МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 4, № 2 (1968), 173—180

УДК 517.5

КРИТЕРИЙ МАЛОГО ИЗМЕНЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СИСТЕМЫ

В. М. Миллионщиков

Доказывается, что среди систем $\dot{x} = A(t)x$ системы с интегральной разделенностью, и только они, обладают следующим свойством: при малом $\sup\limits_t \|B(t) - A(t)\|$ каждому решению $y(t)$ системы $\dot{y} = B(t)y$ можно сопоставить решение $x(t)$ системы $\dot{x} = A(t)x$ такое, что угол между векторами $x(t)$, $y(t)$ мал при всех t. Библ. 3 назв.

В настоящей работе рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \quad (x \in E^n) \tag{1}$$

($A(t)$ ограничена и непрерывна при $t \geqslant t_0$ или на прямой).

Т Е О Р Е М А. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) *система* (1) *удовлетворяет условию интегральной разделенности, т. е. имеет фундаментальную систему решений* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, *для которых*

$$\frac{\|x_{i+1}(t)\|}{\|x_{i+1}(\tau)\|} : \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(\tau)\|} \geqslant de^{a(t-\tau)} \quad (t \geqslant \tau) \tag{2}$$

при некоторых $a>0$, $d>0$, *и все* $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

2) *для всякого* $\varepsilon>0$, *существует* $\delta>0$ *такое, что если*

$$\sup_t \|B(t) - A(t)\| < \delta,$$

то для всякого решения $y(t)$ *системы*

$$\dot{y} = B(t)y \tag{3}$$

существует решение $x(t)$ *системы (1) такое, что*

$$\sup_t \sphericalangle(x(t), y(t)) < \varepsilon,$$

где $\sphericalangle(x, y)$ — *угол между векторами* x, y *(взятый по абсолютной величине).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть выполнено утверждение 1). Тогда, как доказал Б. Ф. Былов [2], система (1) ляпуновским преобразованием $x = L(t)\xi$ приводится к диагональному виду

$$\xi_i = p_i(t)\xi_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

где

$$p_i(t)=\frac{d}{dt}\ln\|x_i(t)\|,$$

и для всякого $\varepsilon>0$, найдется $\delta>0$ такое, что система (3) при

$$\sup_t\|B(t)-A(t)\|<\delta$$

ляпуновским преобразованием $y=L_B(t)\eta$ приводится к диагональному виду

$$\dot{\eta}_i=q_i(t)\eta_i \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{5}$$

причем

$$\sup_t\|L_B(t)L^{-1}(t)-E\|<\varepsilon, \tag{6}$$

$$\sup_t|q_i(t)-p_i(t)|<\varepsilon, \ (i=1,2,\ldots,n). \tag{7}$$

(Последнее доказано в [3]; здесь уместно пожалеть о том, что Б. Ф. Былов недооценил значение этого утверждения и не поместил его в книге [1].)

В силу процитированных теорем достаточно доказать, что для всякого $\varepsilon>0$, найдется $\delta>0$ такое, что из

$$\sup_t|q_i(t)-p_i(t)|<\delta, \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

вытекает, что для всякого решения $\eta(t)$ системы (5) найдется решение $\xi(t)$ системы (4) такое, что

$$\sup_t \sphericalangle(\xi(t)),\eta(\mathrm{t}))<\varepsilon;$$

напомним, что в силу (2) система (4) удовлетворяет условию интегральной разделенности

$$\int_\tau^t[p_{i+1}(\theta)-p_i(\theta)]d\theta\geqslant c+a(t-\tau) \ (c=\ln d). \tag{9}$$

Мы будем даже считать, что система (4) удовлетворяет более сильному условию

$$p_{i+1}(t)-p_i(t)\geqslant b>0. \tag{10}$$

Этого можно добиться H-преобразованием (см. [1], стр. 250). В качестве $\xi(t)$ возьмем решение системы (4) с тем же начальным условием, что и $\eta(t)$, т. е. $\xi(t_0)=\eta(t_0)$.

Без ограничения общности можно считать, что ни одна координата $\xi(t_0)$ (а значит, и $\xi(t)$) не равна нулю. (Иначе мы рассмотрели бы $\xi(t)$ и $\eta(t)$, как решения подсистем систем (4) и (5).) Проведем теперь доказательство индукцией по n (порядку системы). Для $n=1$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для $n=k$. Докажем его для $n=k+1$. Из его справедливости для $n=k$ вытекает, что

$$\sup_t \sphericalangle(\hat{\xi}(t)),\hat{\eta}(\mathrm{t}))<\varepsilon;$$

если $\delta>0$ в (8) достаточно мало ($\hat{\xi}$ здесь обозначает проекцию вектора ξ на гиперплоскость $\xi_k=0$ параллельно оси $O\xi_k$). Возьмем конусы K_1 и K_2 раствора ε соответственно вокруг гиперплоскости $\xi_k=0$ и оси $O\xi_k$ (см. [1], стр. 481). Решения систем (4) и (5) (при условии (8), где $\delta>0$ достаточно мало) лишь конечное время, причем ограниченное одной константой T для всех решений и всех систем (5) (при условии (8), где $\delta>0$), пребывают вне $K_1\cup K_2$. (Это вытекает из (10), см. [1], лемма 15.2.2; мы здесь применили ее при возрастающем t и при убывающем t.)

Когда $\xi(t)$ и $\eta(t)\left[\xi(t_0)=\eta(t_0)\right]$ находятся в конусе K_2, угол между ними, очевидно, мал (меньше угла при вершине конуса), а когда они находятся в конусе K_1 угол между ними мал в силу индуктивного предположения и малости раствора конуса K_1. Остается случай $\xi(t)\in K_1\bigcup K_2$, а $\eta(t)\,\overline{\in}\, K_1\bigcup K_2$, но если теперь еще уменьшить δ в (8), то этот случай может реализоваться также лишь на отрезке времени, длина которого ограничена одним числом T, не зависящим от выбора решений и от системы (5) (при условии (8)).

Если теперь взять $\delta>0$ столь малым, чтобы решения $\xi(t),\eta(t)$, угол между которыми при некотором $t=t_1$ меньше раствора конусов K_1 и K_2 удовлетворяли и при $t_1\leqslant t\leqslant t_1+2T$ неравенству $\sphericalangle(\xi(t),\eta(t))<\varepsilon$ (это возможно в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных и линейности систем (4) и (5)), то мы получаем то, что требовалось доказать.

2. Пусть выполнено утверждение 2). Пусть $\lambda_1>\lambda_2>...>\lambda_n$ — характеристические показатели системы (1). Рассмотрим линейное подпространство L, состоящее из всех тех x, для которых решение $x(t)$ системы (1), равное x, при $t=0$, имеет характеристический показатель $\leqslant\lambda_2$;

зафиксируем M — произвольное алгебраическое дополнение к L; имеем $E^n=L+M$. Мы примем для дальнейшего следующие обозначения:

а) $F(\tau)$ — множество тех $x\in E^n$, которые могут быть представлены в виде $x=x(\tau)$, где $x(t)$ — решение системы (1) такое, что $x(0)\in F$; б) $\sphericalangle(F,G)$ — угол между множествами F и G т. е. $\inf\limits_{x\in F,\Im\in G}\sphericalangle(x,y)$.

А. Докажем, что

$$\inf_t\sphericalangle(L(t),M(t))\geqslant\alpha_0>0. \qquad (11)$$

Если это не так, то для всякого $\delta>0$ найдется $t=t_\delta$ и решения $x_1(t)\in L(t)$ и $x_2(t)\in M(t)$ системы (1) такие, что

$$\alpha=\sphericalangle(x_1(t_\delta),x_2(t_\delta))<\delta. \qquad (12)$$

Рассмотрим систему (3) с

$$B(t)=U_\delta(t)A(t)U_\delta^{-1}(t)+\dot{U}_\delta(t)U_\delta^{-1}(t), \qquad (13)$$

где $U_\delta(t)$ — матрица, задающая преобразование $y=U_\delta(t)x$, являющееся поворотом в плоскости векторов $x_1(t_\delta),x_2(t_\delta)$ на угол (в направлении от $x_2(t_\delta)$ к $x_1(t_\delta)$).

$$\begin{cases} 0 & при\ t\leqslant t_\delta-1, \\ 2\alpha(t-t_\delta+1) & при\ t_\delta-1<t\leqslant t_\delta, \\ 0 & при\ t>t_\delta \end{cases}$$

и являющееся единичным на ортогональном дополнении к этой плоскости. (Правда $B(\overline{t})$ — лишь кусочно непрерывна, но в силу леммы Д. М. Гробмана ([1], теорема 29.2.1) мы можем считать ее непрерывной.) Легко проверить, что

$$\sup_t\left\|B(t)-A(t)\right\|<2\delta(\sup_t\left\|A(t)\right\|+1) \qquad (14)$$

и что так определенная система (3) имеет решение

$$y_\delta(t) = \begin{cases} x_2(t) & при\ t \leqslant t_\delta - 1, \\ U_\delta(t)x_2(t) & при\ t_\delta - 1 < t \leqslant t_\delta, \\ \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) & при\ t > t_{\delta,} \end{cases} \tag{15}$$

причем $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$ (т. е. $y(t)$ и $x_2(t)$ лежат при $t > t_\delta$ в плоскости векторов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ по разные стороны от прямой, натянутой на вектор $x_1(t)$). Так как $x_2(t) \in M(t)$, то по некоторой последовательности $t_m \to +\infty$

$$\frac{\|x_2(t_m)\|}{x(t_m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

для любого $x(t) \in L(t)$, а потому (в силу (15))

$$\sphericalangle(y_\delta(t_m), -x_2(t_m)) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т. е. $\sphericalangle(y_\delta(t_m),\ \ x_2(t_m)) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \pi$, между тем как

$$\sphericalangle(x(t_m), x_2(t_m)) \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

для всякого решения (системы (1)) $x(t) \Subset L(t)$. То есть никакое решение системы (1), близкое при $t = 0$ к $y_\delta(t)$, не сохраняет с ним малый угол. Мы получили противоречие с утверждением 2), что и доказывает (11).

Б. В силу (11) по теореме Б. Ф. Былова (см. [1], теорема 20.3.1) система (1) ляпуновским преобразованием $x = L(t)z$ приводится к блочно-треугольному виду

$$\dot{z}_i = C_i(t)z_i \ \ (i = 1,2); \tag{16}$$

z_i — векторы размерности $k_i(k_i = 1)$, а $C_i(t)$ — треугольные матрицы, причем все решения системы

$$\dot{z}_i = C_i(t)z_i \tag{17}$$

при $i = 1$ имеют один и тот же характеристический показатель λ_1, а при $i = 2$ имеют показатели $< \lambda_1$. Пусть $Z_1(t)$ – некоторая фундаментальная матрица системы (17).

Докажем, что найдутся константы $d > 0$, a>0. такие, что

$$\left\|Z_1(t)Z_1^{-1}(\tau)\right\| \underset{t\geqslant\tau}{\geqslant} de^{\alpha(t-\tau)}\left\|Z_2(t)Z_2^{-1}(\tau)\right\|. \tag{18}$$

Пусть (18) не выполнено ни для каких $d > 0$, $a > 0$.
Тогда возмутим систему (16), прибавив к $C_2(t)$ матрицу δE_2 (E_2 — единичная матрица; $0 < \delta < \min\limits_{\lambda_i \neq \lambda_j} \left|\lambda_i - \lambda_j\right|$).

Пусть $Z_{2,\delta(t)}$ — некоторая фундаментальная матрица системы

$$\dot{z}_2 = \left[C_2(t) + \delta E_2\right] z_{2.} \tag{19}$$

Тогда для нее выполнено: существует $d = d(\delta) > 0$ такое, что для всякого T>0 найдутся $t', \tau'(t' - \tau' \geqslant T)$ такие, что

$$\left\|Z_{2,\delta}(t')Z_{2\ ,\delta}^{-1}(\tau')\right\| \geqslant de^{\frac{\delta}{2}(t'-\tau')}\left\|Z_1(t')Z_1^{-1}(\tau')\right\|. \tag{20}$$

Зафиксируем δ в (19). Из (20) следует, что для всякого T>0 найдутся $z_{1.T}(t)$ — решение системы (17) и $z_{2.T.\delta}(t)$ — решение системы (19) и $t', \tau'(t' - \tau' \geqslant T)$, для которых

$$\frac{\|z_{2.T.\delta}(t')\|}{\|z_{2.T.\delta}(\tau')\|} \geqslant de^{\frac{\delta}{2}(t'-\tau')} \frac{\|z_{1.T}(t')\|}{\|z_{1.T}(\tau')\|}. \tag{21}$$

Выберем T_0 так, чтобы

$$e^{\frac{\delta}{2}T_0} \sin^2 \frac{\delta}{2} \geqslant 1, \qquad T_0>1. \tag{22}$$

Возмутим систему

$$\dot{z}_i = D_i(t) z_i \ \ (i=1,2), \tag{23}$$

где

$$D_i(t) = \begin{cases} C_i(t) & при \ i=1 \ и \ при \ i=2, \\ C_i(t)+\delta E_i & при \ i=1 \ t>t' \ и \ при \ i=2, \\ & t \in [\tau', t'] \end{cases} \tag{24}$$

(эту систему мы будем обозначать также

$$\dot{z}_i = D_\delta(t) z) \tag{25}$$

следующим образом. В качестве возмущенной системы возьмем систему

$$\dot{u} = F_\delta(t) u, \tag{26}$$

где

$$F_\delta(t) = U_\delta(t) D_\delta(t) U_\delta^{-1}(t) + \dot{U}_\delta(t) U_\delta^{-1}(t), \tag{27}$$

причем $U_\delta(t)$ — матрица, задающая преобразование $u = U_\delta(t) z$, являющееся

1) единичным при $t < \tau'-1, \tau' < t < t'-1, t>t'$,
2) поворотом в плоскости векторов

$$\{z_1, T_0(\tau'), 0\}, \quad \{0, z_2, T_0, \delta(\tau')\}$$

на угол $\delta(t-\tau'+1)$ (в направлении от первого ко второму), и единичным на ортогональном дополнении к этой плоскости — при $\tau'-1 \leqslant t \leqslant \tau'$,

3) поворотом в плоскости векторов

$$\{z_1, T_0(t'), 0\}, \{0, z_2, T_0, \delta(t')\} \tag{28}$$

на угол $\delta(t-t'+1)$ (в направлении от первого ко второму) и единичным на ортогональном дополнении к этой плоскости при $t'-1 \leqslant t \leqslant t'$. Легко проверить, что в силу (21), (22) решение $u_\delta(t)$ системы (26)—(27), равное при $t=0 \{z_1, T_0(0), 0\}$, при $t=t'$ лежит в плоскости векторов (28), причем $u_\delta(t)$ и 1-й из этих векторов лежат по разные стороны от прямой, натянутой на 2-й из этих векторов. Теперь точно тем же рассуждением, как в конце пункта А, приходим к противоречию.

В. Мы избавимся теперь от предположения, что все показатели различны, для чего нам придется рассуждать несколько тоньше.

а) Пусть $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ — нормальный базис решений системы (1); характеристический показатель решения $x_i(t)$ равен $\lambda_i; \lambda_1 = \ldots = \lambda_k > \lambda_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ (считаем, что $k \geqslant 2$; в противном случае рассуждениями пп. А и Б сводим к системе $(n-1)$-го порядка).

Существует последовательность $\{t_m\}$ такая, что при $i \leqslant k, j>k$

$$\frac{\|x_i(t_m)\|}{x_j(t_m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty \tag{29}$$

Легко видеть, что существует $i_0 \leqslant k$ и подпоследовательность $\{t_{ms}\}$ такая, что при $i \leqslant k$ (а в силу (29) и при всех $i = 1, 2, \ldots, n$)

$$\frac{\| x_i(t_{ms}) \|}{x_j(t_{ms})} \geqslant \text{const} > 0 \tag{30}$$

будем считать без ограничения общности $i_0 = 1$).

б) Из (30) следует, что решение $x(t)$, образующее при $t = 0$ достаточно малый угол с решением $x_1(t)$ (соответственно с - $x_1(t)$), при всех $t = t_{m_s}$ будет составлять с $x_1(t)$ (соответственно с $-x_1(t)$) малый угол.

в) В силу пункта б) в плоскости векторов $x_1(0), x_2(0)$ либо найдется вектор x_0 такой, что угол решения $x_0(t)$ (равного x_0 при $t = 0$) с решением $x_1(t) \underset{t=\tau_k}{\longrightarrow} 0$ и $\underset{t=\theta_s}{\longrightarrow} \pi$, либо найдется вектор x_0 (дедекиндово сечение) такой, что решение $x_0(t)$ (равное x_0 при $t = 0$) образует с $x_1(t)$ угол $\alpha(t)$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha(t) \leqslant \alpha_1 < \pi$.

г) В первом случае возмутим систему (1) так, чтобы решение $y_1(t)$ возмущенной системы (равное $x_1(0)$ при $t = 0$) при $t = \tau_k$ (k — некоторый индекс) лежало бы в плоскости векторов $x_1(t), x_0(t)$, причем чтобы векторы $y_1(\tau_k)$ и $x_1(\tau_k)$ лежали по разные стороны от прямой, натянутой на вектор $x_0(\tau_k)$. (Это возмущение строится так же, как в пункте *А*; оно отлично от нуля лишь при $\tau_k - 1 \leqslant t \leqslant \tau_k$.) Затем при $\theta_s - 1 < t \leqslant \theta_s$ (для некоторого $\theta_s > \tau_k + 1$) возмутим (опять как в пункте А) систему (1) так, чтобы решение $y_2(t)$ возмущенной системы (равное $x_1(0)$ при $t = 0$ и, значит, равное $y_1(\tau_k)$ при $t = \tau_k$) при $t = \theta_s$ было бы коллинеарно — $x_1(\theta_s)$.

Построенное таким образом возмущение мало, если τ_k и θ_s достаточно велики, однако решение $y_2(t)$ возмущенной системы в силу пункта б) не сохраняет малый угол ни с одним решением невозмущенной системы.

Во втором случае приходим к противоречию, рассуждая точно так же, как в пункте *Б* (только все возмущения делаем «в плоскости $x_1(t), x_2(t)$»).

Теорема доказана.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 25.XII.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова, М., 1966.

[2] Былов Б. Ф., О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду, Матем. сб., 67, № 3 (1965), 338—344.

[3] Былов Б. Ф., Почти приводимые системы, Докторская диссертация, Минск, 1966.