УДК 517.938

МИЛЛИОНЩИКОВ В. М.

ПОВЕДЕНИЕ УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ

Введение

1. Вопросы, рассматриваемые в этой статье, относятся к *качественной теории дифференциальных уравнений* [1], точнее, к *теории показателей Ляпунова* — см. основополагающую работу А. М. Ляпунова [2], § 3 гл. 3 книги В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [1], а также специально посвященную показателям Ляпунова монографию [3] и исчерпывающий обзор Н. А. Изобова [4].

2. Показатели Ляпунова служат для исследования устойчивости и условной устойчивости движения. *Условной устойчивостью* А. М. Ляпунов назвал устойчивость по отношению к возмущениям начальных значений, удовлетворяющих некоторому условию; состоящему в том, что возмущенные начальные значения обязаны принадлежать некоторому многообразию (проходящему через невозмущенное начальное значение). Размерность этого многообразия называют *индексом условной устойчивости.* Всякое движение условно устойчиво с индексом 0, а условная устойчивость с индексом n, где n — размерность фазового пространства, есть не что иное как просто устойчивость (по Ляпунову). Нижнее положение маятника с трением $\ddot{u}+\beta\dot{u}+\omega^2\sin u=0$ ($\beta>0$, $\omega>0$) устойчиво, так как показатели Ляпунова уравнения в вариациях этого уравнения, взятого в нижнем положении равновесия ($u = 0$, $\dot{u} =0$), отрицательны: они равны действительным частям корней характеристического уравнения $\lambda^2+\beta\lambda+\omega^2=0$, соответствующего упомянутому уравнению в вариациях $\ddot{u}+\beta\dot{u}+\omega^2=0$.

Верхнее положение равновесия маятника экспоненциально условно устойчиво с индексом 1 в линейном приближении (а следовательно, по теореме Ляпунова об условной устойчивости по первому приближению, условно устойчиво с индексом 1). Это связано с тем, что уравнение в вариациях уравнения $\ddot{u}+\beta\dot{u}+\omega^2\sin u=0$ в верхнем положении равновесия $u = \pi$, $\dot{u} = 0$ имеет вид $\ddot{u}+\beta\dot{u}-\omega^2 u=0$, и потому один из корней его характеристического уравнения $\lambda^2+\beta\lambda-\omega^2=0$ (напомним, что $\omega^2>0$) отрицателен. Если качнуть маятник так, чтобы начальная скорость $\dot{u}$ была связана с начальным отклонением (от верхнего положения) u соотношением $\dot{u}=\lambda_2 u$, где $\lambda_2=-\beta/2-\sqrt{\beta^2/4+\omega^2}$ — отрицательный корень характеристического уравнения $\lambda^2+\beta\lambda-\omega^2=0$, то маятник будет не колебаться, а стремиться к верхнему положению равновесия. Подчеркнем, что в предыдущей фразе говорилось о линейном приближении. Истинное движение маятника будет носить такой характер (характер стремления к верхнему положению равновесия при $t\to+\infty$) при условии, что точка ($u(0)$, $\dot{u}(0)$) лежит не на прямой $\dot{u}=\lambda_2(u-\pi)$, а на некоторой гладкой кривой, касающейся этой прямой в точке $u = \pi$, $\dot{u} = 0$ — в этом состоит вышеупомянутая теорема Ляпунова об условной устойчивости по первому приближению применительно к рассматриваемому примеру.

3. В дифференциальные уравнения, описывающие движение тех или: иных объектов, обычно входят некоторые параметры — в рассмотренных в предыдущем пункте простейших примерах такими параметрами являются трение β и частота собственных колебаний ω. Напомним, как меняются свойства устойчивости маятника при изменении этих параметров.

Здесь мы ограничимся рассмотрением линеаризованных уравнений. Нижнему положению равновесия соответствует уравнение $\ddot{u}+\beta\dot{u}+\omega^2u=0$, верхнему — уравнение $\ddot{u}+\beta\dot{u}-\omega^2u=0$. Обозначим через $k_0^+(\beta,\ \omega)$ *индекс экспоненциальной условной устойчивости* (т. е. число отрицательных показателей Ляпунова) первого уравнения, через $k_0^-(\beta,\ \omega)$ — то же для второго уравнения. При $\beta\geq 0$ (только такие в мы рассматриваем здесь) имеем $k_0^-(\beta,\ \omega) = 1$. Следовательно, индекс экспоненциальной условной устойчивости линеаризованного в верхнем положении равновесия уравнения маятника не зависит от параметров β, ω. Для уравнения в вариациях в нижнем положении равновесия индекс экспоненциальной условной устойчивости $k_0^+(\beta,\ \omega)$ при $\beta>0$ равен 2 (так как в этом случае оба корня уравнения $\lambda^2+\beta\lambda+\omega^2=0$ имеют отрицательные действительные части — частный случай критерия Рауса — Гурвица), а при $\beta = 0$ он равен нулю (так как оба корня уравнения $\lambda^2+\omega^2=0$ чисто мнимые). Таким образом, при положительных значениях параметра в функция $k_0^+(\beta,\ \omega)$ непрерывна (или постоянна, что в данном случае одно и то же, поскольку эта функция принимает только целые значения), а в точках $(0,\ \omega)$, т. е. при $\beta = 0$, эта функция имеет скачок при изменении β (но не при изменении ω).

Столь же хорошо известен ответ на более общий вопрос — вопрос о характере зависимости от параметров β, ω количества показателей Ляпунова уравнения в вариациях (в нижнем или в верхнем положении равновесия) маятника с трением или без трения, меньших любого заданного числа λ. Для всякого $\lambda\in\mathbf{R}$ обозначим через $k_0^\pm(\beta,\ \omega)$ количество показателей Ляпунова уравнения $\ddot{u}+\beta\dot{u}\pm\omega^2u=0$ (плюсу в верхнем индексе соответствует плюс перед ω^2, минусу — минус), меньших λ. При всяком $\lambda\in\mathbf{R}$ функции $k_0^\pm(\cdot)$ непрерывны всюду, кроме тех точек (β, ω), в которых действительная часть какого-нибудь из корней соответствующего характеристического уравнения $\mu^2+\beta\mu\pm\omega^2=0$ совпадает с λ. А в этих исключительных точках (β, ω) полуплоскости $\omega>0$ функции $k_\lambda^\pm(\cdot)$ имеют разрыв. Если $\lambda = 0$, то эти исключительные точки принадлежат,. как мы видели выше, лучу $\beta = 0$, но при других значениях λ эти точки могут располагаться на кривой, лежащей внутри угла ($\beta\geq 0$, $\omega >0$) и тогда при малом возмущении точки (β, ω) функция $k_\lambda^\pm(\cdot)$ может либо сохранить свое значение (если возмущенная точка остается на кривой), либо уменьшить, либо увеличить свое значение, смотря по тому, по какую сторону от кривой окажется возмущенная точка.

До сих пор речь шла только об индексах $k_\lambda^\pm(\cdot)$. Более детально экспоненциальную условную устойчивость можно характеризовать с помощью подпространств фазового пространства, в которых начинаются решения с показателями Ляпунова, меньшими заданного действительного числа λ; поясним, что для линейного уравнения второго порядка *показатель Ляпунова решения* $u(\cdot)$ определяется формулой

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\sqrt{\left(u(t)\right)^2+\left(\dot{u}(t)\right)^2}\ .$$

Обозначим через $E_\lambda^\pm(\beta,\ \omega)$ такое подпространство для уравнения: $\ddot{u}+\beta\dot{u}\pm\omega^2u=0$; плюсу (минусу) в верхнем индексе соответствует плюс (соответственно минус) перед ω^2. Эти подпространства как функции от (β, ω) непрерывны в тех точках, в которых непрерывны индексы, $k_\lambda^\pm(\beta,\ \omega)$, и меняются скачкообразно там, где индексы $k_\lambda^\pm(\beta,\ \omega)$ терпят скачок; первое хорошо известно и легко доказывается, второе очевидно, так как $k_\lambda^\pm(\beta,\ \omega) = \dim E_\lambda^\pm(\beta,\ \omega)$.

4. Напомним, как выглядит изложенное в предыдущих пунктах в более общей ситуации. Пусть нас интересует характер зависимости экспоненциальной условной устойчивости нулевого решения системы уравнений в вариациях системы $\dot{x}=f\left(x,\alpha\right)$, где f — гладкая функция от $(x,\ \alpha)$, в неподвижной точке $x_0(\alpha)$. Отметим, что рассмотрение этого вопроса для невырожденной особой точки (т. е. такой точки $x_0(\alpha)$, для· которой $f\left(x_0\left(\alpha\right),\alpha\right)=0$, $\operatorname{def} f_x'\left(x_0\left(\alpha\right),\alpha\neq 0\right)$, легко сводится к рассмотрению частного случая, когда $x_0\left(\alpha\right)\equiv 0$; это сведение достигается заменой $x=x_0(\alpha)+y$, причем в силу теоремы о

неявной функции $x_0(\alpha)$ гладко зависит от α, поэтому правая часть уравнения $\dot{y} = g(y,\alpha)$, возникающего в результате указанной замены, — гладкая функция от (y, α), поскольку f — гладкая функция от (x, α). Для вырожденной точки аналогичная редукция тоже возможна; хотя там гладкости по α уже может не быть, но при рассмотрении ветвей соответствующей функции мы получаем семейство уравнений, хотя и не гладко, но непрерывно зависящее от параметра, а для дальнейших рассуждений непрерывности по α достаточно.

Итак, пусть дано уравнение $\dot{x} = f(x,\alpha)$ $(x \in U \subset \mathbf{R}^n, \alpha \in A \subset \mathbf{R}^m)$, где f и f_x' непрерывны, $0 \in U$, $f(0,\alpha) \equiv 0$. Рассмотрим при всяком α уравнение $\dot{z} = A(\alpha)z$, где $A(\alpha) = f_x'(0,\alpha)$ — это уравнение в вариациях (по начальному условию, а не по α) в нуле. При всяком $\lambda \in \mathbf{R}$ обозначим через $E_\lambda(\alpha)$ векторное подпространство, образованное начальными значениями тех решений уравнения $\dot{z} = A(\alpha)z$, у которых показатель Ляпунова $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln|z(t)|$ меньше λ. Как известно, это векторное подпространство в $\mathbf{R}^n$ порождено действительными и мнимыми частями тех собственных векторов линейного отображения $A(\alpha)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, которые соответствуют собственным значениям, имеющим действительную часть меньше λ. Поэтому *во всякой точке* α *для всякого* λ, *отличного от действительных частей всех собственных значений линейного преобразования* $A(\alpha)$, *функция* $E_\lambda(\cdot)$ *непрерывна.*

5. Аналогичные утверждения имеют место и для *циклов,* т. е. когда рассматривается экспоненциальная условная устойчивость цикла, а не неподвижной точки. Не останавливаясь на этом подробней, отметим, что сходство этой ситуации с ситуацией, рассмотренной в предыдущем пункте, основано на *теории Флоке — Ляпунова,* в силу которой система уравнений в вариациях автономной системы вдоль цикла некоторым ляпуновским преобразованием приводится к системе с постоянными коэффициентами. Есть, впрочем, и различие, состоящее в том, что цикл не бывает экспоненциально устойчивым, т. е. экспоненциально условно устойчивым с индексом *n.*

6. Положение может в корне измениться, если от рассмотрения характера зависимости от параметра экспоненциальной условной устойчивости покоя и периодического движения перейти хотя бы в линейном приближении к рассмотрению характера зависимости от параметра экспоненциальной условной устойчивости движения более сложного вида. Открытием более сложного характера этой зависимости мы обязаны О. Перрону. *Пример Перрона* (см. [5; 1, с. 199; 6, п. 5 гл. 2]) заключается в следующем. Рассматривается зависящая от параметра α система уравнений

$$\begin{cases} \dot{u} = -\mu u \\ \dot{v} = (\sin\ln t + \cos\ln t - 2\mu)v + \alpha u e^{-\mu t}. \end{cases} \tag{B.1}$$

Здесь μ — не параметр, а какое-нибудь фиксированное число из интервала $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-\pi}\right)$.

Система (В.1), будучи треугольной, легко интегрируется в квадратурах; ее общее решение имеет вид

$$\begin{cases} u(t) = C_1 e^{-\mu t} \\ v(t) = e^{t\sin\ln t - 2\mu t}\left(C_2 + \alpha C_1 \int\limits_0^t e^{-\tau\sin\ln\tau} d\tau\right) \end{cases} \tag{B.2}$$

Для $t = \exp\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)$, где $m \in \mathrm{N}$ — любое, имеют место неравенства

$$\int_0^t e^{-\tau\sin\ln\tau}d\tau > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-2\pi/3}} e^{-\tau\sin\ln\tau}d\tau > t\left(e^{-2\pi/3}-e^{-\pi}\right)\exp\left(\frac{1}{2}te^{-\pi}\right).$$

Отсюда следует, что при $\alpha C_1 \neq 0$ показатель Ляпунова решения (В.2) больше или равен $1-2\mu+\frac{1}{2}e^{-\pi}>0$, в то время как при $\alpha C_1 = 0$ он равен max {—μ, 1—2μ}<0. Поэтому для всякого λ из интервала (max {—μ, 1—2μ}, 0) при α=0 размерность пространства решений системы (В.1), имеющих показатели Ляпунова меньше λ, равна 2, а при всяком α≠0 эта размерность равна 1.

Таким образом, размерность пространства решений, имеющих показатели Ляпунова <λ, рассматриваемая как функция от α, в примере Перрона не является полунепрерывной снизу в точке α = 0, причем это отсутствие полунепрерывности снизу имеет место не при изолированных значениях λ, а при всяком λ из некоторого интервала. В этом состоит одно из коренных отличий систем уравнений в вариациях вдоль неособых (т. е. отличных от точек и циклов) траекторий от систем уравнений в вариациях в неподвижных точках.

Установив это отличие (точнее, убедившись, что классический пример Перрона устанавливает это отличие), перейдем к изучению вопроса о том, насколько часто встречается явление, обнаруженное Перроном.

7. Существует несколько различных, не эквивалентных друг другу, пониманий того, какие свойства выполняются «часто», т. е. являются типичными, а какие — «редко», т. е. не типичны. Здесь мы напомним понятие типичности, введенное и изученное Р. Бэром. Свойство точки топологического пространства (в качестве таких топологических пространств у нас могут фигурировать и некоторые функциональные пространства — пространства задач Коши для дифференциальных или разностных уравнений) называется *типичным,* если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ; множеством типа G_δ называется пересечение счетной совокупности открытых множеств. Эта типичность (типичность по Бэру) обладает рядом свойств, из которых обратим здесь внимание читателя на следующее. Пусть топологическое пространство, о свойстве точек которого идет речь, метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда два взаимоисключающие свойства не могут быть оба типичными. Если бы в определение типичности не было включено требование о типе G_δ, то два взаимоисключающие свойства могли бы оказаться оба типичными: например, на прямой всюду плотно как множество рациональных точек, так и множество иррациональных точек. Обсуждаемое свойство типичности имеется и в более сильном варианте: в полном метрическом пространстве пересечение двух и даже счетного множества типичных свойств есть типичное свойство. Мы употребили здесь вольность речи, которую считаем нужным тотчас же разъяснить: говоря о пересечении свойств, мы имели в виду свойство точки принадлежать пересечению множеств точек, обладающих указанными свойствами.

О типичных свойствах и вообще о теории Р. Бэра можно прочесть в книгах [7, 8, 9], где имеется, в частности, доказательство сформулированной выше теоремы Бэра о типичности счетного пересечения типичных свойств (в полном метрическом пространстве). Использование этих понятий и результатов Р. Бэра в динамике началось с *теоремы А. Пуанкаре о возвращении* [10, гл. 26], точнее, с того ее варианта, где говорится о множестве второй категории (так называются множества, принадлежность к которым — типичное свойство точки). С другого варианта теоремы Пуанкаре о возвращении [10, гл. 26], в котором речь идет о множестве полной инвариантной меры, началась, как известно, эргодическая теория. Изложение теоремы Пуанкаре о возвращении имеется также в [1, § 3 гл. 6] и в [9, гл. 17].

§1

В этой работе доказывается типичность полунепрерывности снизу множеств уровня показателей Ляпунова, рассматриваемых как функции от того параметра, от которого зависит непрерывно задача Коши. Под множеством уровня функции понимается здесь прообраз множества $[-\infty, \lambda) \subset \overline{\mathbf{R}}$, где $\overline{\mathbf{R}}$ — расширенная числовая прямая.

Изложение ведется на таком уровне общности, который позволяет собрать в одной теореме описание названного свойства показателей Ляпунова разнообразных объектов: различных семейств линейных и нелинейных задач Коши для дифференциальных и разностных уравнений, семейств дифференцируемых преобразований и т. д. Существенной чертой этой статьи является отказ от условия ограниченности производной и даже от условия невырожденности производной — при рассмотрении семейства дифференцируемых преобразований. Такой отказ отвечает потребностям как теории, так и приложений.

Пусть $((E, p, B), \langle\cdot, \cdot\rangle)$ — *метризованное векторное расслоение* со слоем $\mathbf{R}^n$ (E — пространство, p — проекция, B — база). Здесь $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — риманова метрика, т. е. непрерывное отображение в $\mathbf{R}$ множества пар $(\xi, \eta) \in E\times E$ таких, что $p\xi = p\eta$, обладающее свойством: при всяком $b \in B$ сужение отображения $\langle\cdot, \cdot\rangle$ на множество $p^{-1}(b)\times p^{-1}(b)$ есть скалярное произведение на слое $p^{-1}(b)$. В дальнейшем изложении не потребовалось бы существенных изменений (кроме очевидных замен, таких как $\mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{C}^n$, $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ в двух предыдущих фразах), чтобы от рассмотрения действительных векторных расслоений перейти к рассмотрению комплексных векторных расслоений. О векторных расслоениях и римановых метриках на них можно прочесть, например, в книге [11].

Семейством эндоморфизмов метризованного векторного расслоения $((E, p, B), \langle\cdot, \cdot\rangle)$ мы называем отображение

$$\mathfrak{M} : M \to \operatorname{End}(E, p, B)$$

какого-либо множества M в множество эндоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), обозначаемое через $\operatorname{End}(E, p, B)$.

В этой статье мы будем рассматривать только такие семейства эндоморфизмов, у которых M есть *множество точек действительной прямой, не ограниченное справа.* Значение отображения $\mathfrak{M}$ в точке $t \in M$ будем обозначать через (X_t, χ_t), где X_t — непрерывное отображение $E \to E$, χ_t — непрерывное отображение $B \to B$; напомним, что при всяком $b \in B$ сужение $X_t[b]$ отображения X_t на слой $p^{-1}(b)$ есть линейное отображение слоя $p^{-1}(b)$ в слой $p^{-1}(\chi_t b)$. Для всякого $\xi \in E$ *показатель Ляпунова* $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \in \overline{\mathbf{R}}$ *семейства эндоморфизмов* $\mathfrak{M}$ *в точке* ξ определяется формулой

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_t \xi|. \tag{1}$$

В этой формуле, и вообще всюду далее, $\ln 0$ считаем равным $-\infty$. Норма $|\cdot|$ определяется через риманову метрику $\langle\cdot, \cdot\rangle$ по стандартной формуле: $|\eta| = \langle\eta, \eta\rangle^{1/2}$ для всякого $\eta \in E$. Наконец, в выражении «$t \to +\infty$» подразумевается, что t при стремлении к $+\infty$ пробегает только множество M. Вследствие этих соглашений из формулы (1) следует, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_b) = -\infty$ для всякого $b \in B$. Поясним, что через 0_b обозначается нулевой вектор слоя $p^{-1}(b)$.

Говоря о ненулевом векторе $\xi \in E$, мы всегда будем подразумевать точку $\xi \in E$, для которой $\xi \neq 0_{p\xi}$. Как отмечено выше,

$$\lambda(\mathfrak{M}, 0_b) = -\infty \tag{2}$$

для всякого $b \in B$, но $\lambda(\mathfrak{M}, \xi)$ может принимать значения $+\infty$, $-\infty$ и на ненулевых векторах $\xi \in E$.

При всяких $\lambda \in \mathrm{R}$, $b \in B$ рассмотрим множество

$$E^0(\mathfrak{M}, \lambda, b) = \left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M}, \xi) < \lambda\right\}. \tag{3}$$

Отметим, что $E^0(\mathfrak{M}, -\infty, b) = \varnothing$ для всякого $b \in B$.

Предложение 1. *Для всяких* $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-\infty\}$, $b \in B$ *множество* $E^0(\mathfrak{M}, \lambda, b)$ *является векторным подпространством слоя* $p^{-1}(b)$.

Доказательство этого предложения излагается ниже, в § 2.

По векторному расслоению (E, p, B) следующим образом определяется расслоение $(\widetilde{E}, \widetilde{p}, B)$. Для всякого $b\in B$ обозначим через $\widetilde{E}_b$ множество всех векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$ векторного расслоения: (E, p, B). Через $\widetilde{E}$ обозначим объединение всех этих множеств:

$$\widetilde{E} = \bigcup_{b\in B} \widetilde{E}_b .$$

Топология на $\widetilde{E}$ задается следующим образом. Пусть даны $\hat{b}\in B$ и векторное подпространство $\hat{L}$ слоя $p^{-1}(\hat{b})$ векторного расслоения (E, p, B). Если $\dim \hat{L} = 0$, то окрестностями точки $\hat{L}\in\widetilde{E}$ называем множества $\left\{\{0_b\} : b\in B, 0_b \in V\right\}$, где V — любая окрестность точки $0_{\hat{b}}$ (в пространстве E) (напомним, что через 0_b обозначается нуль векторного пространства $p^{-1}(b)$).

Если $\dim \hat{L} = k > 0$, то окрестностями точки $\hat{L}\in\widetilde{E}$ называются всевозможные надмножества (в множестве $\widetilde{E}$) множеств вида

$$\left\{L\in\widetilde{E} : \dim L = k, L\bigcap V_i \neq \varnothing \ \left(i\in\{1,...,k\}\right)\right\},$$

где V_1, ..., V_k — любые окрестности каких-либо точек ξ_1, ..., ξ_k, образующих базис векторного пространства $\hat{L}$. Для доказательства корректности этого определения достаточно доказать, что любое конечное пересечение множеств указанного вида содержит некоторое множество указанного вида; доказательство этого утверждения несложно; впрочем, ниже — в начале § 3 — для полноты изложения это доказательство приведено.

Отображение $\widetilde{p} : \widetilde{E} \to B$ (проекция) определяется формулой $\widetilde{p}L = b$ для всяких $b\in B$, $L\in\widetilde{E}_b$. Непрерывность этого отображения легко доказывается, и это доказательство также изложено в начале § 3. Для всякого множества $Y\subset\widetilde{E}$ обозначим через St Y *звезду множества* Y, т. е. множество, определяемое формулой

$$\mathrm{St}Y = \left\{L\in\widetilde{E} : \left(\exists\hat{L}\in Y : \hat{L}\subset L\right)\right\}.$$

Напомним еще одно определение. Отображение g: $S\to\widetilde{E}_\varnothing$, где S — некоторое топологическое пространство, а $\widetilde{E}_\varnothing \overset{\text{def}}{=} \widetilde{E}\bigcup\{\varnothing\}$, называется *полунепрерывным снизу в точке* $s\in S$, если либо $g(s) = \varnothing$, либо (в случае $g(s) \neq \varnothing$) для всякой окрестности V точки $g(s)$ (в пространстве $\widetilde{E}$) найдется окрестность W точки s (в пространстве S) такая, что $g(t)\in$ St V для всякого $t\in W$.

Пусть задано некоторое непрерывное отображение $\mathfrak{f}$ некоторого топологического пространства $\mathfrak{B}$ в базу B рассматриваемого векторного расслоения (E, p, B). Это отображение считаем фиксированным до конца статьи.

При всяком $\lambda\in\overline{\mathbf{R}}$ рассмотрим отображение $\mathfrak{f}_\lambda$, определяемое формулой

$$\mathfrak{f}_\lambda \mathfrak{b} \mapsto E^0\left(\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{f}\mathfrak{b}\right) \tag{4}$$

Из предложения 1 следует, что при всяких $\lambda\in\overline{\mathbf{R}}\setminus\{-\infty\}$, $b\in B$ множество $E^0(\mathfrak{M}, \lambda, b)$ является векторным подпространством слоя $p^{-1}(b)$, т. е. $E^0\left(\mathfrak{M},\lambda,b\right)\in\widetilde{E}_b$. Как отмечалось выше, из (3) следует, что $E^0\left(\mathfrak{M},-\infty,b\right) = \varnothing$ для всякого $b\in B$. Поэтому формула (4) определяет отображение $\mathfrak{f}_\lambda : \mathfrak{B}\mapsto\widetilde{E}_\varnothing$, где $\widetilde{E}_\varnothing \overset{\text{def}}{=} \widetilde{E}\bigcup\{\varnothing\}$. Поясним, что последняя формула означает, что множество $\widetilde{E}_\varnothing$ по определению получается добавлением точки $\varnothing$ к множеству $\widetilde{E}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть множество* M *замкнуто в* $\mathbf{R}$, *а отображение* $M\times E\to\mathbf{R}$, *определенное формулой* $(t, \xi)\mapsto|X_t\xi|$, *непрерывно. Пусть пространство* $\mathfrak{B}$ *метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда в пространстве* $\mathfrak{B}$ *имеется всюду плотное множество* $\mathfrak{D}$ *типа* G_δ *такое, что при всяком* $\lambda\in\overline{\mathbf{R}}$ *отображение* $\mathfrak{f}_\lambda:\mathfrak{B}\mapsto\widetilde{E}_\varnothing$ *полунепрерывно снизу во всякой точке множества* $\mathfrak{D}$.

Доказательство этой теоремы дается в § 4 после изложения вспомогательного материала, составляющего содержание §§ 2, 3.

§2

Нам предстоит воспользоваться результатами работ [12, 13][1]. В цитируемых статьях объектом рассмотрения является семейство эндоморфизмов метризованного *абстрактного векторного расслоения* (соответствующие термины разъяснены в цитируемых статьях). Чтобы получить возможность применять результаты [12, 13] к ситуации, рассматриваемой сейчас, достаточно обеднить рассматриваемую теперь структуру, забыв о топологиях на E и B и о непрерывности отображений p, $<\cdot$, $\cdot>$, X_t, χ_t.

Множество эндоморфизмов так возникшего абстрактного векторного расслоения обозначим через $\mathrm{End}_\alpha(E, p, B)$. Имеет место очевидное включение $\mathrm{End}(E, p, B)\subset\mathrm{End}_\alpha(E, p, B)$, которое чаще всего бывает строгим. Отображение $\mathfrak{M}: M\to\mathrm{End}(E, p, B)$ можно, благодаря этому включению, рассматривать также и как отображение $M\to\mathrm{End}_\alpha(E, p, B)$, за которым сохраним то же обозначение $\mathfrak{M}$.

ЛЕММА 1. *Для всяких* $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$ *и всяких* $\xi\in E$, $\eta\in E$, *удовлетворяющих условию* $p\xi=p\eta$, *имеет место неравенство*

$$\lambda(\mathfrak{M},\alpha\xi+\beta\eta)\le\max\{\lambda(\mathfrak{M},\xi),\lambda(\mathfrak{M},\eta)\}.$$

Доказательство. В силу изложенного выше в этом параграфе, эта лемма есть частный случай леммы 1 [12]. Лемма доказана.

Доказательство предложения 1. Пусть даны $\lambda\in\overline{\mathbf{R}}\setminus\{-\infty\}$, $b\in B$.

1) Нуль всякого слоя содержится в $E^0(\mathfrak{M}, \lambda, b)$ — это вытекает из формул (2), (3).

2) Пусть даны $\xi\in E^0(\mathfrak{M}, \lambda, b)$, $\eta\in E^0(\mathfrak{M}, \lambda, b)$. В силу (3) это означает, что даны $\xi\in p^{-1}(b)$, $\eta\in p^{-1}(b)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\lambda(\mathfrak{M},\xi)<\lambda,\ \lambda(\mathfrak{M},\eta)<\lambda.$$

Из этих неравенств следует

$$\max\{\lambda(\mathfrak{M},\xi),\lambda(\mathfrak{M},\eta)\}<\lambda. \tag{5}$$

Пусть даны $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$. В силу леммы 1, условия которой выполнены, так как из $\xi\in p^{-1}(b)$, $\eta\in p^{-1}(b)$ следует $p\xi=p\eta=b$, имеет место неравенство

$$\lambda(\mathfrak{M},\alpha\xi+\beta\eta)\le\max\{\lambda(\mathfrak{M},\xi),\lambda(\mathfrak{M},\eta)\}.$$

Из этого неравенства вследствие (5) вытекает неравенство

$$\lambda(\mathfrak{M},\alpha\xi+\beta\eta)<\lambda. \tag{6}$$

Так как $\alpha\xi+\beta\eta\in p^{-1}(b)$ (поскольку $\xi\in p^{-1}(b)$, $\eta\in p^{-1}(b)$), то из (3), (6) следует $\alpha\xi+\beta\eta\in E^0(\mathfrak{M}, \lambda, b)$.

Предложение 1 доказано.

Сформулируем в удобной для дальнейшего изложения форме известное утверждение.

Предложение 2. *Пусть* $\varepsilon,\pi,\mathfrak{B}$ — *локально тривиальное расслоение с компактным стандартным слоем* $\varepsilon,\pi,\mathfrak{B}$ $\mathcal{F}$. *Пусть* $\varphi\ (\cdot):\varepsilon\to\overline{\mathbf{R}}$ — *непрерывная функция. Тогда функция*

$$\psi(\cdot)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\cdot)}\varphi(\mathfrak{z}):\mathfrak{B}\to\overline{\mathbf{R}}$$

непрерывна и

[1] В [13, с. 49, во второй строке снизу] над буквой **R** должна быть черта.

$$\sup_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\beta)} \varphi(\mathfrak{z}) = \max_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\beta)} \varphi(\mathfrak{z})$$

для всякого $\beta = \mathfrak{B}$.

Доказательство. Гомеоморфизмом расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$ на отрезок прямой предложение сводится к случаю $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{E} \to \mathbf{R}$, а в этом случае доказательство для полноты изложения приведено в [13, предложение 3]. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* F — *компактное топологическое пространство,* $\mathcal{M}$ — *неограниченное множество положительных действительных чисел,* $\{m_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ — *монотонно возрастающая последовательность точек множества* $\mathcal{M}$, *стремящаяся к* $+\infty$. *Пусть при всяком* $t \in \mathcal{M}$ *задана непрерывная функция* $a(t, \cdot)\colon\ F \to \overline{\mathbf{R}}$. *Тогда*

$$\inf_{x\in F} \varlimsup_{t\to+\infty} a(t,x) = \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\min_{x\in F}\sup_{t\in M_{m_k,m_l}} a(t,x) = \inf_{k\in\mathbf{N}}\lim_{l\to\infty}\min_{x\in F}\sup_{t\in M_{m_k,m_l}} a(t,x),$$

где $M_{m,s} \overset{\text{def}}{=} M \bigcap [m,s]$ *для всякого* $m\in \mathcal{M}$ *и всякого* $s \in M_m \overset{\text{def}}{=} M \bigcap [m,+\infty)$.

Доказательство. В силу предложения 2 из [13] имеет место равенство

$$\inf_{x\in F} \varlimsup_{t\to+\infty} a(t,x) = \lim_{m\to+\infty} A(m), \tag{7}$$

где

$$A(m) = \lim_{l\to+\infty}\min_{x\in F}\sup_{t\in M_{m,s}} a(t,x).$$

В силу лемм 2—4 [13] функция $A(\cdot)\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная предыдущей формулой, монотонно невозрастающая. При всяком $m\in \mathcal{M}$ имеет место равенство

$$A(m) = \lim_{l\to\infty}\min_{x\in F}\sup_{t\in M_{m,m_l}} a(t,x), \tag{8}$$

так как $\{m_l\}_{l\in\mathbf{N}}$ — последовательность точек множества $\mathcal{M}$, стремящаяся к $+\infty$. По той же причине

$$\lim_{m\to+\infty} A(m) = \lim_{k\to+\infty} A(m_k). \tag{9}$$

Последовательность $\{A(m_k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ монотонно невозрастающая, так как функция $A(\cdot)\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbf{R}}$ монотонно невозрастающая, а $\{m_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ — монотонно возрастающая последовательность точек множества $\mathcal{M}$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} A(m_k) = \inf_{k\in\mathbf{N}} A(m_k)$$

Соединив последнюю формулу с формулами (7) — (9), получаем заключение предложения. Предложение доказано.

§3

Изложим другое определение расслоения ($\widetilde{E}$, $\widetilde{p}$, B), построенного в § 1 по векторному расслоению (E, p, B); попутно докажем корректность приведенного в § 1 определения топологии на $\widetilde{E}$, затем докажем эквивалентность двух определений и, наконец, установим, что расслоение ($\widetilde{E}$, $\widetilde{p}$, B) является локально тривиальным расслоением со стандартным слоем $\bigcup_{k=0}^{n} G_k(\mathbf{R}^n)$ (несвязное объединение грассмановых многообразий); при этом по атласу векторного расслоения (E, p, B) будет построен атлас расслоения ($\widetilde{E}$, $\widetilde{p}$, B).

Для всякой точки $b\in B$ через $\widetilde{E}_b$ обозначим множество всех векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$ векторного расслоения (E, p, B). Через $\widetilde{E}$ обозначим объединение всех этих множеств: $\widetilde{E}=\bigcup\limits_{b\in B}\widetilde{E}_b$, Топология на $\widetilde{E}$ задается следующим образом. Пусть даны $\hat{b}\in B$, $\hat{L}\in\widetilde{E}_{\hat{b}}$. Если $\dim\hat{L}=0$, то окрестностями точки $\hat{L}\in\widetilde{E}$ называем множества $\{\{0_b\}: b\in B, 0_b\in V\}$, где V — любая окрестность точки $0_{\hat{b}}$ в пространстве E (напомним, что через 0_b обозначается нуль слоя $p^{-1}(b)$). Эти же самые множества можно эквивалентным образом определить формулой

$$\left\{L\in\widetilde{E}:\dim L=\dim\hat{L}, L\cap V\neq\varnothing\right\}\cdot$$

Этой же формулой определяются окрестности точки $\hat{L}$ в случае dim $\hat{L}>0$. Точнее, если dim $\hat{L}>0$, то окрестностями точки $\hat{L}$ называем множества $\left\{L\in\widetilde{E}:\dim L=\dim\hat{L}, L\cap V\neq\varnothing\right\}$, где V — любая окрестность любой точки множества $\hat{L}$ в пространстве E, а также всевозможные надмножества (в множестве $\widetilde{E}$) всевозможных конечных пересечений этих множеств. Совокупности этих конечных пересечений принадлежат, в частности, множества

$$\left\{L\in\widetilde{E}:\dim L=k, L\cap V_i\neq\varnothing\ \left(i\in\{1,...,k\}\right)\right\}, \tag{10}$$

где $k=\dim\hat{L}$, а V_i — любые окрестности (в пространстве E) любых точек $\xi_i\in\hat{L}$ (t$\in\{1, ..., k\}$), образующих базис векторного пространства $\hat{L}$. Поэтому совокупность окрестностей точки $\hat{L}\in\widetilde{E}$ может быть эквивалентным образом определена как совокупность всевозможных надмножеств (в множестве $\widetilde{E}$) всевозможных конечных пересечений множеств (10).

Иными словами, всевозможные конечные пересечения множеств (10) образуют фундаментальную систему окрестностей точки $\hat{L}$ в пространстве $\widetilde{E}$.

Можно указать проще описываемую (притом более узкую) фундаментальную систему окрестностей точки $\hat{L}\in\widetilde{E}$ ($\dim\hat{L}\neq 0$). Фиксируем любой базис ξ_1, ..., ξ_k векторного пространства $\hat{L}$ ($k=\dim\hat{L}$) и рассмотрим всевозможные окрестности V_i точек ξ_i ($i\in\{1, ..., k\}$) в пространстве E. Множества $\{L\in\widetilde{E}$: dim $L = k$, $L\cap V_i\neq\varnothing$ (t$\in\{1, ..., k\})\}$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки $\hat{L}$ в пространстве $\widetilde{E}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что для всякого базиса η_1, ..., η_k векторного пространства $\hat{L}$ и всяких окрестностей V_i точек η_i ($i\in\{1, ..., k\}$) (в пространстве E) найдутся окрестности U_i точек
ξ_i ($i\in\{1, \ldots, k\}$) (в пространстве E) такие, что

$$\left\{L\in\tilde{E}:\dim L=k, L\cap U_i\neq\varnothing\left(i\in\{1,\ \ldots,\ k\}\right)\right\}\subset$$

$$\subset\left\{L\in\tilde{E}:\dim L=k, L\cap V_i\neq\varnothing\left(i\in\{1,\ \ldots,\ k\}\right)\right\}.$$

Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что для всякой окрестности V (в пространстве E) всякой точки $\eta\in\hat{L}$ найдутся окрестности U_i точек ξ ($i\in\{1, \ldots, k\}$) (в пространстве E) такие, что всякое k-мерное векторное подпространство какого-либо слоя векторного расслоения (E, p, B), имеющее непустое пересечение с каждым из множеств $U_i\left(i\in\{1,...,k\}\right)$, имеет непустое пересечение и с множеством V. Докажем последнее. Пусть заданы точка $\eta\in\hat{L}$ и ее окрестность V в пространстве E). Разложим η по базису $\xi_1,...,\xi_k:\eta=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\xi_i$. Найдем окрестности U_i точек $\xi_i\left(i\in\{1,...,k\}\right)$ (в пространстве E) такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\eta_i\in V$ для всяких $\eta_i\in U_i$ таких, что $p\eta_1=...=p\eta_k$; существование таких окрестностей вытекает непосредственно из того, что (*E, p, B*) — векторное расслоение. Эти окрестности — искомые, так как если дано *k*-мерное векторное подпространство *L* какого-либо слоя $p^{-1}(b)$, имеющее непустое пересечение с каждым из множеств $U_i\left(i\in\{1,...,k\}\right)$, то взяв любые точки $\eta_i\in L\bigcap U_i\left(i\in\{1,...,k\}\right)$, получим, что $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\eta_i\in V$; кроме того, $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\eta_i\in L$, поскольку $\eta_i\in L\left(i\in\{1,...,k\}\right)$, а L — векторное пространство. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\eta_i\in L\bigcap V$; следовательно, пересечение $L\bigcap V$ непусто.

Задав таким образом топологию на множестве $\tilde{E}$ всех векторных подпространств слоев векторного расслоения (*E, p, B*), определим отображение $\tilde{p}:\tilde{E}\to B$ (проекцию), положив

$$\tilde{p}L=p\xi \qquad (\xi\in L) \tag{11}$$

для всякого $L\in\tilde{E}$ (поясним, что $p\xi$ не зависит от выбора $\xi\in L$, так как всякое $L\in\tilde{E}$ содержится в некотором слое векторного расслоения (*E, p, B*)). Докажем, что отображение $\tilde{p}:\tilde{E}\to B$ непрерывно. Пусть даны $\hat{L}\in\tilde{E}$ и окрестность *V* (в пространстве *B*) точки $\hat{b}=\tilde{p}\hat{L}$. Возьмем окрестность *U* точки $0_{\hat{b}}$ такую, что

$$pU\subset V; \tag{12}$$

такая окрестность существует в силу непрерывности отображения $p:E\to B$. Положив $W=\left\{L\in\tilde{E}:\dim L=\dim\hat{L}, L\bigcap U\neq\varnothing\right\}$, получаем окрестность *W* точки $\hat{L}$ (в пространстве $\tilde{E}$), для которой $\tilde{p}W\subset V$; в самом деле, для всякого $L\in W$ имеем (для $\xi\in L\bigcap U$)

$$\tilde{p}L\underset{(11)}{=}p\xi\in pU\underset{(12)}{\subset}V$$

Удостоверившись в непрерывности отображения $\tilde{p}:\tilde{E}\to B$, мы установили, что тройка $\left(\tilde{E},\tilde{p},B\right)$ есть расслоение. Докажем теперь, что расслоение $\left(\tilde{E},\tilde{p},B\right)$ — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем $\overset{n}{\underset{k=0}{U}}G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ (несвязное объединение грассмановых многообразий). Пусть дана карта $\left\{U,\ h:\ U\times\mathbf{R}^n\to p^{-1}(U)\right\}$ векторного расслоения *(E, p, B).* Это означает, что $U\subset B$ — открытое множество в базе *B,* а *h* — координатное отображение, т. е. гомоморфизм произведения $U\times\mathbf{R}^n$ на подпространство $p^{-1}(U)$ топологического пространства *E* такой, что при всяком $b\in U$ отображение $h(b,\cdot):\mathbf{R}^n\to p^{-1}(U)$ является изоморфизмом векторного пространства $\mathbf{R}^n$ на векторное пространство $p^{-1}(b)$. Отсюда следует, в частности, что $ph(b,\mathfrak{x})=b$ для всяких $b\in U$, $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$. Положим

$$\tilde{h}\left(b,\mathbf{R}^k\right)\overset{\text{def}}{=}\left\{h(b,\mathfrak{x})\right\}_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^k} \tag{13}$$

для всяких $b\in U$, $k\in\{0,...,n\}$, $\mathbf{R}^k\subset G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$. Символом, стоящим в правой части равенства (13), обозначается множество всех точек вида $h(b,\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^k$. Так как *h* — координатное отображение векторного расслоения, то при всяком $b\in U$ это множество является *k*-мерным векторным подпространством слоя $p^{-1}(b)$. Следовательно, формула (13) определяет отображение

$$\tilde{h}:U\times\overset{n}{\underset{k=0}{U}}G_k\left(\mathbf{R}^n\right)\to\tilde{p}^{-1}(U)$$

сужение которого при любом $b \in U$ на множество $\{b\} \times \overset{n}{\underset{k=0}{U}} G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ есть отображение этого множества в множество $\tilde{p}^{-1}(b)$. Из того, что h — координатное отображение векторного расслоения, следует также, что для всяких $b \in U$, $L \in \tilde{p}^{-1}(b)$ множество тех $\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n$, для которых $h(b,x) \in L$, есть векторное подпространство в $\mathbf{R}^n$, имеющее ту же размерность, что и L. Следовательно, сужение отображения $\tilde{h}$ на множество $\{b\} \times \overset{n}{\underset{k=0}{U}} G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ есть сюръекция этого множества на слой $\tilde{p}^{-1}(b)$.

Докажем, что отображение $\tilde{h}$, определенное формулой (13), есть инъекция множества $U \times \overset{n}{\underset{k=0}{U}} G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ в множество $\tilde{p}^{-1}(U)$. Пусть $b_1 \in U$, $b_2 \in U$, $\mathbf{R}_1^k \in G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ таковы, что $\tilde{h}\left(b_1, \mathbf{R}_1^k\right) = \tilde{h}\left(b_2, \mathbf{R}_2^k\right)$. В силу формулы (13) это равенство означает, что

$$\left\{h\left(b_1, \mathfrak{x}\right)\right\}_{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}_1^k} = \left\{h\left(b_2, \mathfrak{y}\right)\right\}_{\mathfrak{y} \in \mathbf{R}_2^k}$$

так как h, будучи координатным отображением, является инъекцией множества $U \times \mathbf{R}^n$, то из последнего равенства следует: $b_1 = b_2$, $\mathbf{R}_1^k = \mathbf{R}_2^k$. Инъективность отображения $\tilde{h}$ доказана. Соединив ее с доказанной выше сюръективностью, получаем, что отображение $\tilde{h}$, определенное формулой (13), является биекцией множества $U \times \overset{n}{\underset{k=0}{U}} G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ на множество $\tilde{p}^{-1}(U)$. Докажем теперь непрерывность отображения

$$\tilde{h} : U \times \overset{n}{\underset{k=0}{U}} G_k\left(\mathbf{R}^n\right) \to \tilde{p}^{-1}(U) \subset \tilde{E},$$

определенного формулой (13).

Пусть даны $\hat{b} \in U$, $k \in \{0,...,n\}$, $\widehat{\mathbf{R}}^k \in G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ и пусть дана окрестность $\tilde{V}$ точки $\tilde{h}(\hat{b},\ \widehat{\mathbf{R}}^k)$ в пространстве $\tilde{E}$. Мы уже доказали, что $\tilde{h}(\hat{b},\ \widehat{\mathbf{R}}^k)$, как и всякое $\tilde{h}\left(b, \mathbf{R}^k\right)$, где $b \in U$, $R^k \in G_k\left(R^n\right)$, есть k-мерное векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$.

Фиксируем какой-нибудь базис $\xi_1,...,\xi_k$ этого векторного подпространства. Согласно приведенному выше описанию фундаментальной системы окрестностей точки пространства $\tilde{E}$ найдутся окрестности $V_1,...,V_k$ точек $\xi_1,...,\xi_k$ (в пространстве *E)* такие, что $\tilde{V}$ содержит окрестность $\tilde{W}$ точки $\tilde{h}(\hat{b},\ \widehat{R}^k)$ (в пространстве $\tilde{E}$), определенную формулой

$$\tilde{W} = \left\{L \in \tilde{E} : \dim L = k, L \bigcap V_i \neq \varnothing\left(i \in \{1,...,k\}\right)\right\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{x}_i$ точку пространства $\widehat{\mathbf{R}}^k$ такую, что $h\left(\hat{b}, \mathfrak{x}_i\right) = \xi_i\left(i \in \{1,...,k\}\right)$. Так как h — координатное отображение, векторного расслоения, то указанные точки $\mathfrak{x}_i\left(i \in \{1,...,k\}\right)$ определены однозначно и образуют базис векторного пространства $\widehat{\mathbf{R}}^k$. Пользуясь непрерывностью координатного отображения h, возьмем окрестность W точки $\hat{b}$ (в пространстве $U \subset B$) и окрестности W_i точек $\mathfrak{x}_i$ (в пространстве $\mathbf{R}^n$), для которых $h\left(b, \mathfrak{x}\right) \in V_i$ при всяких $b \in W$, $x \in W_i\left(i \in \{1,...,k\}\right)$.

Определим окрестность $\widehat{W}$ точки $\widehat{\mathbf{R}}^k$ в грассмановом многообразии $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ формулой

$$\widehat{W} = \left\{\mathbf{R}^k \in G_k\left(\mathbf{R}^n\right) : \mathbf{R}^k \bigcap W_i \neq \varnothing\left(i \in \{1,...,k\}\right)\right\}.$$

Из формулы (13) в силу определений окрестностей, $\tilde{W}, W, \widehat{W}, W_i\left(i \in\{1,\ldots,k\}\right)$ вытекает включение $\tilde{h}\left(W \times \widehat{W}\right) \subset \tilde{W}$. Непрерывность отображения $\tilde{h}$ доказана. Теперь докажем непрерывность отображения

$$\tilde{h}^{-1} : \tilde{p}^{-1}\left(U\right) \to U \times \overset{n}{\underset{k=0}{U}} G_k\left(\mathbf{R}^n\right),$$

обратного к $\tilde{h}$.

Пусть дано $\hat{L} \in \tilde{p}^{-1}\left(U\right)$. Положим $k = \dim \hat{L}$. Из (13) следует, что $\tilde{h}^{-1}\hat{L} = \left(\hat{b}, \widehat{\mathbf{R}}^k\right)$, где $\hat{b} \in U$, $\widehat{\mathbf{R}}^k \in G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ (поскольку h — координатное отображение векторного расслоения). Пусть даны окрестность W точки $\hat{b}$ (в пространстве B) и окрестность V точки $\widehat{\mathbf{R}}^k$ (в пространстве $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$).

Возьмем какой-нибудь базис $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$ векторного пространства $\widehat{\mathbf{R}}^k$. Выберем такие окрестности V_i точек $\mathfrak{x}_i\left(i \in\{1,\ldots,k\}\right)$ (в пространстве $\mathbf{R}^n$), что окрестность

$$\left\{\mathbf{R}^k \in G_k\left(\mathbf{R}^n\right) : \mathbf{R}^k \bigcap V_i \neq \varnothing\left(i \in\{1,\ldots,k\}\right)\right\}$$

точки $\widehat{R}^k$ (в грассмановом многообразии $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$) содержится в V. Положим $\xi_i = h\left(\hat{b}, \mathfrak{x}_i\right)\left(i \in\{1,\ldots,k\}\right)$. Пользуясь непрерывностью отображения h^{-1}, выберем окрестности W_i точек $\xi_i\left(i \in\{1,\ldots,k\}\right)$ (в пространстве E) так, чтобы $h^{-1}\left(\xi\right) \in W \times V_i$ для всяких $i \in\{1,\ldots,k\}$, $\xi \in W_i$.

Наконец, определим окрестность $\tilde{W}$ точки $\hat{L}$ (в пространстве $\tilde{p}^{-1}\left(U\right) \subset \tilde{E}$) формулой

$$\tilde{W} = \left\{L \in \tilde{E} : \dim L = k, L \bigcap W_i \neq \varnothing\left(i \in\{1,\ldots,k\}\right)\right\}.$$

Из формулы (13) в силу определения окрестностей $V_i, W_i\left(i \in\{1,\ldots,k\}\right)$, $\tilde{W}$ вытекает включение

$$\tilde{h}^{-1}\left(\tilde{W}\right) \subset W \times V.$$

Непрерывность отображения $\tilde{h}^{-1}$ доказана.

Доказательство сформулированного выше утверждения о том, что *тройка* $\left(\tilde{E}, \tilde{p}, B\right)$ *является локально тривиальным расслоением со стандартным слоем* $\overset{n}{\underset{k=0}{U}} G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ (несвязное, или дизъюнктное объединение грассмановых многообразий), закончено. Попутно по всякой карте $\left\{U; h : U \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}\left(U\right)\right\}$ векторного расслоения *(E, p, B)* построена карта

$$\left\{U; \tilde{h} : U \times \overset{n}{\underset{k=0}{U}} G_k\left(\mathbf{R}^n\right) \to \tilde{p}^{-1}\left(U\right)\right\}$$

расслоения $\left(\tilde{E}, \tilde{p}, B\right)$, определенная формулой (13). Отсюда следует, что если

$$\left\{U_\alpha; h_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}\left(U_\alpha\right)\right\}_{\alpha \in A}$$

— атлас векторного расслоения *(E, p,* B), то

$$\left\{U_\alpha; \tilde{h}_\alpha : U_\alpha \times \overset{n}{\underset{k=0}{U}} G_k\left(\mathbf{R}^n\right) \to \tilde{p}^{-1}\left(U_\alpha\right)\right\}_{\alpha \in A}$$

— атлас расслоения $\left(\tilde{E}, \tilde{p}, B\right)$.

Наряду с векторным расслоением (E, p, B) рассмотрим векторное расслоение $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$, индуцированное векторным расслоением $(E,\ p,\ B)$ и отображением $\mathfrak{f}: \mathfrak{B} \to B$.

Напомним определение *индуцированного векторного расслоения* (более подробно об этом см., например, в [11, раздел 5 гл. 2 и раздел 3 гл. 3]). Через $\mathfrak{E}$ обозначается подпространство топологического пространства $\mathfrak{B} \times E$, состоящее из всех тех пар $(\mathfrak{b},\ \xi)$, в которых $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$, $\xi \in p^{-1}(\mathfrak{f}\mathfrak{b})$. Проекция $\mathfrak{p}: \mathfrak{E} \to \mathfrak{B}$ определяется как сужение на $\mathfrak{E}$ проекции произведения $\mathfrak{B} \times E$ на его первый сомножитель. Слой $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{b}\} \times \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{f}\mathfrak{b})$ наделяется (для всякого $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$) структурой векторного пространства следующим образом: для всяких $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, $(\mathfrak{b},\ \xi) \in \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b},\ \eta) \in \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$ полагают $\alpha(\mathfrak{b},\ \xi) + \beta(\mathfrak{b},\ \eta) = (\mathfrak{b},\ \alpha\xi + \beta\eta)$. Локальная тривиальность легко доказывается (см. [11, доказательство предложения в п. 3.1 гл. 3]). Как по векторному расслоению *(E, p, B)* построено расслоение $\left(\tilde{E}, \tilde{p}, B\right)$, точно так же по векторному расслоению $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$ строится локально тривиальное расслоение $(\tilde{\mathfrak{E}},\ \tilde{\mathfrak{p}},\ \mathfrak{B})$ со стандартным слоем $\bigcup\limits_{k=0}^{n} G_k(\mathbf{R}^n)$; при этом, как доказано выше, каждому атласу

$$\{\mathfrak{U}_\alpha,\ \mathfrak{h}_\alpha : \mathfrak{U}_\alpha \times \mathbf{R}^n \to \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{U}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

векторного расслоения $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$ соответствует атлас локально-тривиального расслоения $(\tilde{\mathfrak{E}},\ \tilde{\mathfrak{p}},\ \mathfrak{B})$

$$\left\{\mathfrak{U}_\alpha,\ \tilde{\mathfrak{h}}_\alpha : \mathfrak{U}_\alpha \times \bigcup_{k=0}^{n} G_k(\mathbf{R}^n) \to \overline{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{U}_\alpha)\right\}_{\alpha \in A}$$

определенный формулой

$$\tilde{\mathfrak{h}}_\alpha(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^k) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{b}_\alpha(\mathfrak{h},\ \mathfrak{x})\}_{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^k}$$

для всяких $\alpha \in A$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{U}_\alpha$, $k \in \{0,\ \ldots,\ n\}$, $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$.

В дальнейшем изложении нам придется вести совместное рассмотрение векторного расслоения *(E, p, B)* и векторного расслоения $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$, индуцированного векторным расслоением *(E, p, B)* и непрерывным отображением $\mathfrak{f}: \mathfrak{B} \to B$. Напомним еще несколько сведений об этих объектах. *Через* $\mathfrak{f}^*$ *обозначается отображение* $\mathfrak{E} \to E$, *определяемое как сужение на* $\mathfrak{E}$ *проекции произведения* $\mathfrak{B} \times E$ *на его второй сомножитель.* Так как эта проекция — непрерывное отображение, то *отображение* $\mathfrak{f}^*: \mathfrak{E} \to E$ *непрерывно.* Из воспроизведенного выше определения структуры векторного пространства на слоях расслоения $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$ непосредственно следует, что сужение отображения $\mathfrak{f}^*$ на слой $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$ (над любой точкой $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$) есть гомоморфизм векторных пространств, точнее — изоморфизм векторного пространства $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$ на векторное пространство $p^{-1}(\mathfrak{f}\mathfrak{b})$: отсюда следует равенство $p\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}\mathfrak{p}$.

Совокупность утверждений, содержащихся в двух предыдущих фразах, означает, что *пара* $(\mathfrak{f}^*,\ \mathfrak{f})$ *является гомоморфизмом векторного расслоения* $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$ *в векторное расслоение (E, p, B), невырожденным на слоях.* Отсюда следует также, что *формула*

$$\tilde{\mathfrak{f}}\mathfrak{L} = \{\mathfrak{f}^*\mathfrak{x}\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{L}} \tag{14}$$

где $\mathfrak{L} \in \tilde{\mathfrak{E}}$, *определяет отображение* $\tilde{\mathfrak{f}}: \tilde{\mathfrak{E}} \to \tilde{E}$, удовлетворяющее равенству $\tilde{p}\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{p}}$. Из непрерывности отображения $\mathfrak{f}: \mathfrak{B} \to B$ следует, что отображение $\tilde{\mathfrak{f}}: \tilde{\mathfrak{E}} \to \tilde{E}$ непрерывно. В самом деле, пусть $\hat{\mathfrak{L}} \in \tilde{\mathfrak{E}}$, а $\tilde{U}$ — окрестность точки $\hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathfrak{f}}\hat{\mathfrak{L}}$ (в пространстве $\tilde{E}$), определенная формулой $\tilde{U}=\left\{L\in\tilde{E}:\dim L=\dim L, L\bigcap U\neq\varnothing\right\}$, где U — окрестность (в пространстве *E)* некоторой точки $\xi\in\hat{L}$; тогда имеют место равенства

$$\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}\tilde{U}=\{(\mathfrak{b},\ L):\mathfrak{b}\in\mathfrak{B},\ L\in\tilde{E},\ \mathfrak{f}\mathfrak{b}=p\eta\ (\text{при }\ \eta\in L),\ \dim L=\dim\hat{L},$$

$$L\bigcap U\neq\varnothing\}=\{\mathfrak{L}\in\tilde{\mathfrak{E}}:\dim\mathfrak{L}=\dim\hat{\mathfrak{L}},\ \mathfrak{L}\bigcap(\mathfrak{B}\times U)\neq\varnothing\},$$

причем правая часть последнего равенства есть окрестность точки $\hat{\mathfrak{L}}$ (в пространстве $\tilde{\mathfrak{E}}$), так как $(\mathfrak{B}\times U)\bigcap\mathfrak{E}$ является окрестностью точки $(\mathfrak{f}^{*})^{-1}\xi$ в пространстве $\mathfrak{E}$, будучи прообразом окрестности U точки ξ (в пространстве *E)* при непрерывном отображении $\mathfrak{f}^{*}$, являющемся по определению сужением на $\mathfrak{E}$ проекции произведения $\mathfrak{B}\times E$ на его второй сомножитель.

При всяком $k\in\{0,...,n\}$ грассманово многообразие $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ компактно и имеет счетный базис (см. [11, с. 25]; при *k*=0 и при *k*=*n* это утверждение очевидно, так как в этих случаях $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ состоит из одной точки). Следовательно, при всяком $k\in\{0,...,n\}$ грассманово многообразие $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ метризуемо (при *k*=0, *k*=*n* это очевидно по той же причине) в силу предложения 16 [14, с. 45].

При всяком $k\in\{0,...,n\}$ зафиксируем расстояние $d_k(\cdot,\ \cdot)$ на $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{(x,y)\in G_k\left(\mathbf{R}^n\right)\times G_k\left(\mathbf{R}^n\right)} d_k\left(x,y\right)<1. \tag{15}$$

Для получения такого расстояния достаточно любое расстояние $d(\cdot,\ \cdot)$ на $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$ разделить на какое-нибудь число, превышающее точную верхнюю грань этого расстояния. Такое число существует, так как эта точная верхняя грань конечна, поскольку расстояние $d(\cdot,\ \cdot)$ есть непрерывная функция $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)\times G_k\left(\mathbf{R}^n\right)\to R$.

При всяких $k\in\{1,...,n\}$, $m\in N$ из покрытия метрического пространства $\left(G_k\left(\mathbf{R}^n\right),d_k\right)$ открытыми шарами радиуса $1/m$ выберем конечное покрытие; обозначим через $F_{k,m}^1,...,F_{k,m}^{s(k,m)}$ замкнутые шары радиуса $1/m$, центры которых совпадают с центрами выбранных открытых шаров. Таким образом, через $s\left(k,m\right)$ обозначается число этих шаров при любых фиксированных $k\in\{0,...,n\}$, $m\in\mathbf{N}$. Из формулы (15) следует, что $s\left(k,1\right)$ для всякого $k\in\{0,...,n\}$ можно считать равным 1, что мы и будем делать. Можно считать также, что $s\left(0,m\right)=s\left(n,m\right)=1$ для всякого $m\in\mathbf{N}$, так как в каждом из пространств $G_0\left(\mathbf{R}^n\right),G_n\left(\mathbf{R}^n\right)$, состоящих из одной точки (наделенных тем единственным (нулевым) расстоянием, которое на каждом из них имеется), все шары совпадают.

Всюду далее предполагается, что *топологическое пространство* $\mathfrak{B}$ *метризуемо.* Это условие напоминается ниже, только начиная с леммы 7.

Фиксируем счетный атлас

$$\{\mathfrak{U}_i,\ \mathfrak{h}_i:\mathfrak{U}_i\times\mathbf{R}^n\to\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{U}_i)\}_{i\in\mathbf{N}} \tag{16}$$

векторного расслоения $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$; напомним, что метризуемое пространство $\mathfrak{B}$ паракомпактно (см. [14; гл. IX, § 4, п. 5]), а всякое векторное расслоение над паракомпактной базой имеет счетный атлас (см. [11; предложение п. 5.4 гл. 3], где это доказано в несколько иных терминах, и там же п. п. 2.1, 2.3 гл. 5, где дано определение атласов, с помощью которого предложение п. 5.4 гл. 3 формулируется в приведенном здесь виде).

По атласу (16) построим счетный атлас

$$\left\{\mathfrak{U}_i,\ \tilde{\mathfrak{h}}_i:\mathfrak{U}_i\times\bigcup_{q=0}^{n}G_q(\mathbf{R}^n)\to\overline{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{U}_i)\right\}_{i\in\mathbf{N}} \tag{17}$$

расслоения $(\tilde{\mathfrak{E}},\ \tilde{\mathfrak{p}},\ \mathfrak{B})$, положив

$$\tilde{\mathfrak{h}}_i(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)\overset{\text{def}}{=}\{\mathfrak{h}_i(\mathfrak{b},\ \mathfrak{x})\}_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^q} \tag{18}$$

для всяких $i\in\mathbf{N}$, $\mathfrak{b}\in\mathfrak{U}_i$, $q\in\{0,...,n\}$, $\mathbf{R}^q\in G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$; выше было доказано, что это — в самом деле атлас расслоения $(\tilde{\mathfrak{E}},\ \tilde{\mathfrak{p}},\ \mathfrak{B})$.

Для всяких $q\in\{1,...,n\}$, $i\in\mathbf{N}$, $F\subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ рассмотрим функцию

$$\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M},\ F,\ \cdot)=\inf_{R^q\in F}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|\,X_t\,|_{\tilde{\mathfrak{h}}_i(\cdot,\ \mathbf{R}^q)}\|:\mathfrak{U}_i\to\mathbf{R}. \tag{19}$$

Положим

$$\tilde{\mathfrak{h}}_i(\{\mathfrak{b}\},\ F)\overset{\text{def}}{=}\{\tilde{\mathfrak{h}}_i(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)\}_{\mathbf{R}^q\in F} \tag{20}$$

для всяких $i\in\mathbf{N}$, $\mathfrak{b}\in\mathfrak{U}_i$, $q\in\{1,...,n\}$, $q\in G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$. В частности, при $F=G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ формула (20) превращается в формулу

$$\tilde{\mathfrak{h}}_i(\{\mathfrak{b}\}\times G_q(\mathbf{R}^n))=G_q(\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})) \tag{21}$$

для всяких $i\in\mathbf{N}$, $\mathfrak{b}\in\mathfrak{U}_i$, $q\in\{1,...,n\}$, где $G_q\left(\mathfrak{p}^{-1}\left(\mathfrak{b}\right)\right)$ — множество q-мерных векторных подпространств слоя $\mathfrak{p}^{-1}\left(\mathfrak{b}\right)$.

Наложим условие на семейство $\mathfrak{M}$, потребовав, чтобы множество M было *замкнутым,* а отображение $M\times E\to R^+$, определенное формулой $\left(t,\xi\right)\to\left|X_t\xi\right|$, — *непрерывным.* Это условие, имеющееся в теореме 1, всюду далее в этом параграфе (кроме леммы 9 и предложения 5) предполагается выполненным и не воспроизводится в формулировках лемм и предложения 4.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех положительных чисел, принадлежащих множеству M:

$$\mathcal{M}\underset{\text{def}}{=}\{m\in M:m>0\}.$$

Л Е М М А **2.** *Для всяких* $q\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $i\in\mathbf{N}$ *формула*

$$a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ (t,\ \mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q))\underset{\text{def}}{=}\frac{1}{t}\ln\|\,X_t\,|_{\tilde{\mathfrak{h}}_i(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)}\|, \tag{22}$$

где $t\in\mathcal{M}$, $\mathfrak{b}\in\mathfrak{U}_i$, $\mathbf{R}^q\in G_q(\mathbf{R}^n)$, *определяет непрерывное отображение*

$$a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ \cdot):\mathcal{M}\times\mathfrak{U}_i\times G_q(\mathbf{R}^n)\to\overline{\mathbf{R}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $q\in\{1,...,n\}$, $i\in\mathbf{N}$. 1) Определим топологическое пространство $\mathcal{E}^{(q)}$ как подпространство произведения $\tilde{E}\times E$, состоящее из пар $\left(\mathbf{R}^q,\xi\right)$ таких, что $\mathbf{R}^q\in\tilde{E}$ ($\mathbf{R}^q$— q-мерное векторное подпространство слоя векторного расслоения *(E, p, B)),* $\xi\in\mathbf{R}^q$, $\left|\xi\right|=1$. Положим $\mathcal{B}^{(q)}\underset{\text{def}}{=}\mathrm{pr}_1\mathcal{E}^{(q)}$, где pr_1 — проекция произведения $\tilde{E}\times E$ на его первый сомножитель. Иными словами, $\mathcal{B}^{(q)}$ есть множество всех q-мерных подпространств всех слоев векторного расслоения *(E, p, B),* рассматриваемое как подпространство топологического пространства $\tilde{E}$. Определим отображение $\pi^{(q)}$ как сужение на $\mathcal{E}^{(q)}$ проекции pr_1 произведения $\tilde{E}\times E$ на его первый сомножитель. Непосредственно из определений вытекает, что так определенная тройка $(\mathcal{E}^{(q)},\ \pi^{(q)},\ \mathcal{B}^{(q)})$ является локально тривиальным расслоением со стандартным слоем S^{q-1}

(граница шара в q-мерном евклидовом пространстве).

2) Формула

$$\varphi_q\left(t, \mathbf{R}^q\xi\right) \stackrel{def}{=} \left|X_t\xi\right| \tag{23}$$

определяет функцию $\varphi_q : \mathcal{M}\times\mathcal{E}^{(q)} \to \mathbf{R}^+$. Эта функция непрерывна как суперпозиция двух непрерывных отображений: а) отображения $\mathcal{M}\times\mathcal{E}^{(q)} \to \mathcal{M}\times E$, определенного формулой $\left(t, \left(\mathbf{R}^q, \xi\right)\right) \to |t, \xi|$; это отображение непрерывно, так как оно является сужением непрерывного отображения (проекции топологического произведения $\mathcal{M}\times\tilde{E}\times E$ на топологическое произведение крайних сомножителей, т. е. на $\mathcal{M}\times E$);

б) отображения $\mathcal{M}\times E \to \mathbf{R}^+$, определенного формулой $(t, \xi) \to |X_t\xi|$, которое непрерывно, так как является сужением отображения $M\times E \to \mathbf{R}^+$, определенного той же формулой и непрерывного по условию.

3) Применим к непрерывной функции $\varphi_q : \mathcal{M}\times\mathcal{E}^{(q)} \to \mathbf{R}^+$ предложение 2. Для построения локально-тривиального расслоения $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathcal{B})$, фигурирующего в цитируемом предложении, положим

$$\mathcal{E} = \mathcal{M}\times\mathcal{E}^{(q)}, \tag{24}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{M}\times\mathcal{B}^{(q)}, \tag{25}$$

$$\pi = 1_{\mathcal{M}}\times\pi^{(q)}. \tag{26}$$

Так как $(\mathcal{E}^{(q)},\ \pi^{(q)},\ \mathcal{B}^{(q)})$ — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем S^{q-1} (см. п. 1)), то $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathcal{B})$ — тоже локально тривиальное расслоение с тем же стандартным слоем S^{q-1}. Из формул (24) — (26) следует, что

$$\pi^{-1}\left(t, \mathbf{R}^q\right) = \left\{\left(t, \mathbf{R}^q, \xi\right)\right\}_{\xi\in S\left(\mathbf{R}^q\right)} \tag{27}$$

для всяких $t\in\mathcal{M}$, $\mathbf{R}^q\in\mathcal{B}^{(q)}$; здесь $S\left(\mathbf{R}^q\right)$ — единичная сфера в пространстве $\mathbf{R}^q\in\mathcal{B}^{(q)}$; напомним, что пространство $\mathbf{R}^q\in\mathcal{B}^{(q)}$ наделено евклидовой структурой, будучи векторным подпространством некоторого слоя метризованного векторного расслоения ((E, p, B), $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$).

В п. 2) доказано, что функция $\varphi_q : \mathcal{E} \to \mathbf{R}^+$, где через $\mathcal{E}$, согласно формуле (24), обозначено $\mathcal{M}\times\mathcal{E}^{(q)}$, непрерывна. Поэтому в силу предложения 2 функция $\psi_q : \mathcal{B} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой

$$\psi_q(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\cdot)} \varphi_q(\mathfrak{z}),$$

непрерывна, причем sup в правой части написанного равенства достигается, т. е.

$$\psi_q(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\cdot)} \varphi_q(\mathfrak{z}), \tag{28}$$

откуда следует, что функцию $\psi_q(\cdot)$ можно рассматривать и как функцию $\mathcal{B}\to\mathbf{R}^+$, поскольку φ_q есть функция $\mathcal{E}\to\mathbf{R}^+$. Из (27), (28) следует, что для всяких $t\in\mathcal{M}$, $\mathbf{R}^q\in\mathcal{B}^{(q)}$ имеет место равенство

$$\psi_q\left(t, \mathbf{R}^q\right) = \max_{\xi\in S\left(\mathbf{R}^q\right)} \varphi_q\left(t, \mathbf{R}^q, \xi\right)$$

Подставив в правую часть этого равенства формулу (23), определяющую функцию $\varphi_q(\cdot)$, получаем, что

$$\psi_q\left(t, \mathbf{R}^q\right) = \max_{\xi\in S\left(\mathbf{R}^q\right)} \left|X_t\xi\right| = \left\|X_t\right|_{\mathbf{R}^q}\right|$$

Последнее равенство есть не что иное как стандартное определение нормы линейного оператора $\left|X_t\right|_{\mathbf{R}^q}$. Результат этого пункта: *формула*

$$\psi_q\left(t, \mathbf{R}^q\right) = \left\| X_t \right|_{\mathbf{R}^q} \right| \tag{29}$$

определяет непрерывную функцию $\psi_q : \mathcal{M} \times \mathcal{B}^{(q)} \to \mathbf{R}^+$.

4) Отображение $\mathfrak{J} : \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}^+ \to \overline{\mathbf{R}}$, определенное формулой

$$\mathfrak{J}(t,\ u) = \frac{1}{t} \ln u, \tag{30}$$

где $t \in \mathbf{R}_*{}^+$, $u \in \mathbf{R}^+$, как известно, непрерывно; напомним, что $\ln 0 = -\infty$, и поэтому $\mathfrak{J}(t,\ 0) = -\infty$ при всяком $t \in \mathbf{R}_*{}^+$.

5) Из формул (22), (29), (30) следует, что

$$a_{q,\, i}(\mathfrak{M};\ (t,\ \mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)) = \mathfrak{J}(t,\ \tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathfrak{h}}_i(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)) \tag{31}$$

для всяких $t \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{U}_i$, $\mathbf{R}^q \in G_q(\mathbf{R}^n)$.

Отображения $\tilde{\mathfrak{h}}_i : \mathfrak{U}_i \times \bigcup\limits_{q=0}^{n} G_q(\mathbf{R}^n) \to \tilde{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{U}_i) \subset \tilde{\mathfrak{E}}$ и $\tilde{\mathfrak{f}} : \tilde{\mathfrak{E}} \to \tilde{E}$ непрерывны; это доказано выше в этом параграфе. Из определения этих отображений (см. формулы (14), (18)) в силу линейности и невырожденности сужений отображения $\mathfrak{f}^* : \mathfrak{E} \to E$ на слои векторного расслоения $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$ (доказанной в этом параграфе) и линейности и невырожденности сужений координатного отображения $\tilde{\mathfrak{h}}_i : \mathfrak{U}_i \times \mathbf{R}^n \to \tilde{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{U}_i)$ на слои тривиального векторного расслоения $(\mathfrak{U}_i \times \mathbf{R}^n,\ \mathrm{pr}_1,\ \mathfrak{U}_i)$ (pr_1 здесь означает проекцию произведения $\mathfrak{U}_i \times \mathbf{R}^n$ на его первый сомножитель) следует, что $\tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathfrak{h}}_i(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)$ для всяких $\mathfrak{b} \in \mathfrak{U}_i$ $\mathbf{R}^q \in G_q(\mathbf{R}^n)$ есть q-мерное векторное подпространство некоторого слоя векторного расслоения *(E, p, B),* т. е. согласно обозначению, введенному в п. 1) доказательства, является точкой пространства $\mathcal{B}^{(q)}$. Из двух предыдущих фраз вытекает, что $\tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathfrak{h}}_i$ является непрерывным отображением $\mathfrak{U}_i \times \bigcup\limits_{q=0}^{n} G_q(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{B}^{(q)}$. Отображение $\psi_q(\cdot) : \mathcal{M} \times \mathcal{B}^{(q)} \to \mathbf{R}^+$ непрерывно, как доказано в п. 3). Отображение $\mathfrak{J} : \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}^+ \to \overline{\mathbf{R}}$ непрерывно — это отмечено в п. 4). Поэтому из формулы (31) следует (напомним, что $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}_*^+$), что отображение

$$a_{q,\, i}(\mathfrak{M};\ \cdot) : \mathcal{M} \times \mathfrak{U}_i \times G_q(\mathbf{R}^n) \to \overline{\mathbf{R}}$$

непрерывно. Лемма доказана.

Прежде чем формулировать следующую лемму, напомним обозначения, которые были использованы в предложении 3 и будут неоднократно использоваться в дальнейшем:

$$\mathcal{M}_m \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{M} \bigcap [m,\ +\infty)$$

для всякого $m \in \mathcal{M}$;

$$\mathcal{M}_{m,\, s} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{M} \bigcap [m,\ s] = M \bigcap [m,\ s]$$

для всяких $m \in \mathcal{M}$, $s \in \mathcal{M}_m$.

Л Е М М А **3.** *Для всяких* $q \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $i \in \mathbf{N}$, $m \in \mathcal{M}$, $s \in \mathcal{M}_m$ *функция*

$$\sup_{t \in \mathcal{M}_{m,\, s}} a_{q,\, i}(\mathfrak{M};\ (t,\ \cdot) : \mathfrak{U}_i \times G_q(\mathbf{R}^n) \to \overline{\mathbf{R}} \tag{32}$$

непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $q \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $i \in \mathbf{N}$, $m \in \mathcal{M}$, $s \in \mathcal{M}_m$. Согласно лемме 2 функция

$$a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ \cdot): \mathcal{M}\times\mathfrak{U}_i\times G_q(\mathbf{R}^n)\to\bar{\mathbf{R}} \tag{33}$$

непрерывна. $\mathcal{M}_{m,\,s}$ — компакт, так как M замкнуто. Положим

$$\mathcal{E}=\mathcal{M}_{m,\,s}\times\mathfrak{U}_i\times G_q(\mathbf{R}^n)\,,\quad \mathcal{B}=\mathfrak{U}_i\times G_q(\mathbf{R}^n)$$

и обозначим через π проекцию произведения $\mathcal{M}_{m,\,s}\times\mathfrak{U}_i\times G_q(\mathbf{R}^n)$, рассматриваемого как $\mathcal{M}_{m,\,s}\times(\mathfrak{U}_i\times G_q(\mathbf{R}^n))$, на второй сомножитель, т. е. на $\mathfrak{U}_i\times G_q(\mathbf{R}^n)$.Так определенная тройка $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathcal{B})$ является тривиальным расслоением с компактным стандартным слоем. Определив функцию, $\varphi(\cdot):\mathcal{E}\to\bar{\mathbf{R}}$ как сужение на $\mathcal{E}$ функции (33) и применив к ней предложение 2, получаем, что функция

$$\sup_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\cdot)}\varphi(\mathfrak{z})=\sup_{t\in\mathcal{M}_{m,\,s}}a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ (t,\ \cdot):\mathcal{B}=\mathfrak{U}_i\times G_q(\mathbf{R}^n)\to\bar{\mathbf{R}}$$

непрерывна. Лемма доказана.

ЛЕММА **4.** *Для всяких* $q\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $i\in\mathbf{N}$, $m\in\mathcal{M}$, $s\in\mathcal{M}_m$ *и всякого замкнутого множества* $F\subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ *функция*

$$\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ m,\ s,\ \cdot)\overset{\text{def}}{=}\inf_{\mathbf{R}^q\in F}\sup_{t\in\mathcal{M}_{m,\,s}}a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ (t,\ (\cdot,\ \mathbf{R}^q))):\mathfrak{U}_i\to\bar{\mathbf{R}} \tag{34}$$

непрерывна.

Доказательство. Пусть даны $q\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $i\in\mathbf{N}$, $m\in\mathcal{M}$, $s\in\mathcal{M}_m$ и замкнутое множество $F\subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$.

Положим

$$\mathcal{E}=\mathfrak{U}_i\times F\,,\quad \mathcal{B}=\mathfrak{U}_i$$

и обозначим через π проекцию произведения $\mathfrak{U}_i\times F$ на первый сомножитель. Так определенная тройка $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathcal{B})$ является тривиальным расслоением. Определим функцию $\varphi(\cdot):\mathcal{E}\to\bar{\mathbf{R}}$ как сужение на $\mathcal{E}=\mathfrak{U}_i\times F$ функции (32), взятой со знаком минус; эта функция непрерывна в силу леммы 3. Согласно предложению 2 функция

$$\sup_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\cdot)}\varphi(\mathfrak{z})=-\inf_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\cdot)}(-\varphi(\mathfrak{z}))=$$

$$=-\inf_{\mathbf{R}^q\in F}\sup_{t\in\mathcal{M}_{m,\,s}}a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ (t,\ (\cdot,\ \mathbf{R}^q))):\mathcal{B}=\mathfrak{U}_i\to\bar{\mathbf{R}}$$

непрерывна. Согласно формуле (34) эта функция есть

$$-\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ m,\ s,\ \cdot):\mathfrak{U}_i\to\bar{\mathbf{R}}.$$

Следовательно, функция $\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ m,\ s,\ \cdot):\mathfrak{U}_i\to\bar{\mathbf{R}}$ непрерывна. Лемма доказана.

Фиксируем какую-нибудь монотонно стремящуюся $k+\infty$ последовательность $\{m_k\}_{k\in N}$ точек множества $\mathcal{M}$. Для всяких $q\in\{1,\ldots,n\}$, $i\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}$, $l\in k+\mathbf{N}$ и всякого замкнутого множества $F\subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ определим функцию $\mu_{q,\,i}^{(k,\,l)}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot):\mathfrak{U}_i\to\bar{\mathbf{R}}$ формулой

$$\mu_{q,\,i}^{(k,\,l)}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b})\overset{\text{def}}{=}\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ m_k,\ m_l,\ \mathfrak{b})=\inf_{\mathbf{R}^q\in F}\sup_{t\in\mathcal{M}_{m_k,\,m_l}}a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ (t,\ \mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)) \tag{35}$$

для всякого $\mathfrak{b}\in\mathfrak{U}_i$; последнее равенство в формуле (35) вытекает из (34).

ЛЕММА **5.** *Для всяких* $q\in\{1,\ldots,n\}$, $i\in\mathbf{N}$ *всякого замкнутого множества* $F\subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ *и всякого* $\mathfrak{b}\in\mathfrak{U}_i$ *имеют место равенства*

$$\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b})=\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\mu_{q,\,i}^{(k,\,l)}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b})=\inf_{k\in\mathbf{N}}\lim_{l\to\infty}\mu_{q,\,i}^{(k,\,l)}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b}). \tag{36}$$

Доказательство. Пусть даны $q\in\{1,\ldots,n\}$, $i\in\mathbf{N}$, $\mathfrak{b}\in\mathfrak{U}_i$ и замкнутое множество

$F \subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$.

1) Так как грассманово многообразие $G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ компактно, то F компактно.

2) При всяком $t \in \mathcal{M}$ определим функцию $a(t, \cdot): F \to \overline{\mathbf{R}}$ формулой

$$a\ (t,\ \mathbf{R}^q) = a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ (t,\ \mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)) \tag{37}$$

для всякого $\mathbf{R}^q \in F$. Иными словами, при всяком $t \in \mathcal{M}$ функция $a(t, \cdot): F \to \overline{\mathbf{R}}$ определяется как суперпозиция сужения функции $a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ \cdot): \mathcal{M} \times \mathfrak{U}_i \times G_q(\mathbf{R}^n) \to \overline{\mathbf{R}}$, определенной формулой (22), на множество $\{t\} \times \{b\} \times F$ и гомеоморфизма топологического пространства F на топологическое пространство $\{t\} \times \{b\} \times F$, определенного формулой $\mathbf{R}^q \to \left(t, b, \mathbf{R}^q\right)$.

В силу леммы 2 функция $a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ \cdot): \mathcal{M} \times \mathfrak{U}_i \times G_q(\mathbf{R}^n) \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой (22), непрерывна. Следовательно, при всяком $t \in \mathcal{M}$ функция $a(t, \cdot): F \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой (37), непрерывна.

3) В силу предложения 3 имеет место цепочка равенств

$$\inf_{\mathbf{R}^q \in F} \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, a\left(t, \mathbf{R}^q\right) = \lim_{k \to \infty} \lim_{l \to \infty} \min_{\mathbf{R}^q \in F} \sup_{t \in M_{m_k, m_l}} a\left(t, \mathbf{R}^q\right) =$$

$$= \inf_{k \in \mathbf{N}} \lim_{l \to \infty} \min_{\mathbf{R}^q \in F} \sup_{t \in M_{m_k, m_l}} a\left(t, \mathbf{R}^q\right)$$

Подставив в эту цепочку формулу (37) и воспользовавшись формулой (35), получаем цепочку

$$\inf_{\mathbf{R}^q \in F} \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ (t,\ \mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)) = \lim_{k \to \infty} \lim_{l \to \infty} \mu_{q,\,i}^{(k,\,l)}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b}) =$$

$$= \inf_{k \in \mathbf{N}} \lim_{l \to \infty} \mu_{q,\,i}^{(k,\,l)}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b}).$$

Из формул (19), (22) вытекает равенство

$$\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b}) = \inf_{\mathbf{R}^q \in F} \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, a_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ (t,\ \mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q)).$$

Из двух последних формул следует цепочка (36). Лемма доказана.

Для всяких $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ и всякого замкнутого множества $F \subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ формула

$$\mu_{q,\,i}^{(k)}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \to +\infty} \mu_{q,\,i}^{(k,\,l)}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b}), \tag{38}$$

предел в которой существует согласно лемме 5, определяет функцию

$$\mu_{q,\,i}^{(k)}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot): \mathfrak{U}_i \to \overline{\mathbf{R}}.$$

Л Е М М А 6. *Для всяких* $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ *и всякого замкнутого множества* $F \subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ *функция*

$$\mu_{q,\,i}^{(k)}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot): \mathfrak{U}_i \to \overline{\mathbf{R}}$$

принадлежит первому классу Бэра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ и замкнутое множество $F \subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$. Из леммы 4 и формулы (35) следует, что при всяком $l \in k + \mathbf{N}$ функция $\mu_{q,\,i}^{(k,\,l)}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot): \mathfrak{U}_i \to \overline{\mathbf{R}}$ непрерывна. Утверждение леммы вытекает поэтому из формулы (38) (напомним, что по определению (см. [7] или, например, [8, § 39]) функция принадлежит первому классу Бэра, если она есть предел всюду сходящейся (счетной) последовательности непрерывных функций). Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Пусть метризуемое топологическое пространство* $\mathfrak{B}$ *полно в некоторой метрике. Тогда для всяких* $q \in \{1,...,n\}$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ *и всякого замкнутого множества* $F \subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ *множество точек непрерывности функции* $\mu_{q,\,i}^{(k)}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot) : \mathfrak{U}_i \to \overline{\mathbf{R}}$ *есть множество типа* G_δ, *всюду плотное в* $\mathfrak{U}_i$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы Бэра, состоящей в том, что множество точек непрерывности функции первого класса Бэра $\mathfrak{T} \to \overline{\mathbf{R}}$, где $\mathfrak{T}$ — открытое множество в полном в некоторой метрике топологическом пространстве, есть всюду плотное множество типа G_δ (см. [8, с. 240—242, с. 162—164]), в силу леммы 6, так как $U_i\left(i \in \mathbf{N}\right)$ — открытые множества в полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$. Лемма доказана.

ЛЕММА **8.** *Пусть метризуемое топологическое пространство* $\mathfrak{B}$ *полно в некоторой метрике. Тогда для всяких* $q \in \{1,...,n\}$, $i \in \mathbf{N}$ *и всякого замкнутого множества* $F \subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$ *в открытом множестве* $\mathfrak{U}_i$ *имеется всюду плотное подмножество* $\mathfrak{D}_{q,\,i}(F)$ *типа* G_δ *такое, что функция* $\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot) : \mathfrak{U}_i \to \overline{\mathbf{R}}$, *определенная формулой* (19), *полунепрерывна сверху во всякой точке* $\mathfrak{b} \in \mathfrak{D}_{q,\,i}(F)$.

Доказательство. Пусть даны $q \in \{1,...,n\}$, $i \in \mathbf{N}$ и замкнутое множество $F \subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$. В силу леммы 5 для всякого $\mathfrak{b} \in \mathfrak{U}_i$ имеет место равенство

$$\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b}) = \inf_{k \in \mathbf{N}} \mu_{q,\,i}^{(k)}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b}), \tag{39}$$

где $\mu_{q,\,i}^{(k)}(\mathfrak{M};\ F;\ \mathfrak{b})$ определено формулой (38).

В силу леммы 7 для всякого $k \in \mathbf{N}$ множество $\mathfrak{D}_{q,\,i}^{(k)}(F)$ точек непрерывности функции $\mu_{q,\,i}^{(k)}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot) : \mathfrak{U}_i \to \overline{\mathbf{R}}$ есть множество типа G_δ, всюду плотное в открытом множестве $\mathfrak{U}_i$ полного метрического пространства $\mathfrak{B}$. Пересечение счетного множества всюду плотных в $\mathfrak{U}$ подмножеств типа G_δ открытого множества $\mathfrak{U}$ в полном метрическом пространстве есть всюду плотное в $\mathfrak{U}$ подмножество типа G_δ этого открытого множества (теорема Бэра, см. [8, с. 162—163]). Поэтому

$$\mathfrak{D}_{q,\,i}(F) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k \in \mathbf{N}} \mathfrak{D}_{q,\,i}^{(k)}(F)$$

есть множество типа G_δ, всюду плотное в $\mathfrak{U}_i$. Из определения множества $\mathfrak{D}_{q,\,i}(F)$ следует, что при всяком $k \in \mathbf{N}$ функция $\mu_{q,\,i}^{(k)}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot) : \mathfrak{U}_i \to \overline{\mathbf{R}}$ непрерывна во всякой точке $\mathfrak{b} \in \mathfrak{D}_{q,\,i}(F)$.

Отсюда в силу формулы (39) следует, что функция $\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot) : \mathfrak{U}_i \to \overline{\mathbf{R}}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $\mathfrak{b} \in \mathfrak{D}_{q,\,i}(F)$. В последней фразе использовано известное и легко доказываемое утверждение (см., например, [8, с. 237—238]), согласно которому точная нижняя грань множества функций, непрерывных в точке, полунепрерывна сверху в этой точке. Лемма доказана.

Следующая лемма известна и легко доказывается; впрочем, в [15] для полноты изложения приведено ее доказательство (см. лемму 8 из [15]).

ЛЕММА **9.** *Пусть* $\mathfrak{U}$ — *открытое множество в метризуемом топологическом пространстве* $\mathfrak{B}$. *Пусть* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{U}$ — *множество типа* G_δ *в* $\mathfrak{U}$, *всюду-плотное в* $\mathfrak{U}$. *Тогда* $\mathfrak{E} \bigcup (\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{U})$ — *множество типа* G_δ *в* $\mathfrak{B}$, *всюду плотное в* $\mathfrak{B}$.

ЛЕММА **10.** *Пусть метризуемое топологическое пространство* $\mathfrak{B}$ *полно в* *некоторой метрике. Тогда для всяких* $q \in \{1,...,n\}$, $i \in \mathbf{N}$ *и всякого замкнутого множества в пространстве* $\mathfrak{B}$ *имеется всюду плотное множество* $\mathfrak{B}_{q,\,i}(F)$ *типа* G_δ *такое, что функция* $\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F;\ \cdot):\mathfrak{U}_i \to \bar{\mathbf{R}}$ *определенная формулой* (19), *полунепрерывна сверху во всякой точке* $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_{q,\,i}(F) \bigcap \mathfrak{U}_i$.

Доказательство. Пусть даны $q \in \{1,...,n\}$, $i \in \mathbf{N}$ и замкнутое множество $F \subset G_q\left(\mathbf{R}^n\right)$. Положим $\mathfrak{B}_{q,\,i}(F) = \mathfrak{D}_{q,\,i}(F) \bigcup (\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{U}_i)$, где $\mathfrak{D}_{q,\,i}(F)$ множество, обладающее свойствами, указанными в формулировке леммы 8. В силу леммы 9 так определенное множество $\mathfrak{B}_{q,\,i}(F)$ есть множество типа G_δ, всюду плотное в $\mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Предложение 4. *Пусть топологическое пространство* $\mathfrak{B}$ *метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда в пространстве* $\mathfrak{B}$ *имеется всюду плотное множество* $\mathfrak{D}$ *типа* G_δ *такое, что для всяких* $q \in \{1,...,n\}$, $i \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, $j \in \{1,...,s(q,m)\}$ *функция* $\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F^j_{q,\,m};\ \cdot):\mathfrak{U}_i \to \bar{\mathbf{R}}$, *определенная формулой*

$$\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F^j_{q,\,m};\ \cdot) = \inf_{\mathbf{R}^q \in F^j_{q,\,m}} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\tilde{\mathfrak{f}}\mathfrak{y}_i(\cdot,\ \mathbf{R}^q)} \|, \tag{40}$$

полунепрерывна сверху во всякой точке $\mathfrak{b} \in \mathfrak{D} \bigcap \mathfrak{U}_i$.

Доказательство. Положим

$$\mathfrak{D} = \bigcap_{m\in\mathbf{N}} \bigcap_{i\in\mathbf{N}} \bigcap_{q=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{s(q,\,m)} \mathfrak{B}_{q,\,i}(F^j_{q,\,m}),$$

где $\mathfrak{B}_{q,\,i}(F)$ — множества, обладающие свойствами, указанными в формулировке леммы 10. Так как каждое из множеств $\mathfrak{B}_{q,\,i}(F^j_{q,\,m})$ имеет тип G_δ и всюду плотно в $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ метризуемо и полно в некоторой метрике, то в силу теоремы Бэра (см. [8, с. 163]) множество $\mathfrak{D}$ имеет тип G_δ и всюду плотно в $\mathfrak{B}$. Для всяких $q \in \{1,...,n\}$, $i \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, $j \in \{1,...,s(q,m)\}$ функция $\mu_{q,\,i}(\mathfrak{M};\ F^j_{q,\,m};\ \cdot):\mathfrak{U}_i \to \bar{\mathbf{R}}$, определенная формулой (40), полунепрерывна сверху во всякой точке множества $\mathfrak{D} \bigcap \mathfrak{U}_i$, так как $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}_{q,\,i}(F^j_{q,\,m})$.

Предложение доказано.

Напомним, что при всяком $\lambda \in \bar{R} \setminus \{-\infty\}$ формулы (3), (4) определяют, в силу предложения 1, отображение $\mathfrak{f}_\lambda : \mathfrak{B} \to \tilde{E}$. При $\lambda = -\infty$ те же формулы определяют постоянное отображение

$$\mathfrak{f}_{-\infty} : \mathfrak{B} \to \{\varnothing\} \subset \tilde{E}_\varnothing \overset{\text{def}}{=} \tilde{E} \bigcup \{\varnothing\}.$$

Для всяких $\lambda \in \bar{\mathbf{R}}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ положим

$$\mathfrak{f}^{(\lambda)}\mathfrak{b} \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b}) \overset{\text{def}}{=} \{\xi \in \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}) : \lambda(\mathfrak{M},\ \mathfrak{f}^*\xi) < \lambda\}. \tag{41}$$

При $\lambda = -\infty$ формула (41) определяет постоянное отображение

$$\mathfrak{f}_{-\infty} : \mathfrak{B} \to \{\varnothing\} \subset \tilde{\mathfrak{E}}_\varnothing \overset{\text{def}}{=} \tilde{\mathfrak{E}} \bigcup \{\varnothing\}.$$

Предложение 5. *При всяком формула* (41) *определяет отображение* $\mathfrak{f}^{(\lambda)} : \mathfrak{B} \to \tilde{\mathfrak{E}}$, *связанное с отображением* $\mathfrak{f}_\lambda : \mathfrak{B} \to \tilde{E}$ *формулой*

$$\tilde{\mathfrak{f}}\mathfrak{f}^{(\lambda)} = \mathfrak{f}_\lambda.$$

Доказательство. Пусть дано $\lambda \in \bar{\mathbf{R}} \setminus \{-\infty\}$. При определении отображения $\mathfrak{f}^*$ было доказано, что его сужение $\mathfrak{f}^*_\mathfrak{b}$ на слой $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$ при всяком $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{f}^*\mathfrak{b}p^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{p}^{-1}(f\mathfrak{b}) \tag{42}$$

При всяком $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$ имеем

$$\{\xi\in\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}):\lambda(\mathfrak{M},\ \mathfrak{f}^*\xi)<\lambda\}=\{\xi\in\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}):\lambda(\mathfrak{M},\ \mathfrak{f}^*_{\mathfrak{b}}\xi)<\lambda\}= \\ =(\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{b}})^{-1}\{\zeta\in\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{b}}\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}):\lambda(\mathfrak{M},\ \zeta)<\lambda\}\underset{(42)}{=} \\ \underset{(42)}{=}(\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{b}})^{-1}\{\zeta\in\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{f}\mathfrak{b}):\lambda(\mathfrak{M},\ \zeta)<\lambda\}\underset{(3)}{=}(\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{b}})^{-1}E^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{f}\mathfrak{b}). \tag{43}$$

Согласно предложению 1 множество $E^0(\mathfrak{M},\lambda,\ b)$ при всяком $b\in B$ является векторным подпространством слоя $p^{-1}(b)$. При определении отображения $\mathfrak{f}^*$ было доказано, что сужение $\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{b}}$ отображения $\mathfrak{f}^*$ на слой $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$ векторного расслоения $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$ (над любой точкой $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$) является изоморфизмом векторного пространства $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$ на векторное пространство $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{f}\mathfrak{b})$. В силу двух предыдущих фраз из формулы (43) следует, что множество $\{\xi\in\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}):\lambda(\mathfrak{M},\ \mathfrak{f}^*\xi)<\lambda\}$ при всяком $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$ является векторным подпространством слоя $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$ векторного расслоения $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$.

Поэтому формула (41) определяет отображение $\mathfrak{f}^{(\lambda)}:\mathfrak{B}\to\tilde{\mathfrak{E}}$. Подействовав на левую и правую части цепочки равенств (43) отображением $\tilde{\mathfrak{f}}$ и воспользовавшись тем, что $\mathfrak{f}^*_{\mathfrak{b}}$ — сужение отображения $\mathfrak{f}^*$, получаем, что

$$\tilde{\mathfrak{f}}\mathfrak{f}^{(\lambda)}\mathfrak{b}\underset{(41)}{=}\tilde{\mathfrak{f}}\{\xi\in\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}):\lambda(\mathfrak{M},\ \mathfrak{f}^*\xi)<\lambda\}\underset{(14)}{\overset{(43)}{=}}E^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ b)\underset{(4)}{=}\mathfrak{f}_\lambda\mathfrak{b}$$

при всяком $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$. Иными словами, $\tilde{\mathfrak{f}}\mathfrak{f}^{(\lambda)}=\mathfrak{f}_\lambda$. Предложение доказано.

§4

ТЕОРЕМА **2.** *Пусть M замкнуто в* $\mathbf{R}$, *а отображение $M\times E\to\mathbf{R}$, определенное формулой $(t,\xi)\to|X_t\xi|$, непрерывно. Пусть $\mathfrak{B}$ метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда в пространстве $\mathfrak{B}$ имеется всюду плотное множество $\mathfrak{D}$ типа G_δ такое, что при всяком $\lambda\in\bar{R}$ отображение $\mathfrak{f}^{(\lambda)}:\mathfrak{B}\to\tilde{\mathfrak{E}}_\varnothing$ полунепрерывно снизу во всякой точке множества $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. При $\lambda=-\infty$ отображение $\mathfrak{f}^{(\lambda)}:\mathfrak{B}\to\tilde{\mathfrak{E}}_\varnothing$, как было отмечено сразу вслед за его определением формулой (41), всюду принимает значение $\varnothing$ и, следовательно, полунепрерывно снизу.

Пусть $\mathfrak{D}$ — множество, обладающее свойствами, указанными в предложении 4. Пусть даны $\lambda\in\bar{\mathbf{R}}\setminus\{-\infty\}$, $\mathfrak{b}_0\in\mathfrak{D}$. Пусть дана окрестность $\tilde{\mathfrak{B}}$ точки

$$\mathfrak{f}^{(\lambda)}\mathfrak{b}\underset{(41)}{=}\mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b}_0)\underset{(41)}{=}\{\xi\in\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}_0):\lambda(\mathfrak{M},\ \mathfrak{f}^*\xi)<\lambda\}$$

в пространстве $\tilde{\mathfrak{E}}$.

Положим

$$q=\dim\mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b}_0).$$

Если $q=0$, т. е. $\mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b}_0)=\{0_{\mathfrak{b}_0}\}$, то полунепрерывность снизу отображения $\mathfrak{f}^{(\lambda)}$ в точке $\mathfrak{b}_0$ устанавливается легко: в самом деле, из определения векторного расслоения следует, что нулевое сечение, т. е. отображение $\mathfrak{B}\to\mathfrak{E}$, определенное формулой $\mathfrak{b}\mapsto 0_{\mathfrak{b}}$, непрерывно; поэтому найдется окрестность $\mathfrak{U}$ точки b_0 в пространстве $\mathfrak{B}$ такая, что $\{0_{\mathfrak{b}}\}\in\tilde{\mathfrak{B}}$ для всякого $\mathfrak{b}\in\mathfrak{U}$, откуда следует, что $\mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b})\in\mathrm{St}\,\tilde{\mathfrak{B}}$ для всякого $\mathfrak{b}\in\mathfrak{U}$ (поскольку $\{0_{\mathfrak{b}}\}\subset\mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b})$ и, следовательно, $\mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b})=\mathrm{St}\{\{0_{\mathfrak{b}}\}\}$).

Пусть $q\in\{1,\dots,n\}$. Положим

$$\tilde{\mathbf{R}}_0^q \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{f}^{(\lambda)}(\mathfrak{b}_0) \underset{(41)}{=} \mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b}_0) \underset{(41)}{=} \{\xi \in \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}) : \lambda(\mathfrak{M},\ \mathfrak{f}^*\xi) < \lambda\}.$$

Из этого определения в силу формулы (14) и равенства

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathbf{R}}_0^q} \| = \max_{\zeta \in \tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathbf{R}}_0^q} \lambda(\mathfrak{M},\ \zeta),$$

доказанного в [13] (см. лемму 1 цитируемой статьи), следует неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathbf{R}}_0^q} \| < \lambda. \tag{44}$$

Фиксируем координатную окрестность $\mathfrak{U}_{i_0}$, содержащую точку $\mathfrak{b}_0$ (координатную окрестность берем из множества координатных окрестностей атласа векторного расслоения $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$, зафиксированного выше: см. формулу (16)).

Так как $\mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b}_0)$ — q-мерное векторное подпространство слоя $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$, то из формулы (18), определяющей координатные отображения

$$\tilde{\mathfrak{h}}_i : \mathfrak{U}_i \times \bigcup_{q=0}^{n} G_q(\mathbf{R}^n) \to \tilde{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{U}_i),$$

следует, что $\tilde{\mathbf{R}}_0^q$ можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{R}}_0^q = \tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{b}_0,\ \mathbf{R}_0^q), \tag{45}$$

где $\mathbf{R}_0^q \in G_q(\mathbf{R}^n)$. Из формул (44), (45) следует неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{b}_0,\ \mathbf{R}_0^q)} \| < \lambda. \tag{46}$$

Возьмем $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ и окрестность $\mathfrak{W}_1 \subset \mathfrak{U}_{i_0}$ точки $\mathfrak{b}_0$ такие, что

$$\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{W}_1 \times U_\varepsilon(\mathbf{R}_0^q)) \subset \tilde{\mathfrak{B}}, \tag{47}$$

где $U_\varepsilon(\mathbf{R}_0^q)$ — ε-окрестность точки $\mathbf{R}_0^q$ в метрическом пространстве $\left(G_q\left(\mathbf{R}^n\right),\ d_q\right)$. Возьмем натуральное число $m > 2\varepsilon^{-1}$; тогда тот из замкнутых шаров $F_{q,m}^1, \ldots, F_{g,m}^{s(q,m)}$ радиуса $1/m$, который содержит точку $\mathbf{R}_0^q$, — обозначим этот шар через $F_{q,\,m}^{j_0}$ — содержится в $U_\varepsilon(\mathbf{R}_0^q)$, и поэтому из (47) следует включение

$$\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{W}_1 \times F_{q,\,m}^{j_0}) \subset \tilde{\mathfrak{B}}. \tag{48}$$

Так как множество $F_{q,\,m}^{j_0}$ содержит точку $\mathbf{R}_0^q$, то из (46) следует неравенство

$$\inf_{\mathbf{R}^q \in F_{q,\,m}^{j_0}} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{b}_0,\ \mathbf{R}^q)} \| < \lambda,$$

которое, пользуясь формулой (19), перепишем в виде

$$\mu_{q,\,i_0}(\mathfrak{M};\ F_{q,\,m}^{j_0};\ \mathfrak{b}_0) < \lambda. \tag{49}$$

В точке $\mathfrak{b}_0$, как и во всякой точке множества $\mathfrak{D}$, функция

$$\mu_{q,\,i_0}(\mathfrak{M};\ F_{q,\,m}^{j_0};\ \cdot) : \mathfrak{U}_{i_0} \to \overline{\mathbf{R}}$$

полунепрерывна сверху. Поэтому из (49) следует существование окрестности $\mathfrak{W}_2 \subset \mathfrak{U}_{i_0}$ точки $\mathfrak{b}_0$ такой, что

$$\mu_{q,\,i_0}(\mathfrak{M};\ F_{q,\,m}^{j_0};\ \mathfrak{b}) < \lambda \tag{50}$$

для всякой точки $\mathfrak{b} \in \mathfrak{W}_2$. Из неравенства (50) вследствие формулы (19) вытекает существование $\mathbf{R}^q\left(\mathfrak{b}\right) \in F_{q,m}^{j_0}$ такого, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q(\mathfrak{b}))} \| < \lambda.$$

Отсюда в силу леммы 1 [13] следует, что для всякого $\zeta \in \tilde{\mathfrak{f}}\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q(\mathfrak{b}))$ выполнено неравенство

$$\lambda(\mathfrak{M},\ \zeta) < \lambda$$

Это, в свою очередь, означает, в силу формул (14), (41), что

$$\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q(\mathfrak{b})) \subset \mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b}),$$

откуда

$$\mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b}) \in \mathrm{St}\{\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q(\mathfrak{b}))\} \tag{51}$$

(напомним, что символ St определен в § 1). Из того, что $\mathbf{R}^q\left(\mathfrak{b}\right) \in F_{q,m}^{j_0}$ вытекает включение (см. формулу (20))

$$\mathrm{St}\{\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\mathfrak{b},\ \mathbf{R}^q(\mathfrak{b}))\} \subset \mathrm{St}\,\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\{\mathfrak{b}\} \times F_{q,\,m}^{j_0}).$$

Из этого включения и формулы (51) следует

$$\mathfrak{f}^{(\lambda)}\mathfrak{b} \underset{(41)}{=} \mathfrak{E}^0(\mathfrak{M},\ \lambda,\ \mathfrak{b}) \in \mathrm{St}\,\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\{\mathfrak{b}\} \times F_{q,\,m}^{j_0}). \tag{52}$$

Итак, найдены окрестности $\mathfrak{W}_1 \subset \mathfrak{U}_{i_0}$, $\mathfrak{W}_2 \subset \mathfrak{U}_{i_0}$ точки $\mathfrak{b}_0$ такие, что для всякой точки $\mathfrak{b} \in \mathfrak{W}_1 \bigcap \mathfrak{W}_2$ имеют место включение (52) и вытекающее из формулы (48) включение

$$\tilde{\mathfrak{h}}_{i_0}(\{\mathfrak{b}\} \times F_{q,\,m}^{j_0}) \subset \tilde{\mathfrak{B}},$$

из соединения которого с формулой (52) следует включение $\mathfrak{f}^{(\lambda)}\mathfrak{b} \in \mathrm{St}\,\tilde{\mathfrak{B}}$ Теорема доказана.

Прежде чем формулировать очередное утверждение, поясним одно обозначение. Через $g^{-1}Z$ обозначается полный прообраз множества Z при отображении g, т. е. множество всех тех точек z из области определения отображения g, для которых $gz \in Z$; при этом не требуется, чтобы множество Z содержалось в множестве значений отображения g.

П р е д л о ж е н и е 6. *Для всякого множества* $Y \subset \tilde{E}$ *имеет место равенство* $\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}\left(\mathrm{St}\,Y\right) = \mathrm{St}\left(\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}Y\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предложение вытекает из определения звезды множества и определения отображения $\tilde{f}$ формулой (14), поскольку $(\mathfrak{f}^*,\ \mathfrak{f})$ — гомоморфизм векторного расслоения $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$ в векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$. Предложение доказано.

С помощью соглашения об обозначении $g^{-1}Z$, которое мы напомнили перед предложением 6, определение полунепрерывности снизу отображения $g: S \to E_{\varnothing}$, воспроизведенное в § 1 перед теоремой 1, перефразируется следующим образом. Отображение g топологического пространства S в пространство $\tilde{E}_{\varnothing} \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{E} \bigcup \{\varnothing\}$ называется *полунепрерывным снизу в точке* $s \in S$, если либо $g\left(s\right) = \varnothing$, либо (в случае $g\left(s\right) \neq \varnothing$) для всякой окрестности V точки gs (в пространстве $\tilde{E}$) множество $g^{-1}\left(\mathrm{St}\,V\right)$ является окрестностью точки s (в пространстве S).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Теорема 1 вытекает из теоремы 2 и предложений 5, 6 вследствие непрерывности отображения $\tilde{\mathfrak{f}}: \tilde{\mathfrak{E}} \to \tilde{E}$. Изложим это более подробно. Отображение $\mathfrak{f}_{-\infty}$ всюду принимает значение $\varnothing$ и, следовательно, по определению, всюду полунепрерывно снизу. В силу теоремы 2 в пространстве $\mathfrak{B}$ имеется всюду плотное множество $\mathfrak{D}$ типа G_δ такое, что при всяком $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ отображение $\mathfrak{f}^{(\lambda)}: \mathfrak{B} \to \tilde{\mathfrak{E}}_{\varnothing}$ полунепрерывно снизу во всякой точке множества $\mathfrak{D}$.

Докажем, что при всяких $\lambda \in \overline{\mathbf{R}} \setminus \{-\infty\}$, $b \in \mathfrak{D}$ отображение $\mathfrak{f}_\lambda: \mathfrak{B} \to \tilde{E}$ полунепрерывно снизу в точке b. Пусть даны $\lambda \in \overline{\mathbf{R}} \setminus \{-\infty\}$, $b \in \mathfrak{D}$. Пусть дана окрестность V точки $\mathfrak{f}_\lambda \mathfrak{b}$ (в пространстве $\tilde{E}$). Рассмотрим $\mathfrak{f}_\lambda^{-1}(\mathrm{St}\,V)$ — полный прообраз звезды множества V при отображении $\mathfrak{f}_\lambda$. В силу предложения 5 имеет место равенство $\mathfrak{f}_\lambda = \tilde{\mathfrak{f}}\mathfrak{f}^{(\lambda)}$. Поэтому $\mathfrak{f}_\lambda^{-1}(\mathrm{St}\,V) = \left(\mathfrak{f}^{(\lambda)}\right)^{-1}\left(\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}(\mathrm{St}\,V)\right)$. Согласно предложению 6 множество $\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}(\mathrm{St}\,V)$ совпадает с $\mathrm{St}\left(\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}V\right)$ и поэтому предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$\mathfrak{f}_\lambda^{-1}(\mathrm{St}\,V) = \left(\mathfrak{f}^{(\lambda)}\right)^{-1}\left(\mathrm{St}\left(\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}V\right)\right)$$

Так как отображение $\tilde{\mathfrak{f}} : \tilde{\mathfrak{E}} \to \tilde{E}$ непрерывно, а V — окрестность точки $\mathfrak{f}_\lambda b = \tilde{\mathfrak{f}}\mathfrak{f}^{(\lambda)}\mathfrak{b}$ (в пространстве $\tilde{E}$), то $\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}V$ — окрестность точки $\mathfrak{f}^{(\lambda)}\mathfrak{b}$ (в пространстве $\tilde{\mathfrak{E}}$). Отображение $\mathfrak{f}^{(\lambda)} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{E}$ полунепрерывно снизу в точке $\mathfrak{b}$, поэтому из того, что $\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}V$ — окрестность точки $\mathfrak{f}^{(\lambda)}\mathfrak{b}$ (в пространстве $\tilde{\mathfrak{E}}$), следует, что $\left(\mathfrak{f}^{(\lambda)}\right)^{-1}\left(\mathrm{St}\left(\tilde{\mathfrak{f}}^{-1}V\right)\right)$) — окрестность точки $\mathfrak{b}$ (в пространстве $\mathfrak{B}$).

Теорема 1 доказана.

Примечание. В [13, с. 49, вторая строка снизу] вместо $\mathbf{R}$ должно быть $\bar{\mathbf{R}}$. В [16] вместо $\lim$ должен быть $\overline{\lim}$.

Литература

1. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л.: ГТТИ, 1949. 550 с.
2. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. Т. 2. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 472 с.
3. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
4. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений// Итоги науки и техники (математический анализ). Т. 12. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1974. С. 71—146.
5. *Perron O.* Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen//Math. Zeitschrift. 1928. B. 29. S. 129—160.
6. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954. 216 с.
7. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М.— Л.: ГТТИ, 1932. 136 с.
8. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М — Л.: ОНТИ, 1937. 304 с.
9. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974. 160 с.
10. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. 1000 с.
11. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970. 444 с.
12. *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного, векторного расслоения//Матем. заметки. 1985. Т. 38. Вып. 1. С. 92—109.
13. *Миллионщиков В. М.* Формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения//Матем. заметки. 1986. Т. 39. Вып. 1. С. 29—51.
14. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975.
15. *Миллионщиков В. М.* О типичном поведении условной экспоненциальной устойчивости при возмущениях//Матем. сб. 1984. Т. 125 (167), № 4. С. 435—457.
16. *Миллионщиков В. М.* Типичное свойство условной устойчивости//VI Всесоюзная конференция «Качественная теория дифференциальных уравнений». 1—3 июля 1986. Тезисы докладов. Иркутск, 1986.

Поступила в редакцию
11.III.1988