УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

ТИПИЧНОЕ СВОЙСТВО ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ

Доказана типичность полунепрерывности сверху показателей Ляпунова различных классов линейных систем дифференциальных уравнений. Показатели Ляпунова рассматриваются как функции от линейной системы, имеющей те или иные интегральные инварианты, т. е. удовлетворяющей тем или иным законам сохранения. Полунепрерывность сверху показателей Ляпунова влечет за собой сохранение экспоненциальной устойчивости (условной экспоненциальной устойчивости) при малых возмущениях системы.

Статья посвящена исследованию качественной теории дифференциальных уравнений [1], точнее теории показателей Ляпунова [2—4]. Мы занимаемся типичными свойствами показателей Ляпунова. Свойство точки топологического пространства называется типичным, если этим свойством обладает всюду плотное множество точек, являющееся пересечением счетной совокупности открытых множеств. Это понятие типичности введено и изучено Р. Бэром [5] (см. также [6—7]). Первое применение этого понятия (и вообще теории Бэра) в динамике дано А. Пуанкаре [8]; теорема Пуанкаре о возвращении изложена также в [1, 7]. Среди линейных систем дифференциальных уравнений, которые будут нас интересовать в этой статье, значительное место занимают гамильтоновы системы [9] и вообще системы с заданным множеством интегральных инвариантов [9, 10].

В работе [11] доказана теорема о типичности полунепрерывности сверху показателей Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений. Показатели Ляпунова рассматриваются при этом как функции от системы. Здесь приведена серия весьма широких пространств линейных систем дифференциальных уравнений. В приложениях же, да и в ряде теоретических рассмотрений приходится рассматривать также и существенно менее широкие классы линейных систем дифференциальных уравнений. Нас интересуют, например, системы, сохраняющие меру. Их не так много среди всех линейных систем. В естественном смысле свойство линейной системы сохранять меру является гораздо более редким, чем свойство точки плоскости принадлежать заранее фиксированной прямой. Поэтому из теоремы о типичности того или иного свойства линейной системы дифференциальных уравнений нельзя сделать вывод о типичности этого свойства в пространстве линейных систем дифференциальных уравнений, сохраняющих меру, т. е. таких, у которых (формула Лиувилля — Остроградского) след матрицы коэффициентов тождественно равен нулю.

По той же причине из теоремы о типичности какого-либо свойства общей линейной системы нельзя сделать вывод о типичности этого свойства для линейного дифференциального уравнения порядка выше первого. Ведь множество соответствующих систем первого порядка является весьма «тощим» множеством в пространстве всех линейных систем той же размерности первого порядка. Варьируя коэффициенты уравнения, мы изменяем лишь последнюю строку матрицы коэффициентов системы, другие ее коэффициенты остаются неизменными. Поэтому множество систем, соответствующих уравнениям n-го порядка с переменными коэффициентами, при $n>1$ имеет бесконечную коразмерность в пространстве n-мерных систем первого порядка.

Перечень подобных ситуаций можно значительно расширить. Таковы, например, гамильтоновы системы. Напомним, что линейная система $\dot{u}=A(t)u$ называется гамильтоновой, если ее оператор Коши сохраняет симплектическую структуру

$\sum_{i=1}^{m} dp^i \wedge dq^i$ (предполагается, что u принадлежит четномерному ($2m$-мерному) пространству, в котором фиксированы координаты $q^1,\ldots, q^m,\ldots, p^1,\ldots, p^m$). Этому определению эквивалентно другое, имеющее то преимущество, что оно выражается непосредственно через коэффициенты системы. Это другое определение состоит в следующем. Система $\dot{u} = A(t)u$ $(u \in R^{2m})$ называется гамильтоновой, если матрица ее коэффициентов имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} B(t) & C(t) \\ G(t) & B^*(t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где B, C, G — $m \times m$-матрицы; B^* — транспонированная к B матрица, причем матрицы C и G — симметрические. Понятно, что матрица коэффициентов всякой системы уравнений в вариациях нелинейной, вообще говоря, гамильтоновой системы:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i},\ \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\ (i \in \{1,\ \ldots,\ m\}), \tag{2}$$

имеет вид (1), где C и G — симметрические матрицы. Из формулы (1) ясно, что гамильтоновы системы образуют весьма «тощее» (бесконечной коразмерности) множество в пространстве линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Ниже мы формулируем и доказываем серию теорем, не вытекающих из теоремы в [11], но выводимых из тех общих теорем в [12], из которых выведена теорема в [11]. В излагаемых далее теоремах рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений с предписанным характером зависимости их коэффициентов от времени. Этот аспект довольно подробно обсужден в [13].

Напомним, что показатели Ляпунова рассматриваемых линейных систем, коэффициенты которых не обязаны быть ограниченными, определены в [13], где имеется три определения. Утверждение об их попарной эквивалентности составляет содержание теоремы, сформулированной в [13] и доказанной в [14].

Прежде чем формулировать теоремы, сделаем еще одно пояснение. Напомним, что такое непрерывное действие группы R на топологическом пространстве D, или, что то же, динамическая система на D. Это определение динамической системы принадлежит А. А. Маркову и положено в основу глав 5, 6 классической книги В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [1]. Непрерывное действие группы R на топологическом пространстве D есть однопараметрическое семейство отображений $f^t : D \to D$ ($t \in R$ — параметр), удовлетворяющее совокупности двух условий: 1) $f^{\Theta} f^{\tau} = f^{\Theta+\tau}$ для всяких $\Theta \in R$, $\tau \in R$; 2) отображение $R \times D \to D$ определенное формулой $(t,\ x) \mapsto f^t x$, непрерывно.

Мы не напоминаем здесь определения классов Бэра, так как уделили этим понятиям, введенным и изученным Р. Бэром [5—7], достаточно внимания в статье [11]. Поясним только, что встречающееся в конце каждой из приводимых далее теорем выражение «функции… в типичной точке полунепрерывны сверху» идентично выражению «свойство точки быть точкой полунепрерывности сверху этих функций типично».

Во всех формулируемых далее теоремах предполагается заданной некоторая динамическая система (непрерывное действие группы R) f^t на полном метрическом пространстве D.

Т е о р е м а 1. Пусть S_n — множество всех непрерывных отображений $(a_1(\cdot),\ \ldots,\ a_n(\cdot)) : D \to R^n$, наделенное топологией равномерной сходимости. Тогда показатели Ляпунова уравнения

$$y^{(n)} + a_1(f^t x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(f^t x) y = 0,$$

рассматриваемые как функции $\lambda_k : S_n \times D \to \overline{R}$ ($k \in \{1, \dots, n\}$), принадлежат второму классу Бэра и в типичной точке полунепрерывны сверху.

Для правильного понимания этой теоремы следует иметь в виду, что показателями Ляпунова уравнения n-го порядка называются показатели Ляпунова системы n уравнений первого порядка, соответствующей этому уравнению.

Т е о р е м а 2. Пусть S_{tr} — множество всех непрерывных отображений $A(\cdot) : D \to \mathrm{End}_{tr}\, E^n$, где — $\mathrm{End}_{tr}\, E^n$ множество всех линейных отображений $E^n \to E^n$, имеющих нулевой след. Наделим множество S_{tr} топологией равномерной сходимости. Тогда показатели Ляпунова системы $\dot{u} = A(f^t x)u$, рассматриваемые как функции $\lambda_k : S_{tr} \times D \to \overline{R}$ ($k \in \{1, \dots, n\}$), принадлежат второму классу Бэра и в типичной точке полунепрерывны сверху.

Т е о р е м а 3. Пусть S^H — множество всех непрерывных отображений $A(\cdot) : D \to \mathrm{End}_H\, E^{2m}$, где — $\mathrm{End}_H\, E^{2m}$ множество всех линейных отображений $E^{2m} \to E^{2m}$, задаваемых в некотором фиксированном базисе матрицами вида

$$\begin{pmatrix} B & C \\ G & -B^* \end{pmatrix},$$

где C и G — симметрические матрицы порядка $m \times m$. Наделим множество S^H топологией равномерной сходимости. Тогда показатели Ляпунова системы $\dot{u} = A(f^t x)u$, рассматриваемые как функции $\lambda_k : S^H \times D \to \overline{R}$ ($k \in \{1, \dots, 2m\}$), принадлежат второму классу Бэра и в типичной точке полунепрерывны сверху.

В следующей теореме множество непрерывных отображений $D \to \mathrm{End}\, E^n$ сужается максимально: рассматриваются его одноточечные подмножества.

Т е о р е м а 4. Пусть $A(\cdot) : D \to \mathrm{End}\, E^n$ — непрерывное отображение.

Тогда показатели Ляпунова системы $\dot{u} = A(f^t x)u$, рассматриваемые как функции $\lambda_k : D \to \overline{R}$ ($k \in \{1, \dots, n\}$), принадлежат второму классу Бэра и в типичной точке полунепрерывны сверху.

Для доказательства сформулированных теорем нам понадобится несколько лемм. Доказательства этих лемм столь просты, что читателю не составит труда провести их самостоятельно.

Напомним, что множество $\mathrm{End}\, E^n$ наделяется структурой нормированного пространства. Нормой линейного отображения служит точная верхняя грань нормы образа нормированного вектора. Впрочем, нам здесь неважно, как определяется норма линейного отображения: ведь множество линейных отображений $E^n \to E^n$ есть n^2-мерное векторное пространство, а в конечномерном векторном пространстве нормы всегда существуют, и все они попарно эквивалентны.

Л е м м а 1. Множество линейных отображений $E^n \to E^n$, задаваемых в фиксированном базисе матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

замкнуто в пространстве $\mathrm{End}\, E^n$.

Л е м м а 2. Множество $\operatorname{End}_{tr} E^n$ всех линейных отображений $E^n \to E^n$, имеющих нулевой след, замкнуто в пространстве $\operatorname{End} E^n$.

Л е м м а 3. Множество $\operatorname{End}_H E^{2m}$ всех линейных отображений, задаваемых в фиксированном базисе матрицами вида

$$\begin{pmatrix} B & C \\ G & -B^* \end{pmatrix},$$

где C и G — симметрические матрицы, замкнуто в пространстве E^{2m}.

Л е м м а 4. Пусть S — множество непрерывных отображений топологического пространства D в метрическое пространство M. Наделим S топологией равномерной сходимости. Пусть F — замкнутое множество в пространстве M. Тогда множество всех непрерывных отображений $D \to F$ замкнуто в пространстве S.

Теперь сформулируем теорему 5. План дальнейшего изложения таков. Теоремы 1 — 4 будут выведены из теоремы 5, а теорему 5 выведем из теорем статьи [12]. Заметим, что это не только план доказательства теорем 1 — 4, но и метод, с помощью которого читатель по своему усмотрению или по мере надобности сможет формулировать и доказывать теоремы из той серии, которой принадлежат теоремы 1 — 4.

Т е о р е м а 5. Пусть T — замкнутое множество в множестве S всех непрерывных отображений $A(\cdot): D \to \operatorname{End} E^n$, наделенном топологией равномерной сходимости. Тогда показатели Ляпунова системы $\dot{u} = A(f^t x)u$, рассматриваемые как функции $\lambda_k : T \times D \to \overline{R}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$), принадлежат второму классу Бэра и в типичной точке полунепрерывны сверху.

Теорема 1 следует из теоремы 5 в силу лемм 1 и 4, теорема 2 — из теоремы 5 в силу лемм 2 и 4, теорема 3 — из теоремы 5 в силу лемм 3 и 4, теорема 4 вытекает из теоремы 5, поскольку одноточечное множество $\{A(\cdot)\}$ в пространстве S замкнуто.

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим тривиальное векторное расслоение (E, p, B), где

$$B = S \times D; \; E = B \times E^n, \tag{3}$$

а p — проекция последнего произведения на его первый сомножитель. При доказательстве теоремы в {11] доказаны следующие два утверждения.

1. Отображение $t \to (X^t, \chi^t)$ прямой R в множество пар отображений $X : E \to E$, $\chi : B \to B$, определенное формулами:

$$\chi^t(A, x) = (A, f^t x), \tag{4}$$

$$X^t((A, x), u) = (\chi^t(A, x), X(t, 0; A, x)u), \tag{5}$$

где $X(\Theta, \tau; A, x)$ — оператор Коши системы $\dot{u} = A(f^t x)u$, является гомоморфизмом (обозначаем его через H) группы R в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B).

2. Отображение $R \times E \to R^+$, определенное формулой $(t, \xi) \to |X^t \xi|$, непрерывно. Здесь $|\eta| = \langle \eta, \eta \rangle^{1/2}$, а риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на векторном расслоении (E, p, B) определена формулой $\langle \eta, \zeta \rangle = (u, v)_{E^n}$ для всяких $\eta = (b, u)$, $\zeta = (b, v)$, где $b \in B$, причем — $(u, v)_{E^n}$ скалярное произведение векторов $u \in E^n$, $v \in E^n$.

Определим тривиальное векторное расслоение (E_T, p_T, B_T) формулами

$$B_T = T \times D, \; E_T = B_T \times E^n, \; p_T = \mathrm{pr}_1, \tag{6}$$

где pr_1 — проекция произведения $B_T \times E^n$ на первый сомножитель. По условию, множество T замкнутое S, а S, согласно лемме 1 [11], метризуемо и полно в некоторой метрике. Следовательно, T тоже метризуемо и полно в некоторой метрике. А так как D — полное метрическое пространство, то и $B_T = T \times D$ метризуемо и полно в некоторой метрике. Так как $T \subset S$, то из (3), (6) следует, что $B_T \subset B$, $E_T \subset E$. Из (4), (5) видно, что при всяком $t \in R$ отображение χ^t (X^t) оставляет неизменным первый элемент пары (тройки), на которую оно действует. Отсюда в силу (6) вытекает, что сужение χ_T^t (X_T^t) отображения χ^t (X^t) на множество B_T (E_T) есть отображение $B_T \to B_T$ ($E_T \to E_T$). Из (6) следует, что $p_T^{-1}(b) = p^{-1}(b)$ для всякого $b \in B_T$. В силу двух последних фраз из утверждений 1, 2 следуют аналогичные утверждения для отображения H_T, определенного формулой $t \mapsto (X_T^t, \chi_T^t)$. Точнее, утверждения 1, 2 останутся верными, если снабдить в них всюду нижним индексом T буквы E, B, X^t, χ^t, p.

Из тех же двух фраз следует, что при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ показатель Ляпунова $\lambda_k(H_T, \cdot): B_T \to \overline{R}$ гомоморфизма H_T является сужением на B_T показателя Ляпунова $\lambda_k(H, \cdot): B \to \overline{R}$; названные показатели Ляпунова определены в [12] формулой (2). В силу теоремы 1 из ![14] для всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B = S \times D$ имеет место равенство $\lambda_k(b) = \lambda_k(H, b)$. Таким образом, для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k : B_T \to \overline{R}$ совпадает с функцией $\lambda_k(H_T, \cdot): B_T \to \overline{R}$. В силу теорем 1, 3 из [12] функции $\lambda_k(H_T, \cdot): B_T \to \overline{R}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) принадлежат второму классу Бэра и в типичной точке полунепрерывны сверху. Следовательно, и совпадающие с ними функции $\lambda_k : T \times D \to \overline{R}$ $(k \in \{1, \ldots, n\}) \times (B_T = T \times D$ в силу (6)) обладают этими свойствами. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949. 550 с.
2. *Ляпунов А. М.* Собр. соч. М.; Л., 1956. Т. 2. 472 с.
3. *Былое Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966. 576 с.
4. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники: (Математический анализ). М., 1974. Т. 12. С. 71—146.
5. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М.; Л., 1932. 136 с.
6. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1937. 304 с.
7. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М., 1974. 160 с.
8. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М., 1972. Т. 2. 1000 с.
9. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.; Л., 1937. 500 с.
10. *Cartan E.* Lecons sur les invariants integraux. Paris, 1922. 210 p.
11. *Миллионщиков В. М.* Типичное свойство показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений. I // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1987. № 5.
12. *Миллионщиков В. М.* Типичное Свойство показателей Ляпунова // Мат. заметки. 1986. Т. 40, вып. 2. С. 203—217.
13. *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1986. № 1. С. 36—40.
14. *Миллионщиков В. М.* Линейные системы дифференциальных уравнений и автоморфизмы векторных расслоений. II // Там же. № 5. С. 23—28.

Резюме

Дифференциалдық теңдеулердің қарастырылып отырған жүйелері үшін Ляпунов көрсеткіштерінің жазықтықтағы жартылай үзіліссіздігінің типтілігі дәлелденген.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила 11 февраля 1987 г.