УДК 517.925

Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений

В. М. Миллионщиков (Москва)

В настоящей работе* строится теория линейных систем дифференциальных уравнений, адекватная метрической теории динамических систем. Как известно, поведение траекторий динамической системы Δ, заданной гладким векторным полем на n-мерном многообразии класса C^2 (которое мы будем предполагать компактным), вблизи данной траектории $x_0(t)$ описывается системой в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = D_x f(x_0(t))\delta x. \tag{1}$$

Если траектория $x_0(t)$ фиксирована, то мы имеем дело с фиксированной линейной системой**

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{2}$$

Однако с точки зрения метрической теории динамических систем (см. [3], глава VI) существенно поведение не отдельной траектории системы Δ, а совокупностей траекторий, множество начальных точек которых имеет положительную инвариантную меру***. В соответствии с этим нас будут интересовать не отдельные системы (2), а некоторые их совокупности. Легко видеть, что если $x_k(t)$ — траектории системы Δ, то $\tilde{x}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(t_k + t)$ (предел равномерный на отрезках) — также траектория системы Δ, и что если $\frac{d\delta x}{dt} = A_k(t)\delta x$ система в вариациях вдоль траектории $x_k(t)$, то $\frac{d\delta x}{dt} = \tilde{A}(t)\delta x$ — система в вариациях вдоль траектории $\tilde{x}(t)$, где $\tilde{A}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} A_k(t_k + t)$ (предел, равномерный на отрезках)****. Мы получаем, таким образом, естественное непрерывное отображение динамической системы Δ в динамическую систему D сдвигов матричных функций $A(t)$ (эта система описана на стр. 533—535 книги [3], правда, для числовых функций, но различие несущественно). Для исследования удобнее, фиксировав любую траекторию $x_0(t)$ системы Δ, рассматривать подсистему $\Delta_{x_0(t)}$ системы Δ, определенную на замыкании траекторий $x_0(t)$. Первый основной шаг состоит в том, что вместо этой динамической системы рассматривается динамическая система D_A сдвигов матричной функции $A(t) = D_x f(x_0(t))$ (подсистема системы D), которая является непрерывным образом системы $\Delta_{x_0(t)}$ (Заметим, что, например, из строгой эргодичности динамической системы Δ вытекает строгая эргодичность динамической системы D_A и т. п.)

Итак, пусть дана матричная функция $A(t)$, ограниченная и равномерно непрерывная на прямой. Будем изучать систему (2). (Эта система уже может не быть системой в вариациях ни для какой динамической системы Δ, поэтому эта задача более общая, чем предыдущая.)

Одним из основных приемов, используемых при изучении системы (2), является

---

* Краткое изложение этой работы опубликовано в заметке [5].

** Результаты, полученные для таких систем до 1965 года, изложены в [1], [2].

*** По теореме Крылова — Боголюбова (см. [3], стр. 514, теорема 24) на системе Δ существует нормированная инвариантная мера.

**** Мы предполагаем здесь, что многообразие вложено в эвклидово пространство и векторное поле определено в его окрестности.

приведение ее к треугольному виду

$$\dot{u} = P(t)u\,, \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t), & \dots\,, & p_{1n}(t) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & p_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

перроновским преобразованием $x = U(t)u$ (см. [1], стр. 261—272). Зафиксируем такое преобразование и рассмотрим динамическую систему D_P сдвигов матричной функции $P(t)$.

Сначала наша цель — изучение связей между динамическими системами D_A и D_P (их пространства обозначим соответственно через R_A и R_P). Объясним, для чего это нужно. Функции $\varphi_i(\tilde{P}) \equiv \tilde{p}_{ii}(0)$, где $\tilde{P}(t) \in R_P$, непрерывны на R_P. Поэтому, согласно эргодической теореме Биркгофа (см. [3], стр. 480—490), для почти всех $\tilde{P} \in R_P$ (в смысле любой инвариантной меры на D_P) существуют средние

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_i(\tilde{P}(\tau))d\tau = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{p}_{ii}(\tau)d\tau,$$

а значит, система $\dot{u} = \tilde{P}(t)u$ — правильная (см. [1], стр. 141, теорема Ляпунова). Спрашивается, будут ли в D_A почти все (в смысле любой инвариантной меры на D_A) функции $\tilde{A}(t) \in R_A$ такими, что система $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ — правильная?

(Ниже дается, в частности, положительное решение этого вопроса.) Определим отображение F системы D_A на систему D_P так:

$$F(\tilde{A}(t) = \lim_{k\to\infty} A(t_k + t)) = \tilde{P}(t) = \lim_{k\to\infty} P(t_k + t)$$

(знак $\lim$ здесь означает не предел, а любую из предельных точек последовательности, (в смысле равномерной сходимости на отрезках), так что это отображение — многозначное в обе стороны).

Фундаментальная роль отображения F основана на следующей лемме*.

Лемма 1. *Если* $F(\tilde{A}) = \tilde{P}$, *то существует перроновское преобразование* $x = \tilde{U}(t)u$, *приводящее систему* $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ *к треугольному виду* $\dot{u} = \tilde{P}(t)u$.

Большое значение для дальнейшего изложения имеет

Лемма 2. *Для всякой инвариантной меры* μ[1] *на* D_A *и всякого множества* $M \subseteq R_A$ *такого, что* $\mu(M) > 0$ ($\mu(M) = 1$), *существует инвариантная мера* ν *на* D_P *такая, что* $\nu(F(M)) > 0$ (*соответственно* $\nu(F(M)) = 1$).

Обратно, для всякой инвариантной меры ν *на* D_P *и всякого множества* $N \subseteq R_P$ *такого, что* $\nu(N) > 0$ ($\nu(N) = 1$), *существует инвариантная мера* μ *на* D_A *такая, что* $\mu(F^{-1}(N)) > 0$ (*соответственно* $\mu(F^{-1}(N)) = 1$).

Доказательство. Отметим простые, но важные свойства отображения F, вытекающие из его определения:

---

* Эта лемма по существу содержится в одном из предложений заметки [4].

[1] Ниже под инвариантной мерой понимается инвариантная нормированная регулярная мера Каратеодори — Лебега (см [3], стр. 461). Инвариантные меры, которые строятся в теореме Крылова—Боголюбова (см [3], гл VI, § 9), всегда обладают этими свойствами.

1) если $M \subseteq R_A$ — замкнутое множество, то $F(M) \subseteq R_P$ — замкнутое множество,

2) если $N \subseteq R_P$ — замкнутое множество, то $F^{-1}(N) \subseteq R_A$ — замкнутое множество,

3) если $F\left(\widetilde{A}(t)\right) = \widetilde{P}(t)$, то

$$F\left(\widetilde{A}(\tau + t)\right) = \widetilde{P}(\tau + t). \tag{4}$$

Мы докажем только прямое утверждение леммы, так как обратное утверждение доказывается совершенно аналогично.

Покажем сначала, что если дана инвариантная мера μ на D_A и задано множество $M \subseteq R_A$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется инвариантная мера ν_ε на D_P такая, что

$$\nu_\varepsilon\left(F(M)\right) \geqslant \mu(M) - \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть $M_\varepsilon \subseteq M$ — замкнутое множество такое, что $\mu(M_\varepsilon) \geq \mu(M) - \frac{\varepsilon}{2}$ (см. [3]: стр. 461, аксиома V, стр. 462, теорема 7).

По эргодической теореме Биркгофа (см. [3], гл. VI, § 5) почти для всех $\widetilde{A}(t) \in R_A$ (в смысле меры μ) существует

$$\theta\left(\widetilde{A}(t)\right) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{M_\varepsilon}\left(\widetilde{A}(t + \tau)\right) d\tau, \tag{6}$$

и

$$\int_{R_A} \theta\left(\widetilde{A}\right) d\mu = \int_{R_A} \chi_{M_\varepsilon}\left(\widetilde{A}\right) d\mu = \mu(M_\varepsilon). \tag{7}$$

(Через χ_S мы всюду обозначаем характеристическую функцию множества S.) Из (7) следует, что найдется функция $\widetilde{A}_0 \in R_P$, для которой

$$\theta\left(\widetilde{A}_0\right) > \mu(M) - \varepsilon. \tag{8}$$

Введем обозначение: $N_\varepsilon = F(M_\varepsilon)$; зафиксируем один из элементов множества $F\left(\widetilde{A}_0\right)$ и обозначим его через $\widetilde{P}_0$.

Обозначим через ν_ε инвариантную меру на D_P, которая строится, как в теореме Крылова — Боголюбова (см. [3], гл. VI, § 9), исходя из меры m, определяемой формулой

$$m(S) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \widetilde{P}_0 \in S, \\ 0, & \text{если} \quad \widetilde{P}_0 \notin S. \end{cases}$$

(Инвариантная мера, которая строится по мере m, в теореме Крылова — Боголюбова может не определяться однозначно мерой m, но мы возьмем в качестве ν_ε любую из этих инвариантных мер.) Докажем, что так выбранная инвариантная мера ν_ε на D_P удовлетворяет неравенству (5).

$$\nu_\varepsilon(N_\varepsilon) = \lim_{k \to \infty} \int_{R_P} \psi_k\left(\widetilde{P}\right) d\nu_\varepsilon, \tag{9}$$

где $\left\{\psi_k\left(\widetilde{P}\right)\right\}$ — невозрастающая последовательность непрерывных функций такая, что

$$\psi_k\left(\widetilde{P}\right) \xrightarrow[k \to \infty]{} \chi_{N_\varepsilon}\left(\widetilde{P}\right)$$

см. [3], стр. 509—510, 514—516). Используя определение меры ν_ε и формулы (6), (8), получим

$$\int\limits_{R_P} \psi_k\left(\widetilde{P}(t)\right)d\nu_\varepsilon = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{t_m}\int\limits_0^{t_m}\psi_k\left(\widetilde{P}_0(t+\tau)\right)d\tau \geqslant \lim_{m\to\infty}\frac{1}{t_m}\int\limits_0^{t_m}\chi_{N_\varepsilon}\left(\widetilde{P}_0(t+\tau)\right)d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{m\to\infty}\frac{1}{t_m}\int\limits_0^{t_m}\chi_{M_\varepsilon}\left(\widetilde{A}_0(t+\tau)\right)d\tau > \mu(M)-\varepsilon.$$

Отсюда и из (9) вытекает, что

$$\nu_\varepsilon\left(F(M)\right) \geqslant \nu_\varepsilon\left(N_\varepsilon\right) \geqslant \mu(M)-\varepsilon .$$

В силу теоремы 23 книги [3] (см. [3], стр. 511), из последовательности построенных мер $\left\{\nu_{\frac{1}{k}}\right\}$ ($k=1,2,\ldots$) можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Ее предел ν удовлетворяет (в силу (5)) неравенству $\nu\left(F(M)\right)\geqslant\mu(M)$.

Лемма 2 доказана.[1]

Определение 1. Назовем λ вероятным показателем системы (2), если некоторое перроновское преобразование $x=U(t)u$ приводит систему (2) к треугольному виду (3) такому, что для некоторого i на динамической системе D_P найдется инвариантная мера ν такая, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \widetilde{p}_{ii}(\tau)d\tau=\lambda$$

для почти всякой (в смысле меры ν) функции $\widetilde{P}(t)\in R_P$.

Из леммы 2 работы [4] вытекает, что определение 1 эквивалентно определению 3 из [4].

Из леммы 2 настоящей статьи вытекает, что определение 1 эквивалентно следующему определению.

Определение 2. Назовем λ вероятным показателем системы (2), если на динамической системе D_A существует инвариантная мера μ такая, что для почти всех (в смысле меры μ) $\widetilde{A}(t)\in R_A$ система $\dot{x}=\widetilde{A}(t)x$ имеет λ одним из своих характеристических показателей.

Множество вероятных показателей системы (2) будем обозначать через Λ_p (или через $\Lambda_p(A)$) и называть вероятным спектром системы (2).

Раскрытию содержания этого понятия служит также теорема 1 в заметке [5], доказательство которой см. в [4] (теорема 1). Из леммы 2 настоящей статьи и из теоремы 2 работы [4] вытекает

Теорема 1. *В смысле любой инвариантной меры на динамической системе D_A почти все $\widetilde{A}(t)\in R_A$ таковы, что система $\dot{x}=\widetilde{A}(t)x$ — статистически правильная.*

Определение 3. Назовем систему (2) бирегулярной, если существует перроновское преобразование $x=U(t)u$, приводящее ее к треугольному виду (3) такому, что существуют пределы

$$\lambda_i=\lim_{|t|\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t p_{ii}(\tau)d\tau \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Замечание. В силу теоремы Ляпунова (см. [1], стр. 141) бирегулярная система — правильная; обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 2. *Для любой транзитивной инвариантной меры μ на D_A найдется*

[1] Множество $F(M)$ измеримо; но поскольку здесь это не доказано, под $\nu\left(F(M)\right)$ следует понимать внутреннюю меру.

множество $K \subseteq R_A$ *такое, что*

1) $\mu(K)=1$,

2) *система* $\dot{x}=\widetilde{A}(t)x$ *бирегулярна при* $\widetilde{A}(t)\in K$,

3) *характеристические показатели системы* $\dot{x}=\widetilde{A}(t)x$ *не зависят от* $\widetilde{A}(t)$ *при* $\widetilde{A}(t)\in K$.

Доказательство. Обозначим через M множество тех $\widetilde{A}(t)\in R_A$, для которых $\mu_{\widetilde{A}}\equiv\mu$ ($\mu_{\widetilde{A}}$ — индивидуальная мера, соответствующая точке $\widetilde{A}$, см. [3], стр. 518). В силу теоремы 29 из [3], (см. [3], стр. 529; при доказательстве этой теоремы показано, что $\mu(\mathcal{E}_p)=1$, хоть это и не упомянуто в ее формулировке) имеем

$$\mu(M)=1.$$

Введем обозначение $N=F(M)$. По лемме 2 существует инвариантная мера ν на D_P такая, что $\nu(N)=1$. В силу формулы (5') на стр. 520 в [3], получим

$$1=\nu(N)=\int\limits_U \mu_{\widetilde{P}}(N)\nu(d\widetilde{P})=\int\limits_{U_R}\mu_{\widetilde{P}}(N)\nu(d\widetilde{P}); \tag{10}$$

здесь U — множество квазирегулярных точек системы D_P (см. [3], стр. 518), U_R — множество регулярных точек системы D_P (см. [3], стр. 525).

Так как $\mu_{\widetilde{P}}(N)\leqslant 1$, то из (10) вытекает, что для почти всех (в смысле меры ν) регулярных точек $\widetilde{P}$

$$\mu_{\widetilde{P}}(N)=1.$$

Фиксируем любую из этих точек и обозначим ее P_0. Тогда

$$\mu_{P_0}(N)=1.$$

Пусть N_1 — множество тех точек $\widetilde{P}\in N$, для которых

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau \tag{11}$$

существует и равен

$$\int\limits_{R_P}\varphi_i(\widetilde{P})\mu_{P_0}(d\widetilde{P})$$

(функция $\varphi_i(\widetilde{P})$ по определению равна $\widetilde{p}_{ii}(0)$, очевидно, $\varphi_i(\widetilde{P})$ непрерывна на $D_{\widetilde{P}}$). В силу эргодической теоремы Биркгофа (см. [3], стр. 480, 489) и транзитивности меры μ_{P_0} получим:

$$\mu_{P_0}(N_1)=1.$$

Пусть $H\subseteq N_1$ — замкнутое множество такое, что

$$\mu_{P_0}(H)>0$$

(существование такого множества вытекает из того, что μ_{P_0} — регулярная мера Каратеодори — Лебега). Фиксируем точку $P_1\in N$, для которой

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\chi_H\left(P_1(t+\tau)\right)d\tau=\mu_{P_0}(H)>0,$$

по эргодической теореме Биркгофа почти все (в смысле меры μ_{P_0}) точки обладают таким свойством. Дальше, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2, убеждаемся, что если $A_1 \in F^{-1}(P_1)$, то

$$\mu_{A_1}\left(F^{-1}(H)\right) > 0.$$

Так как $N = F(M)$, то A_1 можно взять из множества M, тогда $\mu_{A_1} \equiv \mu$ и, значит,

$$\mu\left(F^{-1}(H)\right) > 0. \tag{12}$$

Обозначим через K множество всевозможных сдвигов матричных функций из $F^{-1}(H)$. Тогда из (11), (12) и из транзитивности меры μ вытекает, что K — искомое множество.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* μ — *произвольная инвариантная мера на динамической системе* D_A. *Тогда почти все (в смысле меры* μ*)* $\widetilde{A}(t) \in R_A$ *таковы, что система* $\dot{x} = \widetilde{A}(t)x$ — *бирегулярная.*

Доказательство. Если M — множество не бирегулярных систем и $\mu(M) > 0$, то по формуле (5') (см., [3], стр. 520) имеем

$$0 < \mu(M) = \int\limits_{U_R} \mu_{\widetilde{P}}(M)\mu\left(d\widetilde{P}\right);$$

значит, найдется $\widetilde{P} \in U_R$ такое, что

$$\mu_{\widetilde{P}}(M) > 0.$$

Так как мера $\mu_{\widetilde{P}}$ транзитивна, то получим противоречие с теоремой 2.

Теорема 3 доказана.

Смысл введения бирегулярных систем состоит в том, что для них, наряду с теоремами 2 и 3, имеет место

Теорема 4. *Пусть система* (2) *перроновскими преобразованиями* $x = U(t)u$ *и* $x = V(t)v$ *приводится к треугольным видам соответственно* $\dot{u} = P(t)u$ *и* $\dot{v} = Q(t)v$, *причем*

$$\lambda_i = \lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau = \lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t q_{ii}(\tau)\,d\tau \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Пусть все λ_i *различны. Тогда* $p_{ii}(t) \equiv q_{ii}(t)$, $\left|p_{ij}(t)\right| \equiv \left|q_{ij}(t)\right|$.

Доказательство. Как доказано в [1] (см. [1], стр. 262, 264, 265), $p_{ii}(t)$ и $\left|p_{ij}(t)\right|$ вполне определяются набором линейных подпространств

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n, \tag{14}$$

по которому строится перроновское преобразование. Поэтому достаточно доказать, что эти наборы одинаковы для преобразований $x = U(t)u$ и $x = V(t)v$. Пусть первому из них соответствует набор (14), а второму — набор

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n.$$

Если выполнены условия теоремы, то система (2) имеет n решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, обладающих свойствами

$$\lambda_i = \lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t}\ln\left\|x_k(t)\right\| = \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

В самом деле, решение системы (3)

$$u_k(t) = \left\{u_k^{(1)}(t); \ldots; u_k^{(n)}(t)\right\},$$

координаты которого задаются формулами:

$$u_k^{(n)} = \ldots = u_k^{(k+1)}(t) \equiv 0, \tag{16}$$

$$u_k^{(k)}(t)=\exp\int_0^t p_{kk}[\tau]\,d\tau, \tag{17}$$

а далее (при $k\geqslant i\geqslant 2$) индухтивно:

$$u_k^{(i-1)}(t)=\int_{a_{i-1}}^t\left[p_{i-1,i}(\tau)u_k^{(i)}(\tau)+p_{i-1,i+1}(\tau)u_k^{(i+1)}(\tau)+\ldots+p_{i-1,k}(\tau)u_k^{(k)}(\tau)\right]\exp\left\{\int_\tau^t p_{i-1,t-1}(\xi)\,d\xi\right\}d\tau, \tag{18}$$

причем

$$a_{i-t}=\begin{cases}+\infty, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}>\lambda_k,\\ -\infty, & \text{если}\quad \lambda_{i-1}<\lambda_k.\end{cases}$$

удовлетворяет условию (15), где $x_k(t)=U(t)u_k(t)$. Действительно, легко проверить (по индукции из формул (17), (18)), что

$$\left|u_k^{(i)}(t)\right|\leqslant C_\varepsilon\exp\left\{\left(\lambda_k+\varepsilon\cdot\operatorname{sgn}t\right)t\right\}\ \text{ при }\ -\infty<t<+\infty\ \ (i=1,2,\ldots,n)$$

для всякого $\varepsilon>0$. (Аналогичные выкладки см., например, в [1], на стр. 548), а с другой стороны, из (17) следует, что

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{\ln\left|u_k^{(k)}(t)\right|}{t}=\lambda_k,$$

и условие (15) выполнено для $x_k(t)=U(t)u_k(t)$. Так как все λ_i различны, то всякое решение $x(t)$ системы (2), имеющее

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\|=\lambda_k,$$

пропорционально $x_k(t)$.

Итак, с одной стороны, из формул (16) вытекает, что линейное подпространство L_k ($k=1,2,\ldots,n$) натянуто на решения $x_1(t),\ldots,x_k(t)$; с другой стороны — все предыдущие рассуждения остаются верными, если p_{ij} всюду заменить на q_{ij}; и потому линейное подпространство M_k ($k=1,2,\ldots,n$) натянуто на решения $x_1(t),\ldots,x_k(t)$.

Значит, $L_k=M_k$ ($k=1,2,\ldots,n$), и теорема 4 доказана.

Из теорем 2 и 4 вытекает

Т е о р е м а 5. *Пусть* μ *— транзитивная инвариантная мера на* D_A *и пусть почти все (в смысле меры* μ*)* $\widetilde{A}(t)\in R_A$ *таковы, что система* $\dot{x}=\widetilde{A}(t)x$ *не имеет кратных характеристических показателей. Тогда отображение* F*, определенное выше, почти всюду (в смысле меры* μ*) конечнозначно.*

В случае, когда среди λ_i есть совпадающие, ситуация сложнее, чем в теореме 4, и описывается с помощью теоремы 6.

Т е о р е м а 6. *Пусть система* (2) *перроновскими преобразованиями* $x=U(t)u$ *и* $x=V(t)v$ *приводится к треугольным видам соответственно* $\dot{u}=P(t)u$ *и* $\dot{v}=Q(t)v$*, причем выполнено равенство* (13). *Пусть из условия* $\lambda_i=\lambda_j$ $(i<k<j)$ *следует, что* $\lambda_k=\lambda_i$ *(т. е. одинаковые* λ_i *стоят подряд).*

Тогда для каждого $k=1,2,\ldots,n$

$$\sum_{i\in I_k}p_{ii}(t)\equiv\sum_{i\in I_k}q_{ii}(t), \tag{19}$$

где I_k *— множество всех тех* i*, для которых* $\lambda_i=\lambda_k$.

Доказательство. Преобразование

$$u = U^{-1}(t)V(t)v \tag{20}$$

переводит систему $\dot{u} = P(t)u$ в систему $\dot{v} = Q(t)v$. В силу (13) это преобразование переводит множество векторов v, у которых $n - s_j$ (где s_j — мощность множества $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$) последних координат равны нулю, в множество векторов u, у которых $n - s_j$ последних координат равно нулю. Это вытекает из того, что всякое решение $u(t)$ системы $\dot{u} = P(t)u$ (и аналогично системы $\dot{v} = Q(t)v$), имеющее

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|u(t)\| = \lambda_k, \tag{21}$$

задается следующими формулами (и, наоборот, эти формулы всегда задают решение $u(t)$, удовлетворяющее условию (21)):

$$u(t) = \left\{u^{(1)}(t), \ldots, u^{(n)}(t)\right\},$$

$$u^{(n)}(t) = \ldots = u^{(k+1)}(t) \equiv 0,$$

$$u^{(k)}(t) = c_k \exp\left\{\int_0^t p_{kk}(\tau)\,d\tau\right\}$$

($c_k \neq 0$ — произвольная константа), а далее (при $k \geqslant i \geqslant 2$) — индуктивно:

$$u^{(i-1)}(t) = c_{i-1} \cdot \exp\left\{\int_0^t p_{i-1,i-1}(\tau)\,d\tau\right\} +$$

$$+\int_{a_{i-1}}^{t} \left[p_{i-1,i}(\tau)u^{(i)}(\tau) + p_{i-1,i+1}(\tau)u^{(i+1)}(\tau) + \ldots + p_{i-1,k}(\tau)u^{(k)}(\tau)\right] \exp\left\{\int_{\tau}^{t} p_{i-1,i-1}(\xi)\,d\xi\right\} d\tau,$$

причем

$$a_{i-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad \lambda_{i-1} > \lambda_k, \\ -\infty, & \text{если} \quad \lambda_{i-1} < \lambda_k, \\ 0, & \text{если} \quad \lambda_{i-1} = \lambda_k, \end{cases}$$

$$c_{i-1} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \lambda_{i-1} \neq \lambda_k, \\ \text{произвольной константе}, & \text{если} \quad \lambda_{i-1} = \lambda_k. \end{cases}$$

Поэтому преобразование (20) переводит всякую систему

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \ldots + p_{1s_j}u_{s_j}, \\ \dot{u}_2 &= \qquad\quad\; p_{22}u_2 + \ldots + p_{2s_j}u_{s_j}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{u}_{s_j} &= \qquad\qquad\qquad\quad p_{s_js_j}u_{s_j}, \end{aligned}$$

в систему

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= q_{11}v_1 + q_{12}v_2 + \ldots + q_{1s_j}v_{s_j}, \\ \dot{v}_2 &= \qquad\quad\; q_{22}v_2 + \ldots + q_{2s_j}v_{s_j}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{v}_{s_j} &= \qquad\qquad\qquad\quad q_{s_js_j}v_{s_j}. \end{aligned}$$

Так как ортогональное (унитарное) преобразование $u = W(t)v = U^{-1}(t)V(t)v$ сохраняет след (действительную часть следа) матрицы коэффициентов (это следует из формулы $Q(t) = W^{-1}PW - W^{-1}\dot{W}$ и того факта, что матрица $W^{-1}\dot{W}$ кососимметрична), то

$$\sum_{i=1}^{s_j} p_{ii}(t) \equiv \sum_{i=1}^{s_j} q_{ii}(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Вычитая из равенства (22) при $j = k$ равенство (22) при $j = k - 1$, получаем тождество (19), что и требовалось.

Рассмотрим теперь важный частный случай системы (2), а именно, предположим, что динамическая система D_A — строго эргодическая (так будет, например, если матрица $A(t)$ — почти периодическая по t). Из леммы 2 и теоремы 2 вытекает

Теорема 7. *Пусть динамическая система* D_A *— строго эргодическая. Тогда для почти каждой* $\widetilde{A}(t) \in R_A$ *(в смысле той единственной инвариантной меры, которая есть на* D_A*) всякая* $\widetilde{P}(t) \in F(\widetilde{A}(t))$ (*отображение* F *может быть не однозначно*) *имеет и притом одни и те же* (*но только, может быть, занумерованные в разном порядке*)

$$\lambda_i = \lim_{|t| \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{ii}(\tau)\, d\tau,$$

и набор этих λ_i *совпадает с вероятным спектром* $\Lambda_p(A)$.

Следствие 1. *Если динамическая система* D_A *— строго эргодическая, то мощность вероятного спектра* $\Lambda_p(A)$ *системы* (2) *не превосходит* n *(порядка системы* (2)).

Следствие 2. *Если динамическая система* D_A *— строго эргодическая и* $\Lambda_p(A)$ *состоит из* n *различных чисел, то отображение* F *почти всюду на* D_A *(в смысле инвариантной меры на* D_A) *конечнозначно* (*число значений не больше* $n!$).

Следствие 3. *Если динамическая система* D_A *— строго эргодическая, то для почти всякой* $\widetilde{A}(t) \in D_A$ *(в смысле инвариантной меры на* D_A) *наибольший характеристический показатель системы* $\dot{x} = \widetilde{A}(t)x$ *равен* Ω^0, *а наименьший равен* ω^0.

Это следствие вытекает из следствия теоремы 1 работы [4] и доказанной выше эквивалентности различных определений спектра $\Lambda_p(A)$.

(Поступила в редакцию 20/XI 1967 г.)

Примечание. Когда эта статья была отослана в редакцию, автору стало известно, что в ней имеются пересечения с кандидатской диссертацией В. И. Оселедца (МГУ, 1967). У В. И. Оселедца 1) имеется подход, близкий к изложенному в начале статьи; 2) приведено утверждение, играющее роль, аналогичную роли леммы 2; 3) из доказательства теорем 1—4 третьей главы диссертации можно извлечь доказательство теоремы 2 настоящей работы.

Литература

1 Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, Теория показателей Ляпунова, Москва, изд-во «Наука», 1966.

2. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, изд-во АН БССР, 1963.

3. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных

уравнений, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1949.

4. В. М. Миллионщиков, Статистически правильные системы, Матем. сб., **75 (117)** (1968), 140—151.

5. В. М. Миллионщиков, Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **179**, № **1** (1968), 20—23.