УДК 517.917

О РЕКУРРЕНТНЫХ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

В настоящей статье улучшаются результаты, опубликованные в [4], и даются их подробные доказательства. Для динамических систем

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

(мы будем считать в дальнейшем, что x принадлежит полному локально выпуклому пространству E; однако читатель может считать, если это ему удобнее, что E — n – мерное евклидово пространство) известна, например, теорема Г. Д. Биркгофа о том, что в каждом компактном инвариантном множестве существует рекуррентная траектория (см. [1], глава V, § 7). Если система (1) устойчива по Ляпунову, то эта траектория почти периодическая (см. [1], глава V, § 8).

Для неавтономных систем

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad (x \in E, t \geqslant t_0) \tag{2}$$

это неверно.

В. В. Немыцкий высказал следующую идею. Если разумным образом «пополнить» множество решений системы (2) некоторыми «предельными режимами», то аналоги теорем Г. Д. Биркгофа будут справедливы и для неавтономных систем (2).

Оказалось, что пополнение множества решений, «предельными режимами» в смысле В. В. Немыцкого (см. [2], стр. 12) не дает такого результата, но желаемый результат все же достигается путем пополнения множества решений системы (2) некоторыми функциями (см. [4]). А именно, вместо множества решений системы (2) мы будем рассматривать множество *обобщенных решений* системы (2), которые мы определяем следующим образом.

Определение 1. Пусть $x_k(t)$ — решения системы (2) $k = 1,2,...)$. Пусть t_k — некоторая числовая последовательность, и пусть последовательность функций $x_k(t_k + t)$ при $k \to \infty$ стремится равномерно на каждом отрезке (при $t \geqslant t_0$) к некоторой функции $x^*(t)$.

Тогда $x^*(t)$ называем *обобщенным* решением системы (2).

В частности, если $t_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$, то $x^*(t)$ называем *предельным* решением системы (2).

Физический смысл предельных решений состоит в следующем. Пусть система (2) описывает некоторую «физическую» систему. При измерении величины x мы ограничены временем, и точность измерений ограничена «снизу», поэтому траекторию предельного решения мы не отличим от траектории обычного решения, если прошло достаточно много времени (система достаточно «старая») (предполагается, что нас не интересует начало отсчета времени на каждом решении — этот смысл и вкладывается в слова «траектория решения»).

Как указанный физический смысл, так и нижеследующие теоремы (а также, в гораздо более значительной степени, позднейшие результаты [5—12]) показывают, что нецелесообразно рассматривать только обычные решения неавтономных систем, не включая в рассмотрение обобщенных решений.

В дальнейшем предположим, что $f(x,t)$ непрерывна на $E \times [t_0, +\infty)$.

Определение 2. Мы называем $x(t)$ рекуррентной функцией, если для всякой окрестности нуля $U \subseteq E$ и всякого $T_1 > 0$ найдется $T > 0$ такое, что для каждых τ и Θ найдется $\xi \in [-T, T]$ такое, что при $-T_1 \leqslant t \leqslant T_1$

$$x(\theta + t) - x(\xi + \tau + t) \in U,$$

Теорема 1. *Пусть существует решение $x_0(t)$ системы (2) такое, что замыкание множества его значений на $[t_0, +\infty)$ — компакт $B \subset E$, и пусть*

$$pf(x_0(t), t)) \leqslant C_p \qquad (t \geqslant t_0) \tag{3}$$

для каждой полунормы $p(x)$ в E. (Константа C_p зависит, конечно, от $p(x)$). Тогда найдется рекуррентное предельное решение системы (2), определенное на всей прямой.

Доказательству предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 найдется предельное решение системы· (2), определенное на всей прямой.*

Доказательство. Пусть n — произвольное натуральное число. Последовательность функций $x_0(t+k)(k \geqslant t_0 + n)$ удовлетворяет на отрезке $[-n, n]$ условиям теоремы Асколи (см. [3], стр. 43):

1) $x_0(t+k)$ принадлежит компакту B;

2) $p(x_0(t+h) - x_0(t)) = p(\int\limits_t^{t+h} f(x_0(\tau), \tau) d\tau \leqslant hC_p$. Поэтому из последовательности функций $x_0(t+k)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом отрезке прямой к некоторой функции $x^*(t)$, которая, согласно определению 1, есть предельное решение системы (2).

Обозначим через $\tilde{E}$ линейное пространство функций, непрерывно отображающих прямую в E, с топологией равномерной сходимости на отрезках.

Лемма 2. *Замыкание в $\tilde{E}$ множества сдвигов предельного решения $x^*(t)$, полученного в лемме 1, есть компакт в $\tilde{E}$.*

Доказательство. Из 1) и 2) (см. лемму 1) следует, что при каждом t $x^*(t) \in B$ и что $x^*(t)$ равномерно непрерывная на прямой функция. Отсюда в силу теоремы Асколи ([3], стр. 43) следует утверждение леммы.

Определение 3. Множество $M \subseteq \tilde{E}$ обобщенных решений системы (2) назовем инвариантным, если из $x(t) \in M$ вытекает $x_h(t) = x(t+h) \in M$ для любого действительного h.

Замечание. Очевидно, замыкание (в $\tilde{E}$) инвариантного множества есть снова инвариантное множество.

Определение 4. Непустое замкнутое инвариантное множество $M \subseteq \tilde{E}$ назовем минимальным, если оно не содержит собственного подмножества с теми же свойствами (т. е. тоже непустого, замкнутого, инвариантного).

Лемма 3. *В сякое инвариантное множество, являющееся компактом в $\tilde{E}$, содержит минимальное множество.*

Доказательство проходит так же, как доказательство теоремы 26 в [1] (стр. 401), с той лишь разницей, что поскольку вес τ пространства $\tilde{E}$ не обязательно счетный, то и обрыв трансфинитной последовательности вложенных множеств F_β происходит на трансфинитном числе мощности τ (а не из второго числового класса).

Лемма 4. *Всякая функция $x(t)$ из компактного минимального множества M рекуррентна.*

Доказательство. Если это не так, то найдется окрестность нуля $U_0 \subseteq \tilde{E}$ такая, что для всякого натурального n найдутся τ_n и Θ_n такие, что для всякого $\xi \in [-n, n]$

$$x(\theta_n + t) - x(\xi + \tau_n + t) \in \tilde{U}_0 \tag{4}$$

Выберем последовательность индексов n_k так, чтобы последовательность функций $x_k(t) = x(\tau_{n_k} + t)$ $(k = 1, 2, ...)$ сходилась в $\tilde{E}$ (к некоторой $x^*(t) \in M$) и чтоб последовательность функций $y_k(t) = x(\theta_{n_k} + t)$ $(k = 1, 2, ...)$ сходилась в $\tilde{E}$ (к некоторой $y^*(t) \in M$). Из (4) имеем

$$y^*(t) - x^*(\xi + t) \in \tilde{U}$$

для всякого действительного ξ. Это означает, что $y^*(t) \in M$ не принадлежит непустому замкнутому инвариантному множеству $\overline{M_1} \subset$, где M_1 — множество сдвигов функции $x^*(t)$ (замыкание берется в пространстве $\tilde{E}$). Это противоречит минимальности M.

Лемма доказана.

Теорема 1 вытекает из лемм 1, 2, 3.

Определение 5. Решение $x_0(t)$ системы (2) назовем *устанавливающимся,* если для всякой окрестности нуля $U \subseteq E$ и всякого $T \leqslant 0$ найдутся окрестность нуля $V \subseteq E$ и $\bar{t}$ такие, что если $t'' \geqslant t' \geqslant \bar{t}$, $x_0(t') - x_0(t'') \in V$, то при всех $t \geqslant T$

$$x_0(t' + t) - x_0(t' + t) \in U.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $x_0(t)$— устанавливающееся решение. Тогда всякое рекуррентное предельное решение является почти периодическим.*

Доказательство. Пусть $x(t) = \lim\limits_{t_R \to +\infty} x_0(t_k + t)$ — рекуррентное предельное решение системы (2), существование которого доказано в теореме 1.

Обозначим через M минимальное множество, содержащее $x(t)$ (т. е. замыкание в $\tilde{E}$ множества сдвигов $x(t)$). Из того, что $x_0(t)$— устанавливающееся решение, предельным переходом получаем следующее.

Для всякой окрестности нуля $U \subseteq E$ и всякого $T \leqslant 0$ найдется окрестность нуля $U \subseteq E$ такая, что для любых Θ', Θ'' из

$$x(\theta') - x(\theta'') \in V \tag{5}$$

следует для всех $t \geqslant T$

$$x(\theta' + t) - x(\theta'' + t) \in U \tag{6}$$

(Далее мы следуем рассуждениям А. А. Маркова [1], стр. 416).

Пусть задана окрестность нуля $U \subseteq E$ и отрезок $[-n, n]$. Обозначим через $\tilde{U}_n$ множество функций из $\tilde{E}$, принимающих на отрезке $[-n, n]$ значения из U. (Совокупность так построенных множеств $\tilde{U}_n$ образует базис окрестностей нуля в $\tilde{E}$).

1) По U и $T = 0$ найдем V такую, что из (5) следует (6).

2) Пользуясь рекуррентностью $x(t)$, найдем относительно плотное множество $\{\tau\}$ такое, что

$$x(t) - x(\tau + t) \in \frac{1}{3}\overline{V}_n \tag{7}$$

при $\tau \in \{\tau\}$.

Докажем, что $\{\tau\}$ есть множество U-почти периодов для $x(t)$, т. е. что для любого t и всякого $\tau \in \{\tau\}$ $x(t) - x(\tau + t) \in U$.

3) Фиксируем любое $\tau \in \{\tau\}$. Из свойства (5), (6) найдем окрестность нуля $W \subseteq E$ такую, что из

$$x(t') - x(t'') \in W \tag{8}$$

вытекает

$$x(t' + \tau) - x(t'' + \tau) \in \frac{1}{3} V . \tag{9}$$

4) Пусть θ — любое действительное число. Из рекуррентности $x(t)$ найдем $t_1 = t_1(\tau) < \theta$ такое, что

$$-x(t) + x(t_1 + t) \in \frac{1}{3} \bar{W}_n \bigcap \tilde{V}_n \tag{10}$$

5) Из (10) по определению W (пункт 3), (8), (9)) имеем

$$x(\tau + t) - x(\tau + t_1 + t) \in \frac{1}{3} \tilde{V}_n . \tag{11}$$

6) Складывая (10), (7), (11), получаем

$$x(t_1 + t) - x(t_1 + \tau + t) \in \tilde{V}_n . \tag{12}$$

7) Из (12) следует

$$x(t_1) - x(t_1 + \tau) \in V . \tag{13}$$

8) Из (13) и определения V (пункт 1)) имеем (поскольку $t_1 < \theta$)

$$x(\theta' + t) - x(\theta'' + t) \in U$$

Теорема доказана.

Заметим, что если система (2) имеет вид (1) и $x_0(t)$ — ее почти периодическое решение, то одно из предельных почти периодических решений, существование которых утверждается в теореме 2, совпадает с $x_0(t)$. Это замечание дает сразу много примеров к теореме 2.

Заметим еще, что возможно обобщение теоремы 1 на случай, когда $f(x_0(t), t)$ не ограничена. Достаточно полно этот случай рассмотрен в [4].

Я глубоко благодарен В. В. Немыцкому за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений, 2-е издание. ГТТИ. М.—Л., 1949.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.

3. Bourbaki N. Topologie générale. Chapitre 10. Espaces fonctionnels. Paris, 1949.

4. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, **161,** № 1, 43—44, 1965.

5. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, **166,** № 1, 34—37, 1966.

6. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, **171,** № 2, 288—291, 1966.

7. Миллионщиков В. М. К спектральной теории неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений. Труды Московского математического общества, **18**, 1968, стр. 146—186.

8. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, **3**, № 12, 2127—2134, 1967.

9. Миллионщиков В. М. Матем. сб., **75**(117), № 1, 154—165, 1968.

10. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, **179,** № 1, 20—23, 1968.

11. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, **179,** № 3, 538—541, 1968.

12. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, **4**, № 3, 391—396, 1968.

Поступила в редакцию
25 марта 1967 г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова