится к $z(\alpha)\equiv 0$ равномерно на S_ε. Тогда

$$\Psi(Q_0\cap S_\varepsilon)=\Psi(Q_0)-\Psi(Q_0\cap(S\setminus S_\varepsilon))\neq 0,$$

так как $\Psi(Q_0)\,\overline{\in}\,U$, а $\Psi(Q_0\cap(S\setminus S_\varepsilon))\in U$, ибо $\mathrm{mes}(Q_0\cap(S\setminus S_\varepsilon))\le \mathrm{mes}(S\setminus S_\varepsilon)<\varepsilon$.

Так как $Q_0\cap S_\varepsilon$ можно разбить на счетное множество подмножеств, мера каждого из которых конечна, то в силу полной аддитивности $\Psi(Q)$ найдется множество $Q_1\subset Q_0\cap S_\varepsilon$ такое, что $\mathrm{mes}Q_1<\infty$ и

$$\Psi(Q_1)=\lim_{\delta\in\Delta}\int\limits_{Q_1} z_\delta(\alpha)\,d\alpha\neq 0.$$

Но для всякого $p(x)\in\{p(x)\}$

$$p_k\left(\int\limits_{Q_1} z_\delta(\alpha)\,d\alpha\right)\le\int\limits_{Q_1} p(z_\delta(\alpha))\,d\alpha\le\sup_{\alpha\in S_\varepsilon} p(z_\delta(\alpha))\cdot\mathrm{mes}Q_1\underset{\beta\in B}{\to}0.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Определение 1.1. Функция $x(\alpha)$ называется интегрируемой на S, если для нее существует последовательность счетнозначных интегрируемых функций $\{x_\beta(\alpha)\}_{\beta\in B}$ (B — направленное множество), удовлетворяющая условиям (*) и (**). При этом по определению полагаем

$$\int\limits_S x(\alpha)\,d\alpha=\lim_{\beta\in B}\int\limits_S x_\beta(\alpha)\,d\alpha.$$

III. Свойства интеграла.

Теорема 1.1. *Если E — банахово пространство, то введенный интеграл совпадает с интегралом Бохнера* (см. [4], стр. 62, определение 3.5.3) *и, следовательно, при $E=E^1$ (E^1 — действительная прямая) — с интегралом Лебега.*

Доказательство. Достаточно доказать (см. [4], стр. 53), что если E — банахово пространство, то следующие условия равносильны.

А. Для всякого $\varepsilon>0$ и всякой окрестности нуля $U\subset E$ существуют множество $S_{\varepsilon,U}\subset S$, $\mathrm{mes}(S\setminus S_{\varepsilon,U})<\varepsilon$, и $\beta\in B$ такие, что для всякого $\beta'>\beta$ и всякого $\alpha\in S_{\varepsilon,U}$

$$x_{\beta'}(\alpha)-x(\alpha)\in U.$$

В. Для всякого $\varepsilon>0$ существует множество $S_\varepsilon\subset S$, $\mathrm{mes}(S\setminus S_\varepsilon)<\varepsilon$, и для всякой окрестности нуля $U\subset E$ существует $\beta\in B$, такие, что для всякого $\beta'>\beta$ и всякого $\alpha\in S_\varepsilon$

$$x_{\beta'}(\alpha)-x(\alpha)\in U.$$

Во всяком пространстве E из условия В следует условие А. (Достаточно положить $S_{\varepsilon,U}=S_\varepsilon$.) Докажем, что для всякого E со счетной базой окрестностей нуля $U_1,U_2,\ldots$ из А следует В.

Пусть $\varepsilon>0$. Для всякого $k=1,2,\ldots$ найдем, согласно условию А, множество $S_k=S_{\frac{\varepsilon}{2^k},U_k}$.

Множество $S=\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k$ удовлетворяет условию В, так как

$$\operatorname{mes}\left(S\setminus S_{\varepsilon}\right)=\operatorname{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(S\setminus S_k\right)\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{mes}\left(S\setminus S_k\right)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon .$$

Т е о р е м а 1.2. *Если* $x(\alpha)$ *и* $y(\alpha)$ *интегрируемы на* S, *а* λ *и* μ *— действительные числа, то функция* $\lambda x(\alpha)+\mu y(\alpha)$ *интегрируема на* S *и*

$$\int_S\left[\lambda x(\alpha)+\mu y(\alpha)\right]d\alpha=\lambda\int_S x(\alpha)\,d\alpha+\mu\int_S y(\alpha)\,d\alpha .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\left\{x_{\beta}(\alpha)\right\}_{\beta\in B}$ и $\left\{y_{\gamma}(\alpha)\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ — последовательности счетнозначных интегрируемых функций, обладающие свойствами (*) и (**) соответственно по отношению к $x(\alpha)$ и $y(\alpha)$. Тогда последовательность счетнозначных, интегрируемых на S (согласно свойству 1) функций

$$\left\{\lambda x_{\beta}(\alpha)+\mu y_{\gamma}(\alpha)\right\}_{(\beta,\gamma)\in B\times\Gamma=\Delta}$$

($(\beta',\gamma')\ge(\beta,\gamma)$, если $\beta'\ge\beta$ и $\gamma'\ge\gamma$) обладает теми же свойствами по отношению к функции $\lambda x(\alpha)+\mu y(\alpha)$. Согласно равенству (1.1), для каждого $(\beta,\gamma)\in\Delta$

$$\int_S\left[\lambda x_{\beta}(\alpha)+\mu y_{\gamma}(\alpha)\right]d\alpha=\lambda\int_S x_{\beta}(\alpha)\,d\alpha+\mu\int_S y_{\gamma}(\alpha)\,d\alpha .$$

Отсюда

$$\int_S\left[\lambda x_{\beta}(\alpha)+\mu y_{\gamma}(\alpha)\right]d\alpha=\lim_{(\beta,\gamma)\in\Delta}\int_S\left[\lambda x_{\beta}(\alpha)+\mu y_{\gamma}(\alpha)\right]d\alpha=\lambda\lim_{\beta\in B}\int_S x_{\beta}(\alpha)\,d\alpha+\mu\lim_{\gamma\in\Gamma}\int_S y_{\gamma}(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\lambda\int_S x(\alpha)\,d\alpha+\mu\int_S y(\alpha)\,d\alpha.$$

Т е о р е м а 1.3. *Если* $p(x)\in\left\{p(x)\right\}$ *и функция* $x(\alpha)$ *интегрируема на* S, *то* $p\left[x(\alpha)\right]$ *интегрируема (суммируема) на* S *и*

$$p\left(\int_S x(\alpha)\,d\alpha\right)\le\int_S p\left[x(\alpha)\right]d\alpha .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $\left\{x_{\beta}(\alpha)\right\}_{\beta\in B}$ удовлетворяет условиям (*) и (**) по отношению к функции $x(\alpha)$. Тогда то же верно для последовательности $\left\{p\left[x_{\beta}(\alpha)\right]\right\}_{\beta\in B}$ по отношению к функции $p\left[x(\alpha)\right]$. Согласно неравенству (1.2), для каждого $\beta\in B$

$$p\left(\int_S x_{\beta}(\alpha)\,d\alpha\right)\le\int_S p\left[x_{\beta}(\alpha)\right]d\alpha .$$

Отсюда

$$p\left(\lim_{\beta\in B}\int_S x_{\beta}(\alpha)\,d\alpha\right)=\lim_{\beta\in B}p\int_S x_{\beta}(\alpha)\,d\alpha\le\lim_{\beta\in B}\int_S p\left(x_{\beta}(\alpha)\right)d\alpha ,$$

т. е.

$$p\left(\int_S x(\alpha)\,d\alpha\right)\le\int_S p\left[x(\alpha)\right]d\alpha .$$

Т е о р е м а 1.4. *Если функция* $x(\alpha)$ *интегрируема на* S, *то* $x(\alpha)$ *интегрируема и на всяком измеримом множестве* $Q\subset S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $\left\{x_\beta(\alpha)\right\}_{\beta\in B}$ удовлетворяет условиям (*) и (**) для функции $x(\alpha)$ на множестве S, и пусть Q — измеримое подмножество S. Тогда для всякого $p(x)\in\left\{p(x)\right\}$ (согласно свойству 4)

$$\int_Q p\left(x_{\beta''}(\alpha)-x_{\beta'}(\alpha)\right)d\alpha\le\int_S p\left(x_{\beta''}(\alpha)-x_{\beta'}(\alpha)\right)d\alpha\xrightarrow[\beta',\beta''\in B]{}0.$$

Кроме того, $\left\{x_\beta(\alpha)\right\}_{\beta\in B}$ сходится равномерно к $x(\alpha)$ на $Q_\varepsilon=Q\bigcap S_\varepsilon$, причем $\operatorname{mes}\left(Q\setminus Q_\varepsilon\right)\le\operatorname{mes}\left(S\setminus S_\varepsilon\right)<\varepsilon$. Таким образом, $\left\{x_\beta(\alpha)\right\}_{\beta\in B}$ удовлетворяет условиям (*) и (**) для функции $x(\alpha)$ на множестве Q. Следовательно, функция $x(\alpha)$ интегрируема на Q.

Т е о р е м а 1.5. $\int\limits_Q x(\alpha)d\alpha$ *— абсолютно непрерывная функция множеств.*

Это утверждение вытекает из леммы 1. 2.

Т е о р е м а 1.6. $\int\limits_Q x(\alpha)d\alpha$ *— вполне аддитивная функция множеств.*

Это утверждение вытекает из леммы 1. 3.

В случае $E=E^1$ устанавливаемое теоремой 1.7 условие интегрируемости совпадает с условием измеримости (в форме Лузина).

Т е о р е м а 1.7. *Пусть функция* $x(\alpha)$ *определена на компакте* $S\subset E^n$ *и множество* $\mathfrak{X}$ *ее значений ограничено* (см. [5], стр. 45). *Пусть для всякого* $\varepsilon>0$ *существует множество* $S_\varepsilon\subset E$ *такое, что* $\operatorname{mes}\left(S\setminus S_\varepsilon\right)<\varepsilon$ *и* $x(\alpha)$ *непрерывна на* S_ε. *Тогда* $x(\alpha)$ *интегрируема на* S.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим разбиения $S=\bigcup\limits_{k=1}^{n_i}S_k^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots)$ такие, что

$$\max_{k=1,2\ldots n_i}d\left(S_k^{(i)}\right)\to 0 \text{ при } i\to\infty.$$

Выберем $\alpha_{ik}\in S_k^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots;\ \ k=1,2,\ldots,n_i)$. Функции $x_i(\alpha)=x(\alpha_{ik})$ если $\alpha\in S_k^{(i)}$, принадлежат $F_\omega(S,E)$ и удовлетворяют условиям (*) и (**) по отношению к функции $x(\alpha)$.

Докажем, что выполняется условие (**). Пусть дано $\varepsilon>0$. Возьмем множество $S_{\frac{\varepsilon}{2}}\subset S$, такое, что $mes\left(S\setminus S_{\frac{\varepsilon}{2}}\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $x(\alpha)$ непрерывна на $S_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Пусть $S_\varepsilon=\overline{S}_\varepsilon\subset S_{\frac{\varepsilon}{2}}$ таково, что $mes\left(S_{\frac{\varepsilon}{2}}\setminus S_\varepsilon\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $mes\left(S\setminus S_\varepsilon\right)<\varepsilon$, S_ε — компакт, так как $S_\varepsilon=\overline{S}_\varepsilon\subset S$; функция $x(\alpha)$ непрерывна на S_ε, так как $S_\varepsilon\subset S_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Следовательно (см. [6], гл. II, § 4, теорема 2), для всякой окрестности нуля $U\subset E$ существует $\delta>0$ такое, что если $\alpha',\alpha''\in S_\varepsilon$ и $\rho(\alpha',\alpha'')<\delta$, то $x(\alpha')-x(\alpha'')\in U$. Пусть m таково, что для всякого $i>m$ $\max\limits_{k=1,2\ldots n_i}d\left(S_k^{(i)}\right)<\delta$. Тогда для всяких $i>m$, $\alpha\in S_\varepsilon$

$$x_i(\alpha)-x(\alpha)=x(\alpha_{ik})-x(\alpha)\in U,$$

так как $\alpha_{ik},\alpha\in S_k^{(i)}$, а $d\left(S_k^{(i)}\right)<\delta$.

Докажем, что выполняется условие (*). Пусть даны $p(x)\in\{p(x)\}$ и $\varepsilon>0$. Возьмем $\delta>0$ такое, что $2\delta p(\mathfrak{X})<\frac{\varepsilon}{2}$ ($\mathfrak{X}$ ограничено). Пусть $S_\delta\subset S$ таково, что $\operatorname{mes}(S\setminus S_\delta)<\delta$ и $\{x(\alpha)\}$ сходится к $x(\alpha)$ равномерно на S_δ. Пусть m таково, что $p(x_i(\alpha)-x(\alpha))<\frac{\varepsilon}{2\operatorname{mes} S}$ для всяких $i>m$, $\alpha\in S_\delta$. Тогда для всех $i,j>m$

$$\int_S p(x_i(\alpha)-x_j(\alpha))d\alpha=\int_{S_\delta} p(x_i(\alpha)-x_j(\alpha))d\alpha+\int_{S\setminus S_\delta} p(x_i(\alpha)-x_j(\alpha))d\alpha\le$$

$$\le \operatorname{mes} S_\delta\cdot\sup_{\alpha\in S_\delta}\left[p(x_i(\alpha)-x(\alpha))+p(x_j(\alpha)-x(\alpha))\right]+$$

$$+\operatorname{mes}\ (S\setminus S_\delta)\cdot\sup_{\alpha\in S_\delta}\left[p(x_i(\alpha))+p(x_j(\alpha))\right]<\operatorname{mes} S\cdot\frac{\varepsilon}{2\operatorname{mes} S}+\delta\left[\frac{\varepsilon}{4\delta}+\frac{\varepsilon}{4\delta}\right]=\varepsilon.$$

Т е о р е м а 1.8. *Пусть функция* $x(\alpha)$ *интегрируема на* S *и непрерывна по отношению к* S (см. [6], гл. 1, § 4, п. 3) *в точке* $\alpha_0\in S$. *Тогда плотность функции множеств* $\int_Q x(\alpha)d\alpha$ $\left(\text{т.е. } \lim\limits_{\substack{d(Q)\to 0\\ \alpha_0\in Q}}\frac{1}{\operatorname{mes} Q}\int_Q x(\alpha)d\alpha\right)$ *в точке* α_0 *существует и равна* $x(\alpha_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Действительно, для всякого $p(x)\in\{p(x)\}$ имеем:

$$\lim_{\substack{d(Q)\to 0\\ \alpha_0\in Q}} p\left[\frac{1}{\operatorname{mes} Q}\int_Q x(\alpha)d\alpha-x(\alpha_0)d\alpha\right]=\lim_{\substack{d(Q)\to 0\\ \alpha_0\in Q}} p\left[\frac{1}{\operatorname{mes} Q}\int_Q x(\alpha)d\alpha-\frac{1}{\operatorname{mes} Q}\int_Q x(\alpha_0)d\alpha\right]\le$$

$$\le\lim_{\substack{d(Q)\to 0\\ \alpha_0\in Q}}\frac{1}{\operatorname{mes} Q}\int_Q p(x(\alpha)-x(\alpha_0))d\alpha\le\lim_{\substack{d(Q)\to 0\\ \alpha_0\in Q}}\left[\sup_{\alpha\in Q} p(x(\alpha)-x(\alpha_0))\right]=0.$$

С л е д с т в и е . *Пусть* $S=[t_0,t_1]\subset E^1$. *Введем обозначение:*

$$\int_S x(\alpha)d\alpha=\int_{t_0}^{t_1} x(\alpha)d\alpha .$$

Тогда если функция $x(\alpha)$ *интегрируема на* S *и непрерывна в точке* $\alpha=t_2\in S$, *то* $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} x(\alpha)d\alpha$ *в точке* t_2 *существует и равна* $x(t_2)$.

В самом деле,

$$\left.\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} x(\alpha)d\alpha\right|_{t=t_2}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{t_2}^{t_2+\Delta t} x(\alpha)d\alpha=\lim_{\substack{d(Q)\to 0\\ t_2\in Q}}\frac{1}{\operatorname{mes} Q}\int_Q x(\alpha)d\alpha .$$

Из теоремы 1.7 и следствия теоремы 1.8 вытекает, что если функция $x(\alpha)$ непрерывна на отрезке $[t_0,t_1]$ (и, следовательно, ограничена: при непрерывном отображении образом бикомпакта является бикомпактное и, значит, ограниченное, множество), то она имеет на $[t_0,t_1]$ первообразную функцию $\int_{t_0}^{t} x(\alpha)d\alpha+c$, где $c\in E$ — произвольный (постоянный) вектор.

Из следствия теоремы 1.9 мы увидим, что других первообразных у $x(t)$ нет.

Т е о р е м а 1.9. *Пусть* $S\subset S^n$ — *компакт и* $\mathfrak{A}$ — *совокупность компактных подмножеств множества* S *такая, что:* 1) *если* $Q_1\in\mathfrak{A}$, $Q_2\in\mathfrak{A}$, *то* $Q_1\bigcap Q_2\in\mathfrak{A}$, 2) *для* *всякого* $\varepsilon > 0$ *найдутся множества* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \in \mathfrak{A}$ *такие, что* $S = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$, $\operatorname{mes}\left(Q_i \cap Q_j\right) = 0$ $(i \neq j)$, $\max_{i=1,2,\ldots,n} d\left(Q_i\right) < \varepsilon$. *Пусть* $\Phi_m\left(Q\right)$ $(m = 1,2)$ — *отображения множества* $\mathfrak{A}$ *в* E, *обладающие свойствами:*

a)
$$\Phi_m\left(Q_1 \cup Q_2\right) = \Phi_m\left(Q_1\right) + \Phi_m\left(Q_2\right) \ (m = 1,2).$$

если $Q_1, Q_2, Q_1 \cup Q_2 \in \mathfrak{A}$ *и* $\operatorname{mes}\left(Q_1 \cap Q_2\right) = 0$.

b) *Если* $\operatorname{mes} Q = 0$, $Q \in \mathfrak{A}$, *то* $\Phi_m\left(Q\right) = 0$ $(m = 1,2)$.

c) *Для всякого* $\alpha \in S$ *существует*

$$\lim_{\substack{d(Q)\to 0\\ \alpha\in Q}} \frac{1}{\operatorname{mes} Q} \Phi_1\left(Q\right) = \lim_{\substack{d(Q)\to 0\\ \alpha\in Q}} \frac{1}{\operatorname{mes} Q} \Phi_2\left(Q\right) = x\left(\alpha\right). \tag{1.4}$$

Тогда $\Phi_1\left(Q\right) = \Phi_2\left(Q\right)$ *для всякого* $Q \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Положим

$$\Phi\left(Q\right) = \Phi_1\left(Q\right) - \Phi_2\left(Q\right).$$

Пусть $Q_0 \in \mathfrak{A}$ таково, что $\Phi\left(Q_0\right) \neq 0$. Найдется $p_0\left(x\right) \in \left\{p\left(x\right)\right\}$, для которого $p_0\left(\Phi\left(Q_0\right)\right) = a \neq 0$. Тогда $d\left(Q_0\right) = b \neq 0$ (иначе предел (1.4) не существовал бы) и $\operatorname{mes} Q_0 \neq 0$ (в силу свойства b) отображений $\Phi_m\left(Q\right)$). Пусть

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i'; \qquad S_1', S_2', \ldots, S_n' \in \mathfrak{A};$$

$$\operatorname{mes}\left(S_i' \cap S_j'\right) = 0 \ (i \neq j),\ d\left(S_i'\right) < \frac{b}{2} \ (i = 1,2,\ldots,n).$$

Введем обозначение:

$$S_i = Q_0 \cap S_i' \ (i = 1,2,\ldots,n).$$

Имеем:

$$S_i \in \mathfrak{A} \ (i = 1,2,\ldots,n),\ Q_0 = \bigcup_{i=1}^{n} S_i,$$

$$\operatorname{mes}\left(S_i \cap S_j\right) = 0 \ (i \neq j),\ d\left(S_i\right) < \frac{b}{2} \ (i = 1,2,\ldots,n).$$

Отсюда

$$\Phi\left(Q_0\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(S_i\right),$$

$$\operatorname{mes} Q_0 \cdot p_0\left[\frac{\Phi\left(Q_0\right)}{\operatorname{mes} Q_0}\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes} S_i \cdot p_0\left[\frac{\Phi\left(S_i\right)}{\operatorname{mes} S_i}\right]$$

(считаем, что если $\operatorname{mes} S_i = 0$, то $\dfrac{\Phi\left(S_i\right)}{\operatorname{mes} S_i} = 0$) и так как $\operatorname{mes} Q_0 = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes} S_i$, то найдется i_0 ($1 \leq i_0 \leq n$), для которого

$$p_0\left[\frac{\Phi\left(S_i\right)}{\operatorname{mes} S_i}\right] \geq p_0\left[\frac{\Phi\left(Q_0\right)}{\operatorname{mes} Q_0}\right] = \frac{a}{\operatorname{mes} Q_0} = a' > 0.$$

Положим $Q_1 = S_{i_0}$ и, проведя для Q_1 (вместо Q_0) те же рассуждения, найдем множество $Q_2 \in \mathfrak{A}$, для которого

$$d\left(Q_2\right) < \frac{b}{4},\ p_0\left[\frac{\Phi\left(Q_2\right)}{\operatorname{mes} Q_2}\right] \geq p_0\left[\frac{\Phi\left(Q_1\right)}{\operatorname{mes} Q_1}\right] \geq a' > 0,\ Q_2 \subset Q_1.$$

По индукции построим убывающую последовательность $Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$,

$$d(Q_k) \to 0 \text{ при } k \to \infty, \quad p_0\left[\frac{\Phi(Q_k)}{\text{mes } Q_k}\right] \geq a' > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Множества Q_k компактны, поэтому существует $\alpha \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. Из свойства с) функций $\Phi_m(Q)$ имеем $\lim_{k\to\infty} p_0\left[\frac{\Phi(Q_k)}{\text{mes } Q_k}\right] = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. *Если функция $x(t)$ отображает отрезок $[t_0, t_1]$ в E и $\varphi_m(t)$ $(m = 1, 2)$-первообразные для $x(t)$, то $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) + c$.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность множеств $Q_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau : \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2)$, где $\tau_1, \tau_2, \tau_1 \leq \tau_2$, — произвольные точки отрезка $[t_0, t_1]$ и $\Phi_m\left(Q_{\tau_1}^{\tau_2}\right) = \varphi_m(\tau_2) - \varphi_m(\tau_1)$ $(m = 1, 2)$. Тогда выполнены условия теоремы 1.9. Проверим, например, выполнение условия с). Имеем:

$$\lim_{\substack{d(Q)\to 0\\ \alpha\in Q}} \frac{1}{\text{mes } Q}\Phi_m(Q) = \lim_{\substack{\tau_2-\tau_1\to 0\\ \tau_1\leq t\leq\tau_2}} \frac{\varphi_m(\tau_2) - \varphi_m(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} =$$

$$= \lim_{\substack{\tau_2-\tau_1\to 0\\ \tau_1\leq t\leq\tau_2}} \left[\frac{\varphi_m(\tau_2) - \varphi_m(\tau_1)}{\tau_2 - t}\frac{\tau_2 - t}{\tau_2 - \tau_1} + \frac{\varphi_m(\tau_2) - \varphi_m(\tau_1)}{t - \tau_1}\frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{\tau_2-\tau_1\to 0\\ \tau_1\leq t\leq\tau_2}} \left[x(t)\frac{\tau_2 - t}{\tau_2 - \tau_1} + x(t)\frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}\right] = x(t).$$

Третье равенство справедливо, так как $\frac{\tau_2 - t}{\tau_2 - \tau_1}$ и $\frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$ ограничены.

Замечание. Более общий интеграл введен в работе [12]. Однако производная от него не всегда равна подынтегральной функции.

§ 2. Принцип неподвижной точки в локально выпуклых пространствах

Определение 2.1. Оператор A, действующий из линейного топологического пространства T_l в T_l, называется удовлетворяющим условию Липшица с постоянной $L > 0$, если для всякой окрестности нуля $U \subset T_l$ и любого $x \in T_l$

$$A(x + U) \subset A(x) + L \cdot U.$$

Определение 2.2. Если $L = q < 1$ (см. определение 2.1), то оператор A называется сжимающим.

Если T_l — локально выпуклое пространство E (достаточное множество полунорм которого обозначаем через $\{p(x)\}$), то определения 2.1 и 2.2 эквивалентны соответственно следующим определениям 2.3 и 2.4.

Определение 2.3. Оператор $A, A(E) \subseteq E$, называется удовлетворяющим условию Липшица с постоянной $L > 0$, если для всякого $p(x) \in \{p(x)\}$ и любых $x, y \in E$.

$$p(A(x) - A(y)) \leq L \cdot p(x - y).$$

Определение 2.4. Если $L = q < 1$ (см. определение 2.3), то оператор A называется сжимающим.

Теорема 2.1. *Пусть A — сжимающий оператор, действующий из множества*

$M \subseteq T_l$, *где* T_l *— произвольное отделимое линейное топологическое пространство, в множество* $N \subseteq T_l$. *Тогда существует не более одного* $x \in T_l$ *такого, что* $A(x) = x$.

Доказательство. Пусть $A(x) = x \neq y = A(y)$ $(x, y \in T_l)$. Пусть V — окрестность нуля, такая, что $y - x \notin V$. Положим

$$\mu_0 = \inf_{\substack{\frac{1}{\mu}(y-x)\in V \\ \mu>0}} \mu .$$

Если считать (это можно сделать без ограничения общности, см. [5]), что V — нормальная окрестность (т. е. если $0 < \lambda < 1$, то $\lambda V \subset V$), то $\mu_0 \geq 1$.

Положим $\mu_1 = \frac{1}{2}\left(\mu_0 + \frac{\mu_0}{q}\right)$. Так как $\mu_0 > 0$ и $q < 1$, то $\mu_1 > \mu_0$ и потому $y - x \in \mu_1 V$. Тогда, согласно определению 2.2,

$$y - x = A(y) - A(x) \in q \cdot \mu_1 V = \frac{1}{2}(q\mu_0 + \mu_0)V,$$

но это противоречит выбору μ_0, ибо $\frac{1}{2}(q\mu_0 + \mu_0) < \mu_0$.

Теорема 2.2. *Если* A *— сжимающий оператор,* $\varnothing \neq T = \overline{T} \subseteq E$, $A(T) \subseteq T$, *где* E *— локально выпуклое секвенциально полное* (см. [3], стр. 67) *пространство, то существует* $x \in T$, *такой, что* $A(x) = x$.

Доказательство. $T \neq \varnothing$, поэтому существует $x_0 \in T$. $A^n(x_0) \in T$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так как $A(T) \subseteq T$.

Покажем, что последовательность $\{A^n(x_0)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — фундаментальная. Пусть дана окрестность нуля $U = U(x : p_i(x) < \varepsilon)$ ($i = 1, 2, \ldots, k$; $p_i(x) \in \{p(x)\}$). Пусть N таково, что если $m > N$, то $\frac{q^m}{1-q} p_i(A(x_0) - x_0) < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \ldots, k$). Тогда для всякого $m > N$ имеем:

$$p_i\left(A^{m+s}(x_0) - A^m(x_0)\right) \leq q^m \cdot p_i\left(A^s(x_0) - x_0\right) \leq q^m \sum_{j=0}^{s-1} p_i\left(A^{j+1}(x_0) - A^j(x_0)\right) \leq$$

$$\leq q^m \sum_{j=0}^{s-1} q^j p_i\left(A(x_0) - x_0\right) \leq \frac{q^m}{1-q} p_i\left(A(x_0) - x_0\right) < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

т. е. $A^{m+s}(x_0) - A^m(x_0) \in U$ для всякого $m > N$ и всякого $s > 0$.

Так как E секвенциально полно, то существует $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} A^n(x_0) \in \overline{T} = T$. При этом $A(y_0) = y_0$. В самом деле,

$$A(y_0) = A\left(\lim_{n\to\infty} A^n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} A^{n+1}(x_0) = \lim_{n\to\infty} A^n(x_0) = y_0$$

(сжимающий оператор и вообще оператор, удовлетворяющий условию Липшица, непрерывен, что непосредственно следует из определения 2.1 (или 2.3)).

Теорема 2.3. *Пусть* T *— замкнутое выпуклое множество,* $T \subseteq E$ *и* E *полно. Пусть на* T *заданы операторы* A_i ($A_i(E) \subseteq E$; $i = 1, 2$), *причем*:

1) A_1 *— сжимающий оператор.*

2) $\overline{A_2(T)}$ *бикомпактно.*

3) A_2 *непрерывен.*

4) *Если* $x, y \in T$, *то* $A_1(x)+A_2(x) \in T$. *Тогда существует* $x \in T$ *такой, что* $A_1(x)+A_2(x)=x$.

Доказательство. Пусть $x \in T$. Тогда (в силу условий 1), 4) и теорем 2.1 и 2.2) существует, и притом единственный, $y \in T$ такой, что $y = A_1(y)+A_2(x)$, т. е. на T определен оператор $y = C(x)$, для которого

$$C(x) = A_1 C(x) + A_2(x), \qquad C(T) \subseteq T. \tag{2.1}$$

Пусть $z, v \in T$. Тогда из (2.1) и условия 1) имеем:

$$p\big(C(z)-C(v)\big) \le q \cdot p\big(C(z)-C(v)\big) + p\big(A_2(z)-A_2(v)\big),$$

откуда

$$p\big(C(z)-C(v)\big) \le \frac{1}{1-q} p\big(A_2(z)-A_2(v)\big) \tag{2.2}$$

для всякого $p(x) \in \{p(x)\}$. Отсюда и из непрерывности A_2 следует, что оператор C непрерывен.

Докажем, что множество $\overline{C(T)}$ бикомпактно, воспользовавшись теоремой 3 § 4 гл. II книги [6]. Пусть $U \subset E$ — окрестность нуля:

$$U = U\big(x : p_i(x) < \varepsilon\big) \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Рассмотрим множество окрестностей $x + \frac{1}{3}(1-q)\cdot U$, где x пробегает $\overline{A_2(T)}$. Множество $\overline{A_2(T)}$ бикомпактно, поэтому найдутся $x_1, ..., x_k \in \overline{A_2(T)}$ такие, что $V_i = x_i + \frac{1}{3}(1-q)U$ ($i = 1, 2, ..., k$) образуют покрытие $\overline{A_2(T)}$. Возьмем $y_1, ..., y_k \in T$ такие, что

$$p_i\big(A_2(y_i) - x_i\big) < \frac{\varepsilon}{3}(1-q) \ (i = 1, 2, ..., k \,; \, j = 1, 2, ..., n).$$

Тогда $U_i = C(y_i) + U$ образуют покрытие множества $\overline{C(T)}$. Действительно, пусть $z_0 \in \overline{C(T)}$. Тогда существует $v_0 \in T$ такое, что $p_j\big(z_0 - C(v_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ ($j = 1, 2, ..., n$). Так как $\{V_i\}$ ($i = 1, 2, ..., k$) — покрытие множества $\overline{A_2(T)}$, то существует i_0 такое, что $A_2(v_0) \in V_{i_0}$, т. е.

$$p_i\big(A_2(v_0) - x_{i_0}\big) < \frac{\varepsilon}{3}(1-q) \ (j = 1, 2, ..., n).$$

Тогда из (2.2) получим:

$$p_j\Big(z_0 - C\big(y_{i_0}\big)\Big) \le p_j\big(z_0 - C(v_0)\big) + p_j\Big(C(v_0) - C\big(y_{i_0}\big)\Big) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{1-q} p_j\Big(A_2(v_0) - A_2\big(y_{i_0}\big)\Big).$$

Но

$$p_j\Big(A_2(v) - A_2\big(y_{i_0}\big)\Big) \le p_j\big(A_2(v_0) - x_{i_0}\big) + p_i\Big(x_{i_0} - A_2\big(y_{i_0}\big)\Big) < \frac{2}{3}\varepsilon(1-q).$$

Поэтому $p_j\Big(z_0 - C\big(y_{i_0}\big)\Big) < \varepsilon$ ($j = 1, 2, ..., n$), т. е. $z_0 \in U_{i_0}$. Рассматривая C лишь на замкнутой выпуклой оболочке множества $\overline{C(T)}$ и применяя принцип Тихонова (см. [7], стр. 767), получаем, что существует $x \in \overline{C(T)} \subseteq T$ такой, что $C(x) = x$. Подставив это в (2.1), заключаем:

$$x = A_1(x) + A_2(x).$$

Теорема 2.4. (см. [8], стр. 47—48). *Пусть операторы* A_1 *и* A_2 *удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Пусть* $p_i\left(A_1(x)-A_2(x)\right)\le \varepsilon(1-q)$ *для* $i=1,2,...,n$ *и всякого* $x\in T$, $q=\max(q_1,q_2)$. *Пусть* $x_i=A(x_i)\in T$ $(i=1,2)$. *Тогда*

$$p_i(x_1-x_2)\le \varepsilon \ \ (i=1,2,...,n).$$

Доказательство. По теореме 2.2 $x_1=\lim\limits_{n\to\infty}A_1^n(x_2)$. Поэтому

$$p_i(x_1-x_2)=\lim_{n\to\infty}p_i\left(A_1^n(x_2)-x_2\right)\le \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}q^j\cdot p_i\left(A_1(x_2)-x_2\right)=\frac{1}{1-q}p_i\left(A_1(x_2)-x_2\right)=$$

$$=\frac{1}{1-q}p_i\left(A_1(x_2)-A_2(x_2)\right)\le\varepsilon.$$

§ 3. Теоремы существования, единственности, непрерывной зависимости от начальных данных и правых частей, ограниченности и устойчивости решений дифференциальных уравнений в локально выпуклом пространстве

Рассмотрим начальную задачу $x(t_0)=x_0$ для дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=f(x,t)$, где $f(x,t)$ — непрерывный оператор, действующий из топологического произведения $U\times E^1$ в полное локально выпуклое пространство E (U — замыкание окрестности точки x_0 в E, т. е. $U=U\left(x: p_i(x-x_0)\le\varepsilon\right)$) ($i=1,2,...,n$; $p_i(x)\in\{p(x)\}$).

Пусть $\widetilde{E}_S$ — пространство равномерной сходимости на компактах непрерывных отображений множества $S\subseteq E^1$ в E. Тогда $\widetilde{E}_S$ — также полное локально выпуклое пространство с достаточным множеством полунорм $\left\{\widetilde{p}_{p,B}(\widetilde{x})=\sup\limits_{t\in B}p(x(t))\right\}$ ($\widetilde{x}=x(t)\in\widetilde{E}_S$), где $p(x)$ пробегает $\{p(x)\}$, а B — множество всех компактов, принадлежащих S. $\widetilde{M}_S$ обозначает множество отображений S в $M\subseteq E$.

Лемма 3.1. *Пусть* $f(x,t)$ *непрерывно отображает* $M\times S$ *в* E, *где* $M\subseteq E$, $S=[t_0-h,t_0+h]\subset E^1$. *Пусть* $K(t)\ge 0$ *— действительная функция, суммируемая на* S *и такая, что* $\max\left(\int\limits_{t_0-h}^{t_0}K(t)dt,\int\limits_{t_0}^{t_0+h}K(t)dt\right)=L<\infty$, $p\left(f(x,t)-f(y,t)\right)\le K(t)\cdot p(x-y)$ *для всех* $p(x)\in\{p(x)\}$, $x,y\in M$.

Тогда оператор

$$A(\widetilde{x})=x_0+\int_{t_0}^{t}f\left(x(\tau),\tau\right)d\tau$$

1) *определен на* $\widetilde{M}_S$ *и действует в* $\widetilde{E}_S$,

2) *удовлетворяет на* $\widetilde{M}_S$ *условию Липшица с постоянной* L.

Доказательство. Утверждение 1) следует непосредственно из теорем 1.7 и 1.5. Докажем утверждение 2).

Пусть $\widetilde{p}(\widetilde{x})\in\left\{\widetilde{p}(\widetilde{x})\right\}$. Тогда если $\widetilde{x},\widetilde{y}\in\widetilde{M}_S$, то

$$\widetilde{p}\left(A\left(\widetilde{x}\right)-A\left(\widetilde{y}\right)\right)=\sup_{t\in S}\left|\int_{t_0}^{t} p\left[f\left(x(\tau),\tau\right)-f\left(y(\tau),\tau\right)\right]d\tau\right|\le$$

$$\le\sup_{t\in S}\left|\int_{t_0}^{t} K(\tau)\,d\tau\right|\cdot\sup_{t\in S} p\left(x(\tau)-y(\tau)\right)=L\cdot\widetilde{p}\left(\widetilde{x}-\widetilde{y}\right).$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $f(x,t)$ *непрерывно отображает* $U\times\left[t_0-a,t_0+a\right]$, *где* $U=U\left(x:p_i\left(x-x_0\right)\le\varepsilon\right)$, $p_i(x)\in\left\{p(x)\right\}$ $(i=1,2,...,n)$, *в* E. *Пусть* $\sup\limits_{\substack{x\in U\\ t\in[t_0-a,t_0+a]}} p_i\left(f(x,t)\right)<\infty$ $(i=1,2,...,n)$, *и пусть функция* $K(t)\ge 0$ *суммируема на отрезке* $\left[t_0-a,t_0+a\right]$ *и для всех* $p(x)\in\left\{p(x)\right\}$, $x,y\in U$

$$p_i\left[f(x,t)-f(y,t)\right]\le K(t)\cdot p(x-y).$$

Тогда имеется h_0, $0<h_0\le a$, *такое, что существует, и притом единственное, решение начальной задачи*

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t),\ x(t_0)=x_0,$$

определенное на $\left[t_0-h_0,t_0+h_0\right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу § 1 уравнение $\frac{dx}{dt}=f(x,t)$ с условием $x(t_0)=x_0$ эквивалентно уравнению $\widetilde{x}=A\left(\widetilde{x}\right)$ в $\widetilde{E}_{[t_0-h_0,t_0+h_0]}$, где $A\left(\widetilde{x}\right)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\left(x(\tau),\tau\right)d\tau$, причем h_0 выберем следующим образом:

$$h_0=\frac{1}{2}\min\left(h_1,h_2\right),$$

где

$$h_1=\frac{\varepsilon}{\sup\limits_{\substack{i=1,2,...,n\\ x\in U\\ t\in[t_0-a,t_0+a]}} p_{i[f(x,t)]}}$$

(если знаменатель равен нулю, то считаем h_1 произвольным положительным числом), а h_2 таково, что

$$\max\left(\int_{t_0-h_2}^{t_0} K(t)\,dt,\ \int_{t_0}^{t_0+h_2} K(t)\,dt\right)=q<1.$$

$A\left(\widetilde{x}\right)$ удовлетворяет на замкнутом множестве $\widetilde{U}_{[t_0-h_0,t_0+h_0]}$ условиям теорем 2.2 и 2.1: по лемме 3.1, $A\left(\widetilde{x}\right)$ — сжимающий оператор;

$$p_i\left(A\left(\widetilde{x}\right)-\left\{\widetilde{x}_0\right\}\right)\le\int_{t_0}^{t} p_i\left[f\left(x(\tau),\tau\right)\right]d\tau\le h_0\cdot\sup_{\substack{x\in U\\ t\in[t_0-a,t_0+a]}} p_i\left[f(x,t)\right]<\varepsilon,$$

т. е. $A\left(\widetilde{x}\right)$ отображает $\widetilde{U}_{[t_0-h_0,t_0+h_0]}$ в $\widetilde{\mathrm{Int}U}_{[t_0-h_0,t_0+h_0]}$. По теореме 2.2 существует $\widetilde{x}\in\widetilde{\mathrm{Int}U}_{[t_0-h_0,t_0+h_0]}$, такой что, $A\left(\widetilde{x}\right)=\widetilde{x}$. Пусть $y(t)\left(\left|t-t_0\right|\le h_0\right)$ — решение начальной задачи. Пусть существует t, для определенности $t>t_0$, такое, что $y(t)\notin U$. Пусть t_1 — наименьшее из всех $t,t>t_0$ для которых $y(t)\in\mathrm{Fr}U$. Тогда $y\left(\left[t_0,t_1\right]\right)\subset U$, поэтому по теореме 2.1 $y(t_1)=x(t_1)\in \operatorname{Int} U$. Получили противоречие. Значит, $y(t)\in U$ при $|t-t_0|\le h_0$ и по теореме 2.1 $y(t)=x(t)$.

Замечание. Если в условии теоремы 3.1 заменить U на все пространство E, то условие $\sup p_i\left(f(x,t)\right)<\infty$ можно отбросить. Если $U\times[t_0-a,t_0+a]$ заменить на все $E\times E^1$ и взять $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\tau)\,d\tau<1$, то существует решение, определенное на всей прямой E^1.

Теорема. 3.2. *Пусть* $f_i(x,t)$ $(i=1,2)$ *непрерывно отображают* $E\times[t_0-a,t_0+a]$ *в* E. *Пусть функции* $K_i(t)\ge 0$ $(i=1,2)$ *суммируемы на отрезке* $[t_0-a,t_0+a]$ *и для всяких* $x,y\in E$, $p(x)\in\{p(x)\}$ $p\left(f_i(x,t)-f_i(y,t)\right)\le K_i(t)\,p(x-y)$. *Пусть* $h_0=\min(h_{01},h_{02})$, *где* h_{0i} $(i=1,2)$ *выбраны согласно теореме* 3.1 *и*

$$q=\max\left(\int\limits_{t_0-h_0}^{t_0}K_i(t)\,dt,\ \int\limits_{t_0}^{t_0+h_0}K_i(t)\,dt\right).$$

Тогда если

$$p_k\left(f_1(x,t)-f_2(x,t)\right)\le\frac{\varepsilon}{2h_0}(1-q)$$

для любой точки $(x,t)\in E\times[t_0-a,t_0+a]$ $(k=1,2,...,n)$ *и* $p_k\left(x_0^{(1)}-x_0^{(2)}\right)\le\frac{\varepsilon}{2}(1-q)$ $(k=1,2,...,n)$, *то*

$$\sup_{[t-t_0]\le h_0}p_k\left(x_1(t)-x_2(t)\right)\le\varepsilon\quad(k=1,2,...,n),$$

где $x_i(t)$ *— решение начальной задачи*

$$\frac{dx}{dt}=f_i(x,t),\ x(t_0)=x_0^{(i)}.$$

Доказательство. По теореме 3.1 операторы

$$A_1(\tilde{x})=x_0^{(1)}+\int\limits_{t_0}^{t}f_1\left(x(\tau),\tau\right)d\tau$$

и

$$A_2(\tilde{x})=x_0^{(2)}+\int\limits_{t_0}^{t}f_2\left(x(\tau),\tau\right)d\tau$$

удовлетворяют условиям теоремы 2.2 в пространстве $\tilde{E}_{[t_0-h_0,\,t_0+h_0]}$. Так как, кроме того,

$$\tilde{p}_i(A_1(\tilde{x})-A_2(\tilde{x}))\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{[t-t_0]\leqslant h_0}[p_i(x_0^{(1)}-x_0^{(2)})]+h_0\cdot p_i(f_1(x(t),\ t)-f_2(x(t),\ t))]\leqslant\varepsilon(1-q),$$

то теорема сводится к теореме 2.4.

Лемма 3.2. *Пусть* $f(x,\ t)$ *непрерывно отображает* $M\times S$ *в* E, *где* $M\subseteq E$, $S\subseteq E^1$. *Тогда оператор* $E(\tilde{x})=f(x(t),\ t)$

1) *определен на* $\tilde{M}_S$ *и действует в* $\tilde{E}_S$,

2) *непрерывен.*

Доказательство. 1) Суперпозиция непрерывных функций непрерывна.

Докажем утверждение 2). Пусть $\tilde{x}\in\tilde{M}_S$ $\tilde{x}\in x(t)$ — непрерывная функция, определенная на всяком бикомпактном множестве $B\subseteq S$, следовательно, множество X ее значений на B бикомпактно, а значат, и $Y=X\times B$ бикомпактно. Мы будем рассматривать Y как бикомпактное множество в локально выпуклом пространстве $E \times E^1$.

Пусть дана окрестность нуля $V \subset E$. Для каждой точки $(x, t) \in Y$ существует (в силу непрерывности $f(x, t)$) окрестность нуля $W_{x,t} \subset E \times E^1$ такая, что если $(x', t') \in (x, t) + W_{x,t} + W_{x,t}$, то $f(x', t') - f(x, t) \in V$. Из множества окрестностей $(x, t) + W_{x,t}$, покрывающего Y, выберем конечное покрытие $(x_i, t_i) + W_{x_i, t_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), и пусть $W = \bigcap_{i=1}^{k} W_{x_i, t_i}$, $W = W^* \times W^{**}$, где W^* и W^{**} — окрестности нулей соответственно в E и E^1.

Пусть теперь $\tilde{y} \in \tilde{M}_S$ таково, что $\tilde{y} - \tilde{x} \in W_S^*$, т. е. $y(t) - x(t) \in W^*$ для всякого $t \in B$. Тогда $f(x(t), t) - f(y(t), t) \in V$ для всякого $t \in B$. В самом деле, пусть $t \in B$, и пусть (x_i, t_i) таково, что $(x(t), t) \in (x_i, t_i) + W_{x_i, t_i}$. Так как

$$(y(t), t) \in (x(t), t) + W \subset (x(t), t) + W_{x_i, t_i},$$

то

$$(y(t), t) \in (x_i, t_i) + W_{x_i, t_i} + W_{x_i, t_i},$$

откуда и следует, что $f(x(t), t) - f(y(t), t) \in V$.

Лемма 3.3. *Пусть $f(x, t)$ непрерывно отображает $M \times S$ в E ($M \subseteq E$, $S \subseteq E^1$), причем для каждого компакта $B \subseteq S$ существует бикомпакт $F_B \subset E$, такой, что $f(M \times B) \subseteq F_B$. Пусть S выпукло.*

Тогда оператор $A(\tilde{x}) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau) d\tau$

1) *определен на $\tilde{M}_S$ и действует в $\tilde{E}_S$,*
2) *непрерывен на $\tilde{M}_S$,*
3) $\overline{A(\tilde{M}_S)}$ *бикомпактно.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из теорем 1.7 и 1.5. Утверждение 2) следует из леммы 3.2 и теоремы 1.3. Докажем утверждение 3). Так как $f(x(\tau), \tau)$ — непрерывная функция (при $x(\tau) \in M$), то (согласно теореме 1.7)

$$\int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau) d\tau = \lim_{\substack{\max \Delta\tau_i^{(k)} \to 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n_k \;\; k \to \infty}} \sum_{i=1}^{n_k} f[x(\tau_i^{(k)}), \tau_i^{(k)}] \Delta\tau_i^{(k)} =$$

$$= |t - t_0| \lim_{\substack{\max \Delta\tau_i^{(k)} \to 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n_k \;\; k \to \infty}} \sum_{i=1}^{n_k} f[x(\tau_i^{(k)}), \tau_i^{(k)}] \frac{|\Delta\tau_i^{(k)}|}{|t - t_0|}.$$

Следовательно, для всякого отрезка $[t_0, t]$ (или $[t_0, t]$) $\subseteq S$ и всякого $\tilde{x} \in \tilde{M}_S$ $\int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau) d\tau \in F_t''$, где $F_t'' = \bigcup_{[\lambda] \leqslant h} \lambda F_t'$, а F_t' — замкнутая выпуклая оболочка множества $F_{B = [t_0, t]}$. F_B бикомпактно; значит, и F_t'' — бикомпактно (см. [9], гл. II, § 4, п. 1).

Таким образом, множество значений всех функций $A(\tilde{x})$ ($\tilde{x} \in \tilde{M}_S$) во всякой точке $t \in S$ входит в некоторое бикомпактное множество F_t''. Далее, множество $A(\tilde{M}_S)$ этих функций равностепенно непрерывно (см. [10], § 8, п. 8). Действительно, пусть дано $t_1 \in S$ и окрестность нуля $U = U(x : p_i(x) < \varepsilon)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Возьмем какое-нибудь

$B=[t_1-h,\ t_1+h]\subseteq S$ и положим $\eta=\dfrac{\varepsilon}{\sup\limits_{\substack{i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\\ y\in F_B}} p_i(y)}$ (если знаменатель равен нулю, то считаем η любым положительным числом). $\eta>0$, так как F_B бикомпактно, а $p_i(y)$ — непрерывные функции. Положим

$$\delta=\min(h,\ \eta).$$

Тогда из того, что $|t_2-t_1|<\delta$, следует для всякого $\tilde{x}\in\tilde{M}_S$:

$$z=\int\limits_{t_0}^{t_2} f(x(\tau),\ \tau)d\tau-\int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(\tau),\ \tau)d\tau\in U,$$

так как

$$p_i(z)=p_i\left(\int\limits_{t_0}^{t_2} f(x(\tau),\ \tau)d\tau\right)\leqslant\sup_{y\in F_B} p_i(y)\cdot|t_2-t_1|<\varepsilon\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

По теореме Асколи (Арцела; см. [10], § 13, п. 9) множество $\overline{A(M_S)}$ бикомпактно.

Теорема 3.3. *Пусть* $f(x,\ t)=f_1(x,\ t)+f_2(x,\ t)$, *где* $f_1(x,\ t)$ *и* $f_2(x,\ t)$ *непрерывно отображают* $U\times[t_0-a,\ t_0+a]$ $(U=U(x:p_i(x-x_0)\leqslant\varepsilon)$; $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $p_i(x)\in\{p(x)\}$ *в* E. *Пусть* $\overline{f_2(U\times[t_0-a,\ t_0+a])}$ *бикомпактно, а* $f_1(x,\ t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.1.

Тогда найдется $h>0$ *такое, что существует решение начальной задачи*

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ t),\quad x(t_0)=x_0,$$

определенное на $[t_0-h,\ t_0+h]$.

Доказательство. Уравнение $\dfrac{dx}{dt}=f(x,\ t)$ с начальным условием $x(t_0)=x_0$ эквивалентно уравнению $\tilde{x}=A_1(\tilde{x})+A_2(\tilde{x})$, где

$$A_1(\tilde{x})=x_0+\int\limits_{t_0}^{t} f_1(x(\tau),\ \tau)d\tau,\quad A_2(\tilde{x})=x_0+\int\limits_{t_0}^{t} f_2(x(\tau),\ \tau)d\tau,$$

в $\tilde{E}_{[t_0-h,\ t_0+h]}$, причем $h>0$ возьмем равным $\min(h_1,\ h_2)$, где $h_1>0$ таково, что

$$\max\left(\int\limits_{t_0-h_1}^{t_0} K(\tau)d\tau,\ \int\limits_{t_0}^{t_0+h_1} K(\tau)d\tau\right)=q<1,$$

а

$$h_2<\frac{\varepsilon}{\sup\limits_{\substack{x\in U\\ t\in[t_0-a,\ t_0+a]\\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n}} p_i[f_1(x,\ t)]+\sup\limits_{\substack{x\in U\\ t\in[t_0-a_0,\ t_0+a]\\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n}} p_i[f_2(x,\ t)]}$$

(если знаменатель равен нулю, то считаем h_2 произвольным положительным числом). Из леммы 3.3 следует, что условия 2) и 3) теоремы 2.3 выполнены (в качестве T берем $\tilde{U}_{[t_0-h,\ t_0+h]}$; это множество замкнуто и выпукло, так как U замкнуто и выпукло). Из доказательства леммы 3.1 следует, что условие 1) теоремы 2.3 выполнено. Условие 4) теоремы 2.3 также выполнено: если $\tilde{x}$, $\tilde{y}\in\tilde{U}_{[t_0-h,\ t_0+h]}$, то

$$\tilde{p}_i(A_1(\tilde{x})+A_2(\tilde{x})-\tilde{x}_0)\leqslant h\cdot[\sup p_i(f_1(x,\ t))+\sup p_i(f_2(x,\ t))]\leqslant\varepsilon.$$

Мы доказали теорему, сведя ее к теореме 2.3.

Теорема 3.4. *Пусть* $f(x,\ t)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.3, *где* $M=E$,

$S=[t_0,\ +\infty]$ и пусть существует $p(x)\in\{p(x)\}$ и непрерывная функция $G(r,\ t)$, не убывающая по r ($t\geqslant 0$, $r\geqslant 0$) и такая, что при $x\in E$, $t\in S$

$$p_0(f(x,\ t))\leqslant G(p_0(x),\ t). \tag{3.1}$$

Пусть для всякого $r_0\geqslant 0$ существует функция $g(t)$, определенная на S и такая, что

$$\frac{dg}{dt}\geqslant G(g(t),\ t),\quad g(t_0)=r_0. \tag{3.2}$$

Тогда для всякого $x_0\in E$ существует решение начальной задачи

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ t),\quad x(t_0)=x_0,$$

определенное на всем S.

Доказательство. На замкнутом выпуклом множестве

$$T=T(\tilde{x}=x(t):p_0(x(t))\leqslant g_0(t))\quad (T\subset\tilde{E}_S),$$

где $g_0(t)$ такова, что $\dfrac{dg_0}{dt}\geqslant G(g_0(t),\ t)$, $g_0(t_0)=p_0(x_0)$, определим оператор

$$A(\tilde{x})=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x(\tau),\ \tau)d\tau.$$

По лемме 3.3, $\overline{A(T)}$ — бикомпакт, $\overline{A(T)}\subset\tilde{E}_S$ и A непрерывен на T.

Покажем, что $A(T)\subseteq T$. Пусть $\tilde{x}\in T$, т. е. $p_0(x(t))\leqslant g_0(t)$ при $t\in S$. Тогда

$$p_0\left(x_0+\int_{t_0}^{t}f(x(\tau),\ \tau)d\tau\right)\leqslant p_0(x_0)+\int_{t_0}^{t}p_0(f(x(\tau),\ \tau))d\tau\leqslant$$

$$\leqslant p_0(x_0)+\int_{t_0}^{t}G(p_0(x(\tau)),\ \tau)d\tau)\leqslant p_0(x_0)+\int_{t_0}^{t}G(g_0(\tau),\ \tau)d\tau\leqslant g_0(t).$$

Последнее неравенство следует из определения функции $g_0(t)$. Таким образом, оператор A на множестве T удовлетворяет условиям принципа Тихонова (см. [7], стр. 767), поэтому существует $\tilde{x}\in T$ такой, что $A(\tilde{x})=\tilde{x}$, т.е. существует функция $x(t)$, определенная на $S=[t_0,\ +\infty]$ и такая, что $x(t_0)=x_0$, $\dfrac{dx}{dt}=f(x,\ t)$. При этом

$$p_0(x(t))\leqslant g_0(t). \tag{3.3}$$

Пусть для всякого $r_0\geqslant 0$ существует ограниченная функция $g_0(t)\leqslant C_{r_0}$, определенная на $S=[t_0,\ +\infty]$ и такая, что $g_0(t_0)=r_0$, и пусть неравенство (3.1) выполнено для всякого $p(x)\in\{p(x)\}$. Повторив доказательство теоремы 3.4 для множества

$$T=T(\tilde{x}=x(t):p(x(t))\leqslant g_p(t)\ \text{для всякого}\ p(x)\in\{p(x)\}),$$

где $g_p(t)$ — ограниченные функции, определенные на S и такие, что $\dfrac{dg_p}{dt}\geqslant G(g_p(t),\ t)$, $g_p(t_0)=r_p=p(x_0)$, получаем неравенство (3.3) для всякого $p(x)\in\{p(x)\}$:

$$p(x(t))\leqslant g_p(t)\leqslant C_{r_p}, \tag{3.4}$$

где $x(t)$ — решение начальной задачи $\dfrac{dx}{dt}=f(x,\ t)$, $x(t_0)=x_0$, а $r_p=p(x_0)$.

Неравенства (3.4) означают, что функция $x(t)$ ограничена, т. е. множество ее значений ограничено (см. [5], стр. 45).

Таким образом, получена

Теорема 3.5. *Пусть условия теоремы* 3.4 *выполнены для всякого $p(x)\in\{p(x)\}$, причем* *для всякого* $r_0 \geqslant 0$ *существует ограниченная функция* $g_0(t)$, *определенная на* S *и такая, что*

$$\frac{dg_0}{dt} \geqslant G(g_0(t),\ t), \quad g_0(t_0) = r_0.$$

Тогда для всякого $x_0 \in E$ *существует ограниченное решение начальной задачи*

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\ t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Определение 3.1 Пусть $f(x,\ t)$ отображает $E \times [t_0,\ +\infty]$ в E. Пусть $f(0,\ t) = 0$. Точка $x = 0$ называется условно устойчивой (соответственно условно асимптотически устойчивой) точкой уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x,\ t)$, если для всякой окрестности нуля $U \subset E$ существует окрестность нуля $V \subset E$ такая, что если $x_0 \in V$, то найдется решение начальной задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\ t), \quad x(t_0) = x_0$$

такое, что для всякого $t \in [t_0,\ +\infty]$, $x(t) \in U$ (соответственно $x(t) \in U$ и $x(t) \to 0$ при $t \to 0$).

Замечание. Если решение начальной задачи для всякого x_0 в некоторой окрестности нуля единственно, то условная устойчивость совпадает с устойчивостью.

Теорема 3.6. *Пусть условия теоремы* 3.4 *выполнены для всякого* $p(x) \in \{p(x)\}$, *а в* (3.2) *имеет место равенство. Пусть* $f(0,\ t) = 0$, $G(0,\ t) = 0$, *причем точка* $g = 0$ *для уравнения* $\frac{dg}{dt} = G(g,\ t)$ *условно устойчива (соответственно условно асимптотически устойчива).*

Тогда $x = 0$ *— условно устойчивая (соответственно условно асимптотически устойчивая) точка для уравнения* $\frac{dx}{dt} = f(x,\ t)$.

Доказательство. Пусть дана окрестность нуля

$$U = U(x : p_i(x) < \varepsilon) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad p_i(x) \in \{p(x)\}.$$

Пусть $\delta > 0$ таково, что если $0 \leqslant r_0 < \delta$, то найдется решение начальной задачи $\frac{dg_0}{dt} = G(g_0(t),\ t)$, $g_0(t) = r_0$, такое, что $g_0(t_0) < \varepsilon$ для всякого $t \in [t_0,\ +\infty)$. Положим $V = V(x : p_i(x) < \delta)$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Пусть $x_0 \in V$. Повторив доказательство теоремы 3.4 для множества

$$T = T(\tilde{x} = x(t) : p(x(t)) \leqslant g_p(t) \text{ для всех } p(x) \in \{p(x)\}),$$

где $g_p(t)$ — решение начальной задачи

$$\frac{dg_p}{dt} = G(g_p,\ t), \quad g_p(t_0) = p(x_0)$$

(откуда следует: $g_{p_i}(t_0) < \delta$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$)), такое, что $g_{p_i}(t) < \varepsilon$ ($i = 1,\ \ldots,\ n$), для всякого $t \in [t_0,\ +\infty]$, получим решение $x(t)$ начальной задачи $\frac{dx}{dt} = f(x,\ t)$, $(t_0) = x_0$, такое, что для всякого $t \in [t_0,\ +\infty]$

$$p(x(t)) \leqslant g_p(t). \tag{3.5}$$

Положив в (3.5) $p(x) = p_i(x)$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), заключаем, что для всякого $t \in [t_0,\ +\infty]$

$$x(t) \in U.$$

Если точка $g = 0$ условно асимптотически устойчива для уравнения $\frac{dg}{dt} = G(g,\ t)$, то можно считать, что $g_p(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для всякого $p(x) \in \{p(x)\}$.

Тогда из (3.5) получаем:

$$p(x(t)) \leqslant g_p(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

т.е. точка $x = 0$ условно асимптотически устойчива для уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x,\ t)$

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить В. В. Немыцкого за постановку задачи и ценные указания.

(Поступило в редакцию 21/XП 1960 г.)

Литература

1. М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, Труды семин. по функц. анализу Воронежск. гос. унив., 2 (1956), 3—23.
2. A. Stokes, The application of a fixed-point theorem to a variety of nonlinear stability problems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, № 2 (1959), 231—235.
3. М. А, Наймарк, Нормированные кольца, Москва, Гостехиздат, 1956.
4. Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, Москва, ИЛ, 1951.
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Пространства основных и обобщенных функций, Москва, Фиэматгиз, 1958.
6. Н. Бурбаки. Общая топология, Москва, Фиэматгиз, 1958.
7. A. Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111 (1935), 767.
8. Г. Е. Шилов, Математический анализ, Москва, Физматгиз, 1960.
9. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, Москва, ИЛ, 1959.
10. N. Bourbaki, Topologie générale (Fascicule de résultats), Paris, 1953.
11. В. М. Миллионщиков, К теории дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = f(x,\ t)$ в локально выпуклых пространствах, ДАН СССР, т. 131, № 3 (1960), 510—513.
12. R. S. Phillips, Integration in a convex linear topological space, Trans. Amer. Math. Soc, 47, № 1 (1940), 114—145.