УДК 517.938

Показатели Ляпунова как функции параметра

Миллионщиков В. М.

Предисловие

В статье изучается характер зависимости от параметра показателей Ляпунова дифференциальных и разностных систем, непрерывно зависящих от параметра.

Эта работа относится к качественной теории дифференциальных уравнений, основанной А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым — см. монографию В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [1]. Более точно, мы занимаемся теорией показателей Ляпунова — см. основополагающую работу А. М. Ляпунова [2], § 3 главы 3 монографии [1]; по теории показателей Ляпунова и их приложениям к различным вопросам теории устойчивости (условной устойчивости) специально написаны монография [3] и обзор Н. А. Изобова [4], исчерпывающим образом описывающий результаты и методы в этой области.

Показатели Ляпунова системы дифференциальных или разностных уравнений, непрерывно зависящей от параметра, не являются, вообще говоря, непрерывными функциями от этого параметра. Непрерывности показателей Ляпунова как функций параметра, вообще говоря, нет, даже если система не только непрерывно, но и сколь угодно гладко зависит от этого параметра.

Изучение характера зависимости показателей Ляпунова от параметра, входящего в систему дифференциальных или разностных уравнений, довольно актуально, так как при изучении динамики мы сталкиваемся с необходимостью изучения характера изменения движения при изменении значений параметров; речь идет, в частности, о физических характеристиках системы — таких как массы, моменты инерции, частоты собственных колебаний, параметры оскулирующих орбит и т. д. и т. п. Рассмотрение других видов движения — течения химических реакций, эволюции экологических или экономических систем и др. — также приводит к изучению характера зависимости движения от параметров.

В этой работе доказывается *типичность полунепрерывности сверху показателей Ляпунова*, рассматриваемых как функции параметра, от которого непрерывно зависит задача Коши. Под показателями Ляпунова здесь понимаются показатели Ляпунова линейных систем, получаемых в результате линеаризации задачи Коши. Изложение ведется на таком уровне общности, который позволяет собрать в одной теореме описание названного свойства показателей Ляпунова разнообразных объектов: различных семейств линейных и нелинейных задач Коши для дифференциальных и разностных уравнений, для функционально-дифференциальных уравнений, семейств дифференцируемых преобразований и т. д. Существенной чертой этой работы является отказ от условия ограниченности производной и даже от условия невырожденности производной — при рассмотрении семейств дифференцируемых преобразований и отказ от условия ограниченности коэффициентов — при рассмотрении семейств линейных систем дифференциальных уравнений. Такой отказ отвечает потребностям как теории, так и приложений.

Пример Перрона, разобранный ниже в связи с вопросами, обсуждаемыми в этой статье, впервые показал, что показатели Ляпунова системы, непрерывно и даже гладко зависящей от параметра, могут быть разрывными функциями этого параметра. Более того, пример Перрона показывает, что и *полунепрерывность сверху показателей Ляпунова* как функций параметра, непрерывно и даже сколь угодно гладко входящего в систему, тоже *не всегда* *имеет место*. С полунепрерывностью сверху показателей Ляпунова как функций параметра связано сохранение условной экспоненциальной устойчивости при возмущениях параметра. Если показатели Ляпунова системы полунепрерывны сверху как функции параметра при каком-то значении параметра $\mu=\mu_0$, то из отрицательности k-го показателя Ляпунова системы, соответствующей $\mu=\mu_0$, следует отрицательность k-го показателя Ляпунова системы, соответствующей всякому значению параметра μ, достаточно близкому к μ_0. А отрицательность k-го показателя Ляпунова линейной системы — это то же, что наличие у нее $(n-k+1)$-мерного экспоненциально устойчивого многообразия; здесь n — размерность фазового пространства системы. Пример Перрона заключается в следующем (см. [5], а также с. 199 в [1] и п. 5 главы 2 [6]). Рассматривается зависящая от параметра μ система уравнений

$$\begin{cases} \dot{u}=-\alpha u, \\ \dot{v}=(\sin\ln t+\cos\ln t-2\alpha)v+\mu u e^{-\alpha t}. \end{cases} \tag{П.1}$$

Здесь α — какое-нибудь фиксированное число из интервала $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-\pi}\right)$. Треугольная система (П. 1) легко интегрируется; ее общее решение таково:

$$\begin{cases} u(t)=C_1e^{-\alpha t}, \\ v(t)=e^{t\sin\ln t-2\alpha t}\left(C_2+\mu C_1\int\limits_0^t e^{-\tau\sin\ln\tau}d\tau\right). \end{cases} \tag{П.2}$$

Для всякого $t=\exp\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$, где m — любое натуральное число, имеем

$$\int\limits_0^t e^{-\tau\sin\ln\tau}d\tau>\int\limits_{te^{-\pi}}^{te^{-2\pi/3}} e^{-\tau\sin\ln\tau}d\tau>t(e^{-2\pi/3}-e^{-\pi})\exp\left(\frac{1}{2}te^{-\pi}\right).$$

Отсюда следует, что при $\mu C_1\neq 0$ показатель Ляпунова решения (П. 2) больше или равен $1-2\alpha+\frac{1}{2}e^{-\pi}>0$, в то время как при $\mu C_1=0$ он равен $\max\{-\alpha,\ 1-2\alpha\}<0$. Поэтому: 1) при $\mu=0$ все решения системы (П.1) имеют отрицательные показатели Ляпунова и потому $\lambda_1(0)<0$, $\lambda_2(0)<0$, 2) при всяком $\mu\neq 0$ система (П.1) имеет решение — таковым является решение, задаваемое формулой (П.2) с любым $C_1\neq 0$, — показатель Ляпунова которого положителен; поэтому $\lambda_1(\mu)>0$ при всяком $\mu\neq 0$. Отсюда следует, что функция $\lambda_1(\cdot)$ разрывна в точке 0. Более того, отсюда следует, что эта функция не является полунепрерывной сверху в точке 0. Поясним, что через $\lambda_1(\mu)\geqslant\lambda_2(\mu)$ обозначаются показатели Ляпунова системы (П.1). Разобранный пример Перрона обнаруживает одно из существенных отличий систем уравнений в вариациях вдоль неособых, т. е. отличных от точек и циклов, траекторий от систем уравнений в вариациях в неподвижных точках.

Перейдем к изучению вопроса о том, насколько часто встречаются разрывы показателей Ляпунова. Существуют различные, не эквивалентные друг другу, понимания того, какие свойства выполняются «часто», т. е. являются типичными, а какие — «редко», т. е. нетипичны. Здесь мы напомним понятие типичности, введенное и изученное Р. Бэром [7]. Мы будем говорить о типичных свойствах точек топологических пространств. В качестве таких топологических пространств у нас могут фигурировать отрезок или интервал, открытое или замкнутое множество в конечномерном евклидовом пространстве или в многообразии, а также и некоторые функциональные пространства — пространства задач Коши для дифференциальных, разностных или функционально дифференциальных уравнений. Свойство точки топологического пространства называется типичным, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ. Напомним, что множеством типа G_δ называется пересечение счетной совокупности открытых множеств. О типичных свойствах и вообще о теории Бэра можно прочесть в книгах [7], [8], [9]. Использование понятий и теорем Р. Бэра в динамике началось с теоремы А. Пуанкаре о возвращении [10, глава 26], точнее, с того ее варианта, где говорится о множестве второй категории; так во многих местах, но не в [8], называются множества, принадлежность к которым — типичное свойство точки. Другой вариант теоремы Пуанкаре о возвращении, в котором речь идет о множестве полной инвариантной меры, послужил началом эргодической теории. Изложение теоремы Пуанкаре о возвращении имеется в книгах [1, § 3 главы 6], [9, глава 17].

§ 1. Определения

В этом параграфе в удобной для дальнейшего изложения форме приведены определения, необходимые для понимания следующих параграфов. Начнем с известных определений.

Векторным расслоением со стандартным слоем $\mathbf{R}^n$ (в дальнейшем изложении можно было бы легко заменить $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{C}^n$) называется тройка (E, p, B), где E (пространство векторного расслоения) и B (база векторного расслоения) — некоторые топологические пространства, а p (проекция) — непрерывное отображение E на B; при этом требуется, чтобы на полном прообразе $p^{-1}(b)$ всякой точки $b \in B$ — этот полный прообраз называется слоем над точкой b — была задана структура n-мерного векторного пространства над полем $\mathbf{R}$; требуется, кроме того, чтобы выполнялось условие локальной тривиальности. Упомянутое условие состоит в следующем. У каждой точки $b \in B$ имеется окрестность U_b (называемая координатной окрестностью) и гомоморфизм h_b (называемый координатным отображением) топологического пространства $U_b \times \mathbf{R}^n$ на подпространство $p^{-1}(U_b)$ топологического пространства E, обладающий свойством: для всякого $c \in U_b$ отображение $h_b(c, \cdot)$ является изоморфизмом векторного пространства $\mathbf{R}^n$ на векторное пространство $p^{-1}(c)$; из последнего свойства вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U_b \times \mathbf{R}^n & \xrightarrow[h_b]{} & p^{-1}(U_b) \\ & {}^{\mathrm{pr}_1}\searrow U_b \swarrow^{p} & \end{array}$$

для всякого $b \in B$; здесь pr_1 — обозначение для проекции произведения $U_b \times \mathbf{R}^n$ на его первый сомножитель.

Риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на векторном расслоении по определению есть непрерывное отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ множества пар (ξ, η), где $\xi \in E$, $\eta \in E$, удовлетворяющих условию $p\xi = p\eta$, в числовую прямую $\mathbf{R}$ причем от этого отображения требуется, чтобы для всякого $b \in B$ его сужение на $p^{-1}(b) \times p^{-1}(b)$ было скалярным произведением на векторном пространстве $p^{-1}(b)$. Пара (векторное расслоение, риманова метрика на нем) называется метризованным векторным расслоением.

Эндоморфизмом векторного расслоения (E, p, B) называется пара (X, χ) непрерывных отображений $X : E \to E$, $\chi : B \to B$, обладающих свойством: для всякого $b \in B$ сужение $X[b]$ отображения X на слой $p^{-1}(b)$ является линейным отображением этого слоя в слой $p^{-1}(\chi b)$. Это свойство влечет за собой коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{X} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[\chi]{} & B \end{array}$$

т. е. равенство $pX = \chi p$. Подробнее эти и другие сведения о векторных расслоениях можно прочесть, например, в книге Д. Хьюзмоллера [11].

С е м е й с т в о м   э н д о м о р ф и з м о в   м е т р и з о в а н н о г о   в е к т о р н о г о   р а с с л о е н и я $((E,\ p,\ B),\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ мы называем отображение $\mathfrak{M}: M \to \mathrm{End}\,(E,\ p,\ B)$ какого-либо множества M в множество эндоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, обозначаемое через $\mathrm{End}\,(E,\ p,\ B)$.

В этой статье мы будем рассматривать только такие семейства эндоморфизмов, у которых M есть множество точек действительной прямой, не ограниченное справа. Значение отображения $\mathfrak{M}$ в точке $t \in M$ будем обозначать через $(X_t,\ \chi_t)$, где X_t — непрерывное отображение $E \to E$, χ_t — непрерывное отображение $B \to B$; напомним, что при всяком $b \in B$ сужение $X_t[b]$ отображения X_t на слой $p^{-1}(b)$ есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi_t b)$.

В важном частном случае, когда $\mathfrak{M}$ — гомоморфизм аддитивной полу группы $\mathbf{R}^+$ или $\mathbf{Z}^+$ в мультипликативную полугруппу эндоморфизмов векторного расслоения, вместо $\mathfrak{M}$ используется обозначение $\mathfrak{H}$ (начальная буква слова «гомоморфизм», в то время как $\mathfrak{M}$ — начальная буква слова «множество» — по-русски и по-немецки).

О п р е д е л е н и е 1. Для всякого $\xi \in E$ п о к а з а т е л ь   Л я п у н о в а $\lambda(\mathfrak{M},\ \xi)$ семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ в точке ξ определяется формулой

$$\lambda(\mathfrak{M},\ \xi) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |\, X_t \xi \,|. \tag{1}$$

В этой формуле, и вообще всюду далее, $\ln 0$ считаем равным $-\infty$. Норма определяется через риманову метрику $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ стандартной формулой: $|\,\eta\,| = \langle\eta,\ \eta\rangle^{1/2}$ для всякого $\eta \in E$. Наконец, в выражении «$t \to +\infty$» подразумевается, что t стремится к $+\infty$, оставаясь в множестве M. Вследствие этих соглашений из формулы (1) следует, что $\lambda(\mathfrak{M},\ 0_b) = -\infty$ для всякого $b \in B$. Поясним, что через 0_b обозначается нулевой вектор слоя $p^{-1}(b)$. Показатель $\lambda(\mathfrak{M},\ \xi)$ может принимать значения $+\infty$, $-\infty$ и на ненулевых векторах $\xi \in E$; говоря о ненулевом векторе $\xi \in E$, мы подразумеваем точку $\xi \in E$, для которой $\xi \neq 0_{p\xi}$.

Итак, из формулы (1) следует, что при всяком $\xi \in E$ показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{M},\ \xi)$ является точкой расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$. Напомним, что в $\overline{\mathbf{R}}$ имеется отношение линейного порядка, получаемое продолжением такого отношения, имеющегося на $\mathbf{R}$, с помощью аксиомы: $-\infty < r < +\infty$ для всякого $r \in \mathbf{R}$. Напомним также, что топология на $\overline{\mathbf{R}}$ задается так: открытыми множествами в $\overline{\mathbf{R}}$ являются множества вида $[-\infty,\ r)$, $(s,\ t)$, $(u,\ +\infty]$, где r, s, t, u — произвольные действительные числа (при $s \geqslant t$ множество $(s,\ t)$ по определению пусто), и всевозможные объединения таких множеств.

О п р е д е л е н и е 2. При всяком $b \in B$ н о р м а л ь н ы м относительно семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ метризованного векторного расслоения $((E,\ p,\ B),\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ базисом слоя $p^{-1}(b)$ называется базис $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$, векторы которого занумерованы в порядке невозрастания показателей Ляпунова: $\lambda(\mathfrak{M},\ \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(\mathfrak{M},\ \xi_n)$ и обладают свойством: для всякого базиса $\{\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n\}$ того же векторного пространства, занумерованного в порядке невозрастания показателей

Ляпунова: $\lambda(\mathfrak{M},\ \eta_1)\geqslant\ldots\geqslant\lambda(\mathfrak{M},\ \eta_n)$, имеют место неравенства $\lambda(\mathfrak{M},\ \eta_k)\geqslant\lambda(\mathfrak{M},\ \xi_k)$ ($k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$).

Нам предстоит воспользоваться работами [12] — [14][1], где объектом рассмотрения является семейство эндоморфизмов метризованного *абстрактного* векторного расслоения — этот термин разъяснен в цитируемых статьях. Для применения результатов [12] — [14] достаточно *обеднить* рассматриваемую теперь структуру, забыв о топологиях на E и B и о непрерывности отображений p, $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, X_t, χ_t. Множество эндоморфизмов так возникшего абстрактного векторного расслоения обозначим через $\mathrm{End}_a\,(E,\ p,\ B)$. Имеет место очевидное включение $\mathrm{End}\,(E,\ p,\ B)\subset\mathrm{End}_a\,(E,\ p,\ B)$, которое чаще всего бывает строгим. Отображение $\mathfrak{M}: M\to\mathrm{End}\,(E,\ p,\ B)$ можно, благодаря этому включению, рассматривать также и как отображение $M\to\mathrm{End}_a\,(E,\ p,\ B)$, за которым сохраним то же обозначение $\mathfrak{M}$. Благодаря этим замечаниям мы можем пользоваться в рассматриваемой в этой статье ситуации определениями и утверждениями статей [12] — [14].

В силу теоремы 1 [12] для всякого семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ метризованного векторного расслоения $((E,\ p,\ B),\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ для всякого $b\in B$ существуют базисы слоя $p^{-1}(b)$, нормальные относительно семейства $\mathfrak{M}$; из определения 2 следует, что для всяких двух базисов $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ и $\{\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n\}$ слоя $p^{-1}(b)$, нормальных относительно семейства $\mathfrak{M}$, имеют место равенства $\lambda(\mathfrak{M},\ \xi_k)=\lambda(\mathfrak{M},\ \eta_k)$ ($k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$). Поэтому корректно следующее

Определение 3. Показатели Ляпунова $\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},\ b)$ семейства $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов метризованного векторного расслоения $((E,\ p,\ B),\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ определяются для всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $b\in B$ формулой $\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},\ b)=\lambda(\mathfrak{M},\ \xi_k)$, где $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ — любой нормальный относительно семейства $\mathfrak{M}$ базис слоя $p^{-1}(b)$.

§ 2. Теоремы

Основные условия. Пусть дано метризованное векторное расслоение $((E,\ p,\ B),\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$. Пусть M — неограниченное справа замкнутое множество точек действительной прямой $\mathbf{R}$. Основные частные случаи: $M=\mathbf{R}$, $M=\mathbf{R}^+$, $M=\mathbf{Z}$, $M=\mathbf{N}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — отображение множества M в множество эндоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, удовлетворяющее условию: отображение $M\times E\to\mathbf{R}$, определенное формулой $(t,\ \xi)\mapsto|X_t\xi|$, непрерывно; последнее условие автоматически выполнено, если M дискретно, например, если $M=\mathbf{Z}$ или $M=\mathbf{N}$. Пусть задано непрерывное отображение $\mathfrak{f}$ некоторого топологического пространства $\mathfrak{B}$ в базу B векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены основные условия. Тогда для всякого* $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *функция* $\mathfrak{B}\to\bar{\mathbf{R}}$, *определенная формулой* $\mathfrak{b}\mapsto\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{f}\mathfrak{b})$, *принадлежит второму классу Бэра.*

Теорема 2. *Пусть выполнены основные условия и пусть пространство* $\mathfrak{B}$ *метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда в пространстве* $\mathfrak{B}$ *имеется всюду плотное множество* $\mathfrak{C}$ *типа* G_δ, *обладающее свойством: при всяком* $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *функция* $\mathfrak{C}\to\bar{\mathbf{R}}$, *определенная формулой* $\mathfrak{c}\mapsto\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{f}\mathfrak{c})$, *непрерывна.*

---

[1] В [14] на с. 49, во второй строке снизу, над буквой $\mathbf{R}$ должна быть черта, а на с. 43 в формуле (33) вместо s должно быть t.

Теорема 3. *Пусть выполнены основные условия и пусть пространство* $\mathfrak{B}$ *метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда в пространстве* $\mathfrak{B}$ *имеется всюду плотное множество* $\mathfrak{D}$ *типа* G_δ *такое, что для всякого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *функция* $\mathfrak{B} \to \bar{\mathbf{R}}$, *определенная формулой* $\mathfrak{b} \mapsto \lambda_k^{**}(\mathfrak{M}, \mathfrak{f}\mathfrak{b})$, *полунепрерывна сверху во всякой точке множества* $\mathfrak{D}$.

Теорема 2 вытекает из теоремы 1 в силу теоремы Бэра (см. [8, с. 250 (теорема VI), с. 162 — 164]). Доказательства теорем 1, 3 приведены ниже в § 5. Для них понадобится вспомогательный материал, изложенный в §§ 3, 4.

§ 3. Вспомогательные конструкции

Как известно, локально тривиальным расслоением со стандартным слоем $\mathfrak{J}$ называется тройка $(\mathcal{E}, \pi, \mathfrak{B})$, где $\mathcal{E}$ (пространство расслоения) и $\mathfrak{B}$ (база расслоения) — топологические пространства, а π (проекция) — непрерывное отображение $\mathcal{E}$ на $\mathfrak{B}$, причем выполнено следующее требование: имеется топологическое пространство $\mathfrak{F}$ (стандартный слой) такое, что всякая точка $\beta \in \mathfrak{B}$ имеет окрестность V_β (координатную окрестность), для которой найдется гомеоморфизм (координатное отображение) h_β пространства $V_\beta \times \mathfrak{F}$ на подпространство $\pi^{-1}(V_\beta)$ пространства $\mathcal{E}$, обладающий свойством: диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V_\beta \times \mathfrak{F} \arrow[rr, "h_\beta"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(V_\beta) \arrow[dl, "\pi"] \\
& V_\beta &
\end{tikzcd}$$

коммутативна; здесь pr_1 — проекция произведения $V_\beta \times \mathfrak{F}$ на его первый сомножитель. Полный прообраз $\pi^{-1}(\beta)$ точки $\beta \in \mathfrak{B}$ при отображении $\pi : \mathcal{E} \to \mathfrak{B}$ называется слоем над точкой β.

Предложение. *Пусть* $(\mathcal{E}, \pi, \mathfrak{B})$ — *локально тривиальное расслоение с компактным стандартным слоем* $\mathfrak{F}$. *Пусть* $\varphi(\cdot) : \mathcal{E} \to \bar{\mathbf{R}}$ — *непрерывная функция. Тогда функция*

$$\psi(\cdot) = \sup_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\cdot)} \varphi(\mathfrak{z}) : \mathfrak{B} \to \bar{\mathbf{R}}$$

непрерывна и

$$\sup_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\beta)} \varphi(\mathfrak{z}) = \max_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\beta)} \varphi(\mathfrak{z})$$

для всякого $\beta \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Гомеоморфизм расширенной числовой прямой на отрезок сводит предложение к частному случаю, когда все значения функции $\varphi(\cdot)$ конечны. Этот случай для полноты изложения разобран в [14, предложение 3]. Предложение доказано.

Пусть дано векторное расслоение (E, p, B). Для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ обозначим через $E^{(k)}$ совокупность всех k-мерных векторных подпространств всех слоев векторного расслоения (E, p, B). Окрестностями точки $\hat{L} \in E^{(k)}$ называются множества $\{L \in E^{(k)} : L \bigcap V \neq \varnothing\}$, где V — окрестность точки множества $\hat{L}$ в пространстве E, а также всевозможные надмножества (в множестве $E^{(k)}$) всевозможных конечных пересечений таких множеств. Докажем вспомогательное утверждение: для всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\hat{L} \in E^{(k)}$, всякого базиса $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\}$ векторного пространства $\hat{L}$ и всякой окрестности V (в пространстве E) всякой точки $\eta \in \hat{L}$ найдутся окрестности U_i точек ζ_i ($i \in \{1, \ldots, k\}$)

(в пространстве E) такие, что всякое k-мерное векторное подпространство всякого слоя векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, имеющее непустое пересечение с каждым из множеств U_i ($i\in\{1,\ \ldots,\ k\}$), имеет непустое пересечение и с множеством V. Пусть даны $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\hat{L}\in E^{(k)}$, базис $\{\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_k\}$ векторного пространства $\hat{L}$, точка $\eta\in\hat{L}$ и ее окрестность V в пространстве E. Представим η в виде $\eta=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\zeta_i$, где $\alpha_i\in\mathbf{R}$ ($i\in\{1,\ \ldots,\ k\}$). Возьмем окрестности U_i точек ζ_i ($i\in\{1,\ \ldots,\ k\}$) в пространстве E такие, что $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\eta_i\in V$ для всяких $\eta_i\in U_i$ таких, что $p\eta_1=\ldots=p\eta_k$. Пусть L — k-мерное векторное подпространство какого-либо слоя, имеющее непустое пересечение с каждым из множеств U_i ($i\in\{1,\ \ldots,\ k\}$). Для всяких $\eta_i\in L\bigcap U_i$ ($i\in\{1,\ \ldots,\ k\}$) имеем: $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\eta_i\in L\bigcap V$. Поэтому $L\bigcap V\neq\varnothing$. Вспомогательное утверждение доказано.

Еще одно вспомогательное утверждение: для всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\hat{L}\in E^{(k)}$ и всякого базиса $\{\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_k\}$ векторного пространства $\hat{L}$ пересечение всякой конечной совокупности множеств вида

$$\{L\in E^{(k)}:L\bigcap V_i\neq\varnothing\quad(i\in\{1,\ \ldots,\ k\})\}\tag{2}$$

где V_i — окрестности (в пространстве E) точек ζ_i ($i\in\{1,\ \ldots,\ k\}$), содержит множество вида (2). Воспользуемся очевидной формулой

$$\begin{gathered}\bigcap_{s=1}^{m}\{L\in E^{(k)}:L\bigcap V_i^{(s)}\neq\varnothing\quad(i\in\{1,\ \ldots,\ k\})\}\supset\\ \supset\{L\in E^{(k)}:L\bigcap(\bigcap_{s=1}^{m}V_i^{(s)})\neq\varnothing\quad(i\in\{1,\ \ldots,\ k\})\}.\end{gathered}\tag{3}$$

Если $V_i^{(s)}$ — окрестности точки ζ_i в пространстве E ($i\in\{1,\ \ldots,\ k\}$, $s\in\{1,\ \ldots,\ m\}$), то $\bigcap_{s=1}^{m}V_i^{(s)}$ — окрестность точки ζ_i ($i\in\{1,\ \ldots,\ k\}$), и поэтому второе вспомогательное утверждение следует из включения (3).

Из двух вспомогательных утверждений вытекает, что для всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\hat{L}\in E^{(k)}$ и всякого базиса $\{\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_k\}$ векторного пространства $\hat{L}$ совокупность всех надмножеств (в $E^{(k)}$) множеств вида (2) совпадает с совокупностью окрестностей точки $\hat{L}$.

Определим проекцию $p^{(k)}:E^{(k)}\to B$ формулой $p^{(k)}L=p\xi$ ($\xi\in L$), где $\hat{L}\in E^{(k)}$; это определение корректно, поскольку $p\xi$ не зависит от выбора $\xi\in L$. Отображение $p^{(k)}:E^{(k)}\to B$ непрерывно. В самом деле, пусть $\hat{L}\in E^{(k)}$ и дана окрестность V (в пространстве B) точки $\hat{b}=p^{(k)}\hat{L}$. Пользуясь непрерывностью проекции $p:E\to B$, выберем окрестность U точки $0_{\hat{b}}$ такую, что $pU\subset V$. Окрестность $W=\{L\in E^{(k)}:L\bigcap U\neq\varnothing\}$ точки $\hat{L}$ в пространстве $E^{(k)}$ такова, что $p^{(k)}W\subset V$; действительно, $p^{(k)}L=p\xi\in pU\subset V$ для всякого $\xi\in L\bigcap U$.

Итак, $(E^{(k)},\ p^{(k)},\ B)$ — расслоение. Пусть

$$\{U,\ h:U\times\mathbf{R}^n\to p^{-1}(U)\}\tag{4}$$

— карта векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. Определим отображение $h^{(k)}:U\times G_k(\mathbf{R}^n)\to(p^{(k)})^{-1}(U)$, поставив в соответствие всякой паре $(b,\ \mathbf{R}^k)\in U\times G_k(\mathbf{R}^n)$ образ множества $\{b\}\times\mathbf{R}^k$ при отображении h, т. е. положив

$$h^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k) = \{h(b,\ \mathfrak{x})\}_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^k}.$$

Тогда

$$\{U,\ h^{(k)} : U\times G_k(\mathbf{R}^n) \to (p^{(k)})^{-1}(U)\} \tag{5}$$

— карта расслоения $(E^{(k)},\ p^{(k)},\ B)$.

Построив при всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ по всякой карте (4) векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ карту (5) расслоения $(E^{(k)},\ p^{(k)},\ B)$, мы выяснили, что $(E^{(k)},\ p^{(k)},\ B)$ — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$ (грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств пространства $\mathbf{R}^n$).

Пусть $\mathfrak{B}$ — топологическое пространство, а $\mathfrak{f}$ — непрерывное отображение этого пространства в базу B векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. Пусть $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$ — векторное расслоение, индуцированное векторным расслоением (E,p,B) и отображением $\mathfrak{f}:\mathfrak{B}\to B$. Напомним, что $\mathfrak{E}$ — подпространство топологического пространства $\mathfrak{B}\times E$, состоящее из тех $(\mathfrak{b},\ \xi)$, для которых $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$, $\xi\in p^{-1}(\mathfrak{f}\mathfrak{b})$. Проекция $\mathfrak{p}:\mathfrak{E}\to\mathfrak{B}$ — сужение на $\mathfrak{E}$ проекции произведения $\mathfrak{B}\times E$ на первый сомножитель. Всякий слой $\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{b}\}\times p^{-1}(\mathfrak{f}\mathfrak{b})$ превращается в векторное пространство естественным способом: по определению, $\alpha(\mathfrak{b},\ \xi)+\beta(\mathfrak{b},\ \eta) = (\mathfrak{b},\ \alpha\xi+\beta\eta)$ для всяких $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$, $(\mathfrak{b},\ \xi)\in\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b},\ \eta)\in\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})$. Доказательство локальной тривиальности см. в [11] (доказательство предложения в п. 3.1 главы 3). Как и выше, по векторному расслоению $(\mathfrak{E},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{B})$ при всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ строится локально тривиальное расслоение $(\mathfrak{E}^{(k)},\mathfrak{p}^{(k)},\mathfrak{B})$ со стандартным слоем $G_k\left(\mathbf{R}^n\right)$.

Через $\mathfrak{f}^*$ обозначается непрерывное отображение $\mathfrak{E}\to E$, являющееся сужением на $\mathfrak{E}$ проекции произведения $\mathfrak{E}\times E$ на второй сомножитель. Пара $(\mathfrak{f}^*,\mathfrak{f})$ — гомоморфизм векторного расслоения $(\mathfrak{E},\mathfrak{p},\mathfrak{B})$ в векторное расслоение (E,p,B), биективный на слоях. Риманова метрика $\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle$, заданная на векторном расслоении (E,p,B), индуцирует риманову метрику $\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle^*$ на векторном расслоении $(\mathfrak{E},\mathfrak{p},\mathfrak{B})$, определяемую формулой $\langle\xi,\eta\rangle^* = \langle\mathfrak{f}^*\xi,\mathfrak{f}^*\eta\rangle$.

При всяком $k\in\{1,\ldots,n\}$ формула $\mathfrak{f}^{(k)}\mathfrak{L} = \{\mathfrak{f}^*\mathfrak{x}\}_{x\in\mathfrak{L}}$, где $\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}^{(k)}$, определяет отображение $\mathfrak{f}^{(k)}:\mathfrak{E}^{(k)}\to E^{(k)}$, для которого $p^{(k)}\mathfrak{f}^{(k)} = \mathfrak{f}\mathfrak{p}^{(k)}$. Из непрерывности $\mathfrak{f}:\mathfrak{B}\to B$ вытекает, что при всяком $k\in\{1,\ldots,n\}$ отображение $\mathfrak{f}^{(k)}:\mathfrak{E}^{(k)}\to E^{(k)}$ непрерывно. Таким образом, при всяком $k\in\{1,\ldots,n\}$ пара $(\mathfrak{f}^{(k)},\mathfrak{f})$ является гомоморфизмом расслоения $(\mathfrak{E}^{(k)},\mathfrak{p}^{(k)},\mathfrak{B})$ в расслоение $(E^{(k)},p^{(k)},B)$. Он биективен на слоях, так как гомоморфизм $\left(\mathfrak{f}^*,\mathfrak{f}\right):\left(\mathfrak{E},\mathfrak{p},\mathfrak{B}\right)\to\left(E,p,B\right)$ биективен на слоях.

§ 4. Леммы о показателях Ляпунова

Пусть задано метризованное векторное расслоение $(\left(E,p,B\right),\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle)$. Пусть $\mathfrak{M}$ (семейство эндоморфизмов) — отображение некоторого не ограниченного справа множества $M\subset\mathbf{R}$ в множество эндоморфизмов векторного расслоения (E,p,B).

Наряду с приведенным выше в § 1 определением 3 имеется

Определение 4. Показатели Ляпунова $\lambda_k^*(\mathfrak{M},b)$ семейства $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов метризованного векторного расслоения $(\left(E,p,B\right),\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle)$ определяются при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ldots,n\}$ формулой

$$\lambda_k^*(\mathfrak{M},b)=\inf_{L\in E_b^{(n-k+1)}}\sup_{\xi\in L}\lambda(\mathfrak{M},\xi),$$

где $E_b^{(q)}$ — множество всех q-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, а показатели $\lambda(\mathfrak{M},\xi)$ определены формулой (1).

Имеет место следующая лемма, которую можно интерпретировать как утверждение об эквивалентности определений 3 и 4; в полном смысле слова утверждение об эквивалентности получится, если опустить все звездочки в обозначениях показателей Ляпунова.

Лемма 1. *Для всяких* $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$ *имеет место равенство* $\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},b)=\lambda_k^*(\mathfrak{M},b)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 [12] для всяких $b\in B$, $k\in\{1,...,n\}$ имеет место равенство $\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},b)=\lambda_k(\mathfrak{M},b)$, где показатели Ляпунова $\lambda_k(\mathfrak{M},b)$ ($b\in B$, $k\in\{1,...,n\}$) введены в [12] определением 4. Само определение 4 [12] нам сейчас не понадобится. Все, что надо о нем знать для проводимого далее рассуждения, это следующее: 1) определение 4 [12] совпадает с определением показателей Ляпунова $\lambda_k(\mathfrak{M},b)$, изложенным в п. 6 § 2 [13] на с. 99; 2) согласно теореме [13] для всяких $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$ имеет место равенство $\lambda_k(\mathfrak{M},b)=\lambda_k^*(\mathfrak{M},b)$. Соединив его с равенством $\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},b)=\lambda_k(\mathfrak{M},b)$, получаем, что $\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},b)=\lambda_k^*(\mathfrak{M},b)$ при всяких $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$. Лемма доказана.

Определение 5. Показатели Ляпунова $\lambda_k^{***}(\mathfrak{M},b)$ семейства $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов метризованного векторного расслоения $((E,p,B),\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ определяются при всяких $b\in B$, $k\in\{1,...,n\}$ формулой

$$\lambda_k^{***}(\mathfrak{M},b)=\inf_{L\in E_b^{(n-k+1)}}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_L\right\|,$$

где $E_b^{(q)}$ — множество всех q-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, а $X_t\big|_L$ — сужение X_t на L.

Лемма 2. *Для всяких* $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$ *имеет место равенство* $\lambda_k^{***}(\mathfrak{M},b)=\lambda_k^*(\mathfrak{M},b)$.

Доказательство. В силу леммы 1 [14] для всяких $b\in B$, $q\in\{1,...,n\}$, $L\in E_b^{(q)}$ — поясним, что в цитируемой лемме для объекта, обозначаемого здесь через $E_b^{(q)}$, применено обозначение $G_q\left(p^{-1}(b)\right)$ — имеет место равенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_L\right\|=\sup_{\xi\in L}\lambda(\mathfrak{M},\xi).$$

Отсюда следует, что для всяких $b\in B$, $k\in\{1,...,n\}$ выполнено равенство

$$\inf_{L\in E_b^{(n-k+1)}}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_L\right\|=\inf_{L\in E_b^{(n-k+1)}}\sup_{\xi\in L}\lambda(\mathfrak{M},\xi). \tag{6}$$

Левая часть равенства (6) согласно определению 5 равна $\lambda_k^{***}(\mathfrak{M},b)$, а правая в силу определения 4 совпадает с $\lambda_k^*(\mathfrak{M},b)$ (при всяких $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$). Лемма доказана.

Лемма 3. *Для всяких* $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$ *имеет место равенство*

$$\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},b)=\inf_{L\in E_b^{(n-k+1)}}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_L\right\|.$$

Доказательство. Эта лемма следует из соединения лемм 1, 2 и определения 5. Лемма доказана.

Начиная с этого места и до конца параграфа мы предполагаем, что наряду с семейством $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов метризованного векторного расслоения $((E,p,B),\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ задано непрерывное отображение $\mathfrak{f}$ некоторого топологического пространства $\mathfrak{B}$ в базу B векторного расслоения (E,p,B).

Фигурирующие далее объекты: векторное расслоение $(\mathfrak{E},\mathfrak{p},\mathfrak{B})$, индуцированное векторным расслоением (E,p,B) и отображением $\mathfrak{f}:\mathfrak{B}\to B$, локально тривиальные расслоения ($E^{(q)},p^{(q)},B$), их слои $E_b^{(q)}=\left(p^{(q)}\right)^{-1}(b)$ ($b\in B$, $q\in\{1,...,n\}$), локально тривиальные расслоения ($\mathfrak{E}^{(q)},\mathfrak{p}^{(q)},\mathfrak{B}$), определенные для всякого $q\in\{1,...,n\}$, их слои $\mathfrak{E}^{(q)}=\left(\mathfrak{p}^{(q)}\right)^{-1}(\mathfrak{b})$ ($\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$) и отображения $\mathfrak{f}^{(q)}:\mathfrak{E}^{(q)}\to E^{(q)}$ ($q\in\{1,...,n\}$) описаны в § 3.

Лемма 4. *Для всяких $k\in\{1,...,n\}$, $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$ имеет место равенство*

$$\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},\mathfrak{f}\mathfrak{b})=\inf_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_{\mathfrak{f}(n-k+1)\mathfrak{L}}\right\|.$$

Доказательство. Пусть даны $k\in\{1,...,n\}$, $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$. В конце § 3 отмечено, что сужение отображения $\mathfrak{f}^{(n-k+1)}$ на слои $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}=\left(\mathfrak{p}^{(n-k+1)}\right)^{-1}(\mathfrak{b})$ расслоения ($\mathfrak{E}^{(n-k+1)},\mathfrak{p}^{(n-k+1)},\mathfrak{B}$) является биекцией этого слоя на слой $\mathfrak{E}_{\mathfrak{f}\mathfrak{b}}^{(n-k+1)}=\left(\mathfrak{p}^{(n-k+1)}\right)^{-1}(\mathfrak{f}\mathfrak{b})$ расслоения ($E^{(n-k+1)},p^{(n-k+1)},B$). Поэтому $\mathfrak{f}^{(n-k+1)}\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}=E_{\mathfrak{f}\mathfrak{b}}^{(n-k+1)}$, откуда

$$\inf_{L\in E_{\mathfrak{f}\mathfrak{b}}^{(n-k+1)}}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_L\right\|=\inf_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_{\mathfrak{f}^{(n-k+1)}\mathfrak{L}}\right\|.$$

Левая часть этого равенства в силу леммы 3 равна $\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},\mathfrak{f}\mathfrak{b})$. Поэтому

$$\lambda_k^{**}(\mathfrak{M},\mathfrak{f}\mathfrak{b})=\inf_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_{\mathfrak{f}^{(n-k+1)}\mathfrak{L}}\right\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть даны компакт F, неограниченное множество $\mathcal{M}$ положительных действительных чисел, монотонно стремящаяся к $+\infty$ последовательность $m_i\in\mathcal{M}$ ($i\in\mathbf{N}$) и функция $a(\cdot,\cdot):M\times F\to\overline{\mathbf{R}}$, непрерывная по второму аргументу ($x\in F$) при всяком значении первого аргумента ($t\in\mathcal{M}$). Тогда имеют место равенства*

$$\inf_{x\in F}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,a(t,x)=\lim_{t\to\infty}\lim_{j\to\infty}\min_{x\in F}\sup_{t\in M_{m_i,m_j}}a(t,x)=\inf_{i\in\mathbf{N}}\lim_{j\to\infty}\min_{x\in F}\sup_{t\in M_{m_i,m_j}}a(t,x);$$

здесь $\mathcal{M}_{r,s}=\mathcal{M}\cap[r,s]$ *для всякого* $r\in\mathcal{M}$ *и всякого* $s\in\mathcal{M}_r=\mathcal{M}\cap[r,+\infty)$.

Доказательство. Согласно предложению 2 [14] справедливо равенство

$$\inf_{x\in F}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,a(t,x)=\lim_{m\to+\infty}A(m),\tag{7}$$

где

$$A(m)=\lim_{s\to+\infty}\min_{x\in F}\sup_{t\in\mathcal{M}_{m,s}}a(t,x).$$

Согласно леммам 2—4 [14] функция $A(\cdot):\mathcal{M}\to\overline{\mathbf{R}}$ монотонно не возрастает. При всяком $m\in\mathcal{M}$ имеем

$$A(m)=\lim_{j\to\infty}\min_{x\in F}\sup_{t\in\mathcal{M}_{m,m_j}}a(t,x),\tag{8}$$

так как $m_j\to+\infty$ при $j\to\infty$. По той же причине

$$\lim_{m\to+\infty}A(m)=\lim_{i\to\infty}A(m_i).\tag{9}$$

Последовательность $\{A(m_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ монотонно не возрастает, так как функция $A(\cdot):\mathcal{M}\to\overline{\mathbf{R}}$ монотонно невозрастающая, а $m_1<...<m_i<...$. Поэтому

$$\lim_{i\to\infty}A(m_i)=\inf_{i\in\mathbf{N}}A(m_i).$$

Из этого равенства и формул (7) —(9) вытекает заключение леммы. Лемма доказана.

Начиная с этого места до конца параграфа через $\mathcal{M}$ обозначается множество всех положительных чисел, принадлежащих множеству $M : \mathcal{M} = M \cap \mathbf{R}_*^+$.

Лемма 6. *Пусть* $\{m_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ *— монотонно стремящаяся к* $+\infty$ *последовательность точек множества* $\mathcal{M}$. *Тогда для всяких* $k \in \{1,...,n\}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ *имеют место равенства*

$$\lambda_k^{**}(\mathfrak{M}, \mathfrak{f}\mathfrak{b}) = \lim_{t\to\infty} \lim_{j\to\infty} \min_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}} \sup_{t\in\mathcal{M}_{m_i,m_j}} \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(n-k+1)}\mathfrak{L}}\right\| = \inf_{i\in\mathbf{N}} \lim_{t\to\infty} \min_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}} \sup_{t\in\mathcal{M}_{m_i,m_j}} \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(n-k+1)}\mathfrak{L}}\right\|$$

Доказательство. В силу леммы 6 [14] для всяких $t \in \mathcal{M}$, $q \in \{1,...,n\}$, $b \in B$ функция $E_b^{(q)} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой $L \mapsto \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_L\right\|$ непрерывна; напомним, что в цитируемой лемме $E_b^{(q)}$ обозначено через $G_p\left(p^{-1}(b)\right)$. Как отмечено в конце § 3, для всякого $q \in \{1,...,n\}$ отображение $\mathfrak{f}^{(q)} : \mathfrak{E}^{(q)} \to E^{(q)}$ непрерывно и при всяком $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ отображает слой $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(q)}$ расслоения ($\mathfrak{E}^{(q)}, \mathfrak{p}^{(q)}, \mathfrak{B}$) в слой $E_{\mathfrak{f}\mathfrak{b}}^{(q)}$ расслоения ($E^{(q)}, p^{(q)}, B$). Из двух последних фраз вытекает, что для всяких $t \in \mathcal{M}$, $q \in \{1,...,n\}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ функция $a_q(t,\cdot) : \mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(q)} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой

$$\mathfrak{L} \to \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(q)}\mathfrak{L}}\right\|$$

непрерывна. При всяком $q \in \{1,...,n\}$ грассманово многообразие $F = \mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(q)} = G_q\left(\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{b})\right)$ компактно (см., например, [11, с. 25]). Поэтому при всяких $q \in \{1,...,n\}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ для функций $a_q(\cdot,\cdot) : \mathcal{M} \times \mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(q)} \to \overline{\mathbf{R}}$ (вместо $a(\cdot,\cdot) : \mathcal{M} \times F \to \overline{\mathbf{R}}$) выполнены условия леммы 5. Применение леммы 5 к этим функциям дает следующие равенства

$$\inf_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(q)}\mathfrak{L}}\right\| = \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \min_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(q)}} \sup_{t\in M_{m_i,m_j}} \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(q)}\mathfrak{L}}\right\| = \inf_{i\in\mathbf{N}} \lim_{j\to\infty} \min_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(q)}} \sup_{t\in M_{m_i,m_j}} \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(q)}\mathfrak{L}}\right\|$$

при всяких $q \in \{1,...,n\}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$.

Пусть даны $k \in \{1,...,n\}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$. Положив в последней цепочке равенств $q = n-k+1$, получаем цепочку

$$\inf_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(n-k+1)}\mathfrak{L}}\right\| = \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \min_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}} \sup_{t\in M_{m_i,m_j}} \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(n-k+1)}\mathfrak{L}}\right\| = \inf_{i\in\mathbf{N}} \lim_{j\to\infty} \min_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}_\mathfrak{b}^{(n-k+1)}} \sup_{t\in M_{m_i,m_j}} \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(n-k+1)}\mathfrak{L}}\right\|$$

Левая часть первого равенства этой цепочки в силу леммы 4 равна $\lambda_k^{**} = (\mathcal{M}, \mathfrak{f}\mathfrak{b})$. Заменив упомянутую левую часть этим выражением, получаем заключение леммы. Лемма доказана.

Напомним, что основные условия, фигурирующие в следующих леммах, сформулированы выше в начале второго параграфа.

Лемма 7. *Пусть выполнены основные условия. Тогда для всякого* $q \in \{1,...,n\}$ *формула*

$$a_q\left(\mathfrak{M}; (t, \mathfrak{L})\right) = \frac{1}{t}\ln\left\|X_t|_{\mathfrak{f}^{(q)}\mathfrak{L}}\right\|, \tag{10}$$

где $t \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{L} \in \mathfrak{E}^{(q)}$, *определяет непрерывное отображение* $a_q(\mathfrak{M}, \cdot) : \mathcal{M} \times \mathfrak{E}^{(q)} \to \overline{\mathbf{R}}$.

Доказательство. Пусть дано $q \in \{1,...,n\}$. 1) Обозначим через $\mathcal{E}^{(q)}$ подпространство топологического произведения $E^{(q)} \times E$, состоящее из пар (L, ξ), таких, что $L \in E^{(q)}$, т. е. L — q-мерное векторное подпространство некоторого слоя векторного расслоения (E, p, B), а $\xi \in L$, $|\xi| = 1$. Положим $\mathfrak{B}^{(q)} = E^{(q)}$.

Определим отображение $\pi^{(q)} : \mathcal{E}^{(q)} \to \mathfrak{B}^{(q)}$ как сужение на $\mathcal{E}^{(q)}$ проекции pr_1 произведения $E^{(q)} \times E$ на первый сомножитель. Тройка ($\mathcal{E}^{(q)}, \pi^{(q)}, \mathfrak{B}^{(q)}$) — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем S^{q-1}.

2) Функция $\varphi_q : \boldsymbol{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(q)} \to \mathbf{R}^+$, определенная формулой

$$\varphi_q\left(t,(L,\xi)\right) = \left|X_t\xi\right|, \tag{11}$$

непрерывна, поскольку является суперпозицией двух непрерывных отображений: а) отображения $\boldsymbol{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(q)} \to \boldsymbol{\mathcal{M}} \times E$, определенного формулой $\left(t,(L,\xi)\right) \mapsto (t,\xi)(t$, и непрерывного, поскольку оно есть сужение непрерывного отображения — проекции произведения $\boldsymbol{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(q)} \times E$ на произведение первого и третьего сомножителей, т. е. на $\boldsymbol{\mathcal{M}} \times E$; б) сужения на $\boldsymbol{\mathcal{M}} \times E$ отображения $M \times E \to \overline{\mathbf{R}}$, определенного формулой $(t,\xi) \to \left|X_t\xi\right|$ и непрерывного согласно основным условиям.

3) К функции $\varphi_q : \boldsymbol{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(q)} \to \mathbf{R}^+$ применим предложение из § 3. Для этого положим

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(q)},\ \boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(q)},\ \pi = 1_{\boldsymbol{\mathcal{M}}} \times \pi^{(q)} \tag{12}$$

Поскольку ($\mathcal{E}^{(q)}, \pi^{(q)}, \mathfrak{B}^{(q)}$) — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем S^{q-1}, то и ($\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B}$) — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем S^{q-1}. Из формулы (12) вытекает, что

$$\pi^{-1}(t,L) = \left\{\left(t,(L,\xi)\right)\right\}_{\xi \in S(L)}. \tag{13}$$

для всяких $t \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$, $L \in \mathfrak{B}^{(q)}$; здесь $S(L)$ — единичная сфера в пространстве $L \in \mathfrak{B}^{(q)}$ — напомним, что в пространстве $L \in \mathcal{B}^{(q)}$ имеется скалярное произведение, так как это пространство содержится в слое метризованного векторного расслоения ($\left((E,p,B),\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle\right)$).

Функция $\varphi_a : \boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(q)} \to \mathbf{R}^+$ непрерывна — это доказано в пункте 2). Поэтому согласно предложению из §3 функция $\psi_q(\cdot) : \boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathfrak{B} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная равенством

$$\varphi_q(\cdot) = \sup_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\cdot)} \varphi_q(\mathfrak{z}), \tag{14}$$

непрерывна, причем точная верхняя грань в (14) достигается, т. е.

$$\psi_q(\cdot) = \max_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\cdot)} \varphi_q(\mathfrak{z}). \tag{15}$$

Поэтому раз $\varphi_q(\cdot)$ есть функция $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to \mathbf{R}^+$, то $\psi_q(\cdot)$ — функция $\mathfrak{B} \to \mathbf{R}^+$. Из (13), (15) следует, что

$$\psi_q(t,L) = \max_{\xi \in S(L)} \varphi_q\left(t,(L,\xi)\right) \tag{16}$$

для всяких $t \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$, $L \in \mathfrak{B}^{(q)}$. Подставив в (16) формулу (11), получаем:

$$\psi_q(t,L) = \max_{\xi \in S(L)} \varphi\left|X_t\xi\right| = \left\|X_t\big|_L\right\|.$$

Итак, в этом пункте доказано, что формула

$$\psi_q(t,L) = \left\|X_t\big|_L\right\| \tag{17}$$

определяет непрерывную функцию $\psi_q(\cdot) : \boldsymbol{\mathcal{M}} \times \mathfrak{B}^{(q)} \to \mathbf{R}^+$. Согласно обозначению п. 1) $\mathfrak{B}^{(q)} = E^{(q)}$.

4) Обозначим через $\mathcal{L} : \mathbf{R}^+_* \times \mathbf{R}^+ \to \overline{\mathbf{R}}$ непрерывное отображение, определенное формулой

$$\mathcal{L}(t,u) = \frac{1}{t}\ln u, \tag{18}$$

где $t \in \mathbf{R}^+_*$, $u \in \mathbf{R}^+$; через $\mathbf{R}^+$ мы обозначаем множество всех неотрицательных действительных чисел, а звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля; поясним, что $\mathcal{L}(t,0)=-\infty$ при всяком $t\in\mathbf{R}_*^+$.

5) Из формул (17), (18) следует, что

$$\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_{\mathfrak{f}^{(q)}\mathfrak{L}}\right\|=\mathcal{L}\left(t,\psi_q\left(t,\mathfrak{f}^{(q)}\mathfrak{L}\right)\right)$$

для всяких $t\in\mathcal{M}$, $\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}^{(q)}$. Сравнив это с формулой (10), получаем, что

$$a_q\left(\mathfrak{M};(t,\mathfrak{L})\right)=\mathcal{L}\left(t,\psi_q\left(t,\mathfrak{f}^{(q)}\mathfrak{L}\right)\right) \tag{19}$$

для всяких $t\in\mathcal{M}$, $\mathfrak{L}\in\mathfrak{E}^{(q)}$.

6) Отображение $\mathfrak{f}^{(q)}:\mathfrak{E}^{(q)}\to E^{(q)}$, как отмечено в конце § 3, непрерывно. Непрерывно и отображение $\psi_q(\cdot):\mathcal{M}\times\mathfrak{B}^{(q)}\to\mathbf{R}^+$ — это доказано в п. 3). Функция $\mathcal{L}:\mathbf{R}_*^+\times\mathbf{R}^+\to\overline{\mathbf{R}}$, как отмечено в п. 4), также непрерывна. А так как $\mathcal{M}\subset\mathbf{R}_*^+$, то в силу трех предыдущих фраз из формулы (19) вытекает непрерывность отображения $a_q(\mathfrak{M},\cdot):\mathcal{M}\times\mathfrak{E}^{(q)}\to\overline{\mathbf{R}}$. Лемма доказана.

Напомним обозначения: $\mathcal{M}_m=\mathcal{M}\cap[m,+\infty)$ для всякого $m\in\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{m,s}=\mathcal{M}\cap[m,s]$ для всяких $m\in\mathcal{M}$, $s\in\mathcal{M}_m$.

Л е м м а 8. *Пусть выполнены основные условия. Тогда для всяких* $q\in\{1,\dots,n\}$, $m\in\mathcal{M}$, $s\in\mathcal{M}_m$ *функция*

$$\sup_{t\in\mathcal{M}_{m,s}}a_q\left(\mathfrak{M};(t,\cdot)\right):\mathfrak{E}^{(q)}\to\overline{\mathbf{R}}$$

непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $q\in\{1,\dots,n\}$, $m\in\mathcal{M}$, $s\in\mathcal{M}_m$. В силу леммы 7 функция $a_q(\mathfrak{M},\cdot):\mathcal{M}\times\mathfrak{E}^{(q)}\to\overline{\mathbf{R}}$ непрерывна.

Множество $\mathcal{M}_{m,s}$ компактно. В самом деле, $\mathcal{M}_{m,s}=\mathcal{M}\cap[m,s]=M\cap[m,s]$; первое равенство — определение множества $\mathcal{M}_{m,s}$, второе — следует из определения множества $\mathcal{M}:\mathcal{M}\cap\mathbf{R}_*^+$ и включения $[m,s]\subset\mathbf{R}_*^+$. Но $\boldsymbol{M}$ в силу основных условий замкнуто в $\mathbf{R}$, следовательно, $\mathcal{M}_{m,s}=M\cap[m,s]\,s]$ замкнуто в $[m,s]$ и потому компактно.

Положим

$$\mathcal{E}=\mathcal{M}_{m,s}\times\mathfrak{E}^{(q)},\ \mathfrak{B}=\mathfrak{E}^{(q)}$$

и обозначим через π проекцию произведения $\mathcal{M}_{m,s}\times\mathfrak{E}^{(q)}$ на второй сомножитель. Тройка ($\mathcal{E},\pi,\mathcal{B}$) — тривиальное расслоение с компактным стандартным слоем $\mathcal{M}_{m,s}$.

Определим функцию $\varphi(\cdot):\mathcal{E}\to\overline{\mathbf{R}}$ как сужение на $\mathcal{E}$ функции $a_q(\mathfrak{M},\cdot):\mathcal{M}\times\mathfrak{E}^{(q)}\to\overline{\mathbf{R}}$ и применим к ней предложение из § 3. Получаем, что функция

$$\sup_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\cdot)}\varphi(\mathfrak{z})=\sup_{t\in\mathcal{M}_{m,s}}a_q\left(\mathfrak{M};(t,\cdot)\right):\mathfrak{B}=\mathfrak{E}^{(q)}\to\overline{\mathbf{R}}$$

непрерывна. Лемма доказана.

Л е м м а 9. *Пусть выполнены основные условия. Тогда для всяких* $q\in\{1,\dots,n\}$, $m\in\mathcal{M}$, $s\in\mathcal{M}_m$ *отображение* $\mathfrak{B}\to\overline{\mathbf{R}}$, *определенное формулой*

$$\mathfrak{h}\mapsto\inf_{L\in\mathfrak{E}_{\mathfrak{h}}^{(q)}}\sup_{t\in\mathcal{M}_{m,s}}\frac{1}{t}\ln\left\|X_t\big|_{\mathfrak{f}^{(q)}\mathfrak{L}}\right\|,$$

непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $q\in\{1,\dots,n\}$, $m\in\mathcal{M}$, $s\in\mathcal{M}_m$. Положим

$$\mathcal{E}=\mathfrak{E}^{(q)},\ \pi=\mathfrak{p}^{(q)},\ \mathcal{B}=\mathfrak{B}.$$

Тройка $(\mathcal{E}, \pi, \mathfrak{B})$ является, как отмечено в § 3, локально тривиальным расслоением; напомним, что $\mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}^{(q)}$ — слой этого расслоения над точкой $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$. Обозначим через $\varphi(\cdot): \mathcal{E} \to \overline{\mathbf{R}}$ функцию, фигурирующую в лемме 8, взятую со знаком минус; эта функция непрерывна в силу леммы 8. Согласно предложению из § 3 функция $\mathcal{B} = \mathfrak{B} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой

$$\mathfrak{b} \mapsto \sup_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\mathfrak{b})} \varphi(\mathfrak{z}) = -\inf_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\mathfrak{b})} \left(-\varphi(\mathfrak{z})\right) = -\inf_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}^{(q)}} \sup_{t \in \mathcal{M}_{m,s}} a_q\left(\mathfrak{M}; (t, \mathfrak{L})\right) \underset{(10)}{=} -\inf_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}^{(q)}} \sup_{t \in \mathcal{M}_{m,s}} \frac{1}{t} \ln \left\| X_t \big|_{\mathfrak{f}^{(q)} \mathfrak{L}} \right\|,$$

непрерывна. Поскольку эта функция отличается от функции, непрерывность которой надо доказать, множителем —1, то лемма доказана.

§ 5. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. В силу первого равенства леммы 6 при всяком $k \in \{1, ..., n\}$ функция $\mathfrak{B} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой $\mathfrak{b} \mapsto \lambda_k^{**}(\mathfrak{M}, \mathfrak{f}\mathfrak{b})$, является повторным пределом двойной последовательности функций $\mathfrak{B} \to \overline{\mathbf{R}}$, непрерывных в силу леммы 9. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу второго равенства леммы 6 при всяком $k \in \{1, ..., n\}$ функция $\mathfrak{B} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой $\mathfrak{b} \mapsto \lambda_k^{**}(\mathfrak{M}, \mathfrak{f}\mathfrak{b})$, является точной нижней гранью счетного множества пределов последовательностей функций $\mathfrak{B} \to \overline{\mathbf{R}}$, непрерывных в силу леммы 9. В силу теоремы Бэра множество точек непрерывности каждого из этих пределов, т. е. каждой из этих функций первого класса Бэра на метризуемом и полном в некоторой метрике топологическом пространстве $\mathfrak{B}$, есть всюду плотное множество типа G_δ в $\mathfrak{B}$. Согласно другой теореме Бэра пересечение счетного множества всюду плотных множеств типа G_δ в метризуемом и полном в некоторой метрике топологическом пространстве $\mathfrak{B}$ является также всюду плотным множеством типа G_δ в этом пространстве.

Итак, найдется всюду плотное множество типа G_δ в $\mathfrak{B}$, во всякой точке которого при всяком $k \in \{1, ..., n\}$ непрерывна каждая из функций, точной нижней гранью совокупности которых является функция $\mathfrak{B} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой $\mathfrak{b} \mapsto \lambda_k^{**}(\mathfrak{M}, \mathfrak{f}\mathfrak{b})$. Известно (см., например, [8, с. 237—238]; это утверждение легко доказывается), что точная нижняя грань множества функций, непрерывных в некоторой точке, полунепрерывна сверху в этой точке. Из двух последних фраз следует, что в множестве точек полунепрерывности сверху всех n функций $\mathfrak{B} \to \overline{\mathbf{R}}$, определенных формулами $\mathfrak{b} \mapsto \lambda_k^{**}(\mathfrak{M}, \mathfrak{f}\mathfrak{b})$ ($k \in \{1, ..., n\}$), содержится некоторое множество, всюду плотное и имеющее тип G_δ в пространстве $\mathfrak{B}$. Теорема 3 доказана.

§ 6. Показатели Ляпунова семейств дифференциальных уравнений

Язык, на котором сформулированы теоремы 1—3, а также степень общности этих теорем выбраны с целью охватить спектр разнообразных ситуаций. Не имея возможности обрисовать здесь все эти ситуации, среди которых семейства дифференциальных уравнений на римановых многообразиях, семейства гладких преобразований риманова многообразия и др., остановимся на одной из простейших. Хотя она и не выявляет целесообразность всех черт общей конструкции, фигурирующей в доказанных выше теоремах, но имеет то положительное качество, что в ней теоремы 1—3 формулируются в терминах классического анализа, не теряя при этом своей новизны.

Пусть задана система дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x, t, \mu)$, зависящая от параметра μ. Ее правая часть предполагается заданной на произведении некоторой области G пространства $\mathbf{R}^{n+1}$ ($x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}$) на интервал (μ_1, μ_2) ($\mu \in (\mu_1, \mu_2)$). Требуется, чтобы функции f, f'_x были непрерывны на $G \times (\mu_1, \mu_2)$. Пусть даны число t_0 и непрерывно дифференцируемая функция $\mu \mapsto x_\mu$, отображающая интервал (μ_1, μ_2) в пространство $\mathbf{R}^n$ такие, что $(x_\mu, t_0) \in G$ при всяком $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$. Пусть при всяком $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ решение $x_\mu(\cdot)$ задачи Коши $\dot{x} = f(x, t, \mu)$, $x(t_0) = x_\mu$, существующее и единственное в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши на некоторой окрестности точки t_0, продолжается на полупрямую $[t_0, +\infty)$. Пусть

$$A(t, \mu) = f'_x(x_\mu(t), t, \mu)\left(t \in [t_{0,+\infty}), \mu \in (\mu_1, \mu_2)\right).$$

Обозначим через $\lambda_1(\mu) \geq \ldots \geq \lambda_n(\mu)$ показатели Ляпунова системы[2] $\dot{z} = A(t, \mu) z$. Если коэффициенты этой системы ограничены, то ее показатели Ляпунова определены в [2], [3], [4]. В общем случае пользуемся, изложенными выше, определениями 1—3, применив их в частном случае, описанном в заключительном параграфе работы [12]; эта тройка определений обобщает оригинальное определение А. М. Ляпунова на линейные системы, коэффициенты которых не обязательно ограничены. В последнем параграфе работы [12] предполагается, что $\mathbf{R}^n$ наделено евклидовой структурой, но легко видеть, что показатели Ляпунова решений, а потому и показатели Ляпунова систем, не зависят от выбора этой евклидовой структуры.

При сформулированных в настоящем параграфе условиях имеют место следующие три теоремы.

Теорема 1^*. *Функции $\lambda_k(\cdot) : (\mu_1, \mu_2) \to \overline{\mathbf{R}}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) принадлежат второму классу Бэра.*

Теорема 2^*. *Сужения функций $\lambda_k(\cdot) : (\mu_1, \mu_2) \to \overline{\mathbf{R}}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) на некоторое множество второй категории[3] (в интервале (μ_1, μ_2)) непрерывны.*

Теорема 3^*. В *множестве точек полунепрерывности сверху всех функций $\lambda_k(\cdot) : (\mu_1, \mu_2) \to \overline{\mathbf{R}}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) содержится множество второй категории* (*в интервале* (μ_1, μ_2)).

Доказательство теорем 1^*—3^*. Определим векторное расслоение (E, p, B) формулами: $E = \mathbf{R}^n \times (\mu_1, \mu_2)$, $B = (\mu_1, \mu_2)$, p — проекция произведения $\mathbf{R}^n \times (\mu_1, \mu_2)$ на второй сомножитель. На $\mathbf{R}^n$ задается скалярное произведение $(\cdot\ ,\ \cdot)$. Риманова метрика $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ на векторном расслоении (E, p, B) определяется формулой $\langle \xi, \eta \rangle = (\mathrm{pr}_1 \xi, \mathrm{pr}_1 \eta)$, где pr_i — проекция произведения $\mathbf{R}^n \times (\mu_1, \mu_2)$ на i-й сомножитель.

Положим $M = [t_0, +\infty)$. При всяком $t \in M$ рассмотрим линейное отображение $Z_\mu(t, 0) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, ставящее в соответствие значению всякого решения системы $\dot{z} = A(t, \mu) z$ в точке 0 значение этого же решения в точке t. При всяком $t \in M$ определим эндоморфизм (X_t, χ_t) векторного расслоения (E, p, B) формулами

---

[2] Если f'_μ существует и непрерывна на $G \times (\mu_1, \mu_2)$, то, как известно, $z(\cdot) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial \mu} x_\mu(\cdot)$ существует и является решением системы $\dot{z} = A(t, \mu) z + f'_\mu(x_\mu(t), t, \mu)$, общее решение которой является суммой ее частного решения и общего решения системы $\dot{z} = A(t, \mu) z$.

[3] Так называется всюду плотное множество типа G_δ.

$$X_t\xi = \left(Z_{\mathrm{pr}_2\xi}(t,0)\,\mathrm{pr}_1\xi, \mathrm{pr}_2\xi\right);\ \chi_t = 1_B .$$

Непрерывность отображения $X_t : E \to E$ при всяком $t \in M$ — следствие теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра, примененной сначала к задаче Коши $\dot{x} = f(x,t,\mu)$, $x(t_0) = x_\mu$, а затем — к задаче Коши $\dot{z} = A(t,\mu)z$, $z(t_0) = z_0$ ($z_0 \in \mathbf{R}^n$ не зависит от μ). Более того, из этой теоремы следует непрерывность отображения $M \times E \to E$, определенного формулой $(t,\xi) \mapsto X_t\xi$. Линейность сужений отображений X_t на слои векторного расслоения (E,p,B) — следствие линейности отображений $Z_\mu(t,0): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Определим семейство $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов векторного расслоения (E,p,B) формулой $\mathfrak{M}t = (X_t, \chi_t)$, где $t \in M$.

Наконец, положим $\mathfrak{B} = B(=(\mu_1,\mu_2))$, а в качестве $\mathfrak{f}$ возьмем тождественное отображение интервала (μ_1,μ_2) на себя.

Тогда $\lambda_k(\mu) = \lambda_k^{**}(\mathfrak{M},\mathfrak{f}\mu)$ ($k \in \{1,\ldots,n\}$, $\mu \in (\mu_1,\mu_2) = \mathfrak{B}$), и теоремы 1—3 превращаются в теоремы 1^*—3^*. Теоремы 1^*—3^* доказаны.

Литература

1. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГТТИ, 1949.
2. *Ляпунов А. М.* Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
4. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений//Математический анализ Т. 12. (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ. 1974. С. 71 —146.
5. *Perron O.* Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. Math. Zeitschrift. 1928. Bd. 29. S. 129—160.
6. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
7. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М.; Л.: ГТТИ, 1932.
8. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
9. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.
10. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972.
11. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
12. *Миллионщиков В. М.* Нормальные базисы семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения//Матем. заметки. 1985. Т. 38. Вып. 5. С. 691—708.
13. *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения//Матем. заметки. 1985. Т. 38. Вып. 1. С. 92—109.
14. *Миллионщиков В. М.* Формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения//Матем. заметки. 1986. Т. 38. Вып. 1. С. 29—51.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 29.III.1988