УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

ТИПИЧНОЕ СВОЙСТВО ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доказана типичность полунепрерывности сверху показателей Ляпунова различных классов линейных систем дифференциальных уравнений. Показатели Ляпунова рассматриваются как функции от системы.

Различные классы линейных систем дифференциальных уравнений, а именно: системы с периодическими, почти периодическими, рекуррентными коэффициентами и другие, описываются следующей конструкцией.

Пусть на метрическом пространстве D задана динамическая система (т. е. непрерывное действие группы R) f^t [1]. Обозначим через S множество непрерывных отображений $A(\cdot): D \to \operatorname{End} E^n$, где — $\operatorname{End} E^n$ множество всех линейных отображений n-мерного евклидова пространства E^n в себя. Для всяких $A \in S$, $x \in D$ рассматривается линейная система дифференциальных уравнений:

$$\dot{u} = A(f^t x)u \quad (u \in E^n). \tag{1}$$

О том, как именно получаются из этой конструкции указанные, а также некоторые другие классы систем, написано в работе [2].

Показатели Ляпунова системы (1) определяются для всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, $A \in S$, $x \in D$ формулой

$$\lambda_k(A, x) = \inf_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(E^n)} \sup_{u \in R^{n-k+1}} \lambda(A, x; u), \tag{2}$$

где $G_q(E^n)$ — грассманово многообразиемерных q-векторных подпространств пространства E^n, а $\lambda(A, x; u)$, по определению, равно $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |u(t)|$, где $u(\cdot)$ — решение системы (1), начинающееся в точке u т. е. удовлетворяющее начальному условию $u(0) = u$. При этом $\ln 0 = -\infty$.

Показатели $\lambda(A, x; u)$ и $\lambda_k(A, x)$, вообще говоря, — не числа, а точки расширенной числовой прямой $\overline{R}$ которая получается из действительной прямой $\overline{R}$ присоединением к ней двух несобственных элементов: $-\infty$ и $+\infty$. Отношение линейного порядка, имеющееся на R, продолжается на $\overline{R}$ с помощью аксиомы: $-\infty < r < +\infty$ для всякого $r \in R$. Точные верхняя и нижняя грани в формуле (2) понимаются в смысле так определенного отношения линейного порядка на $\overline{R}$. Топология на $\overline{R}$ вводится следующим образом: открытыми множествами объявляются пустое множество, а также множества $[-\infty, \alpha)$, (β, γ), $(\delta, +\infty]$ (где α, $\beta < \gamma$, δ — всевозможные действительные числа) и всевозможные объединения этих множеств. Вместо того чтобы пояснять, что $u(\cdot)$ — решение системы (1), начинающееся в точке u, можно то же самое записать формулой: $u(\cdot) = X(\cdot, 0; A, x)$, где $X(\theta, \tau; A, x)$ — оператор Коши системы (1), т. е. зависящее от двух параметров (θ и τ) отображение $E^n \to E^n$, которое значению всякого решения системы (1) в точке τ ставит в соответствие значение этого же решения в точке θ.

Сформулированное определение несколько отличается от оригинального определения А. М. Ляпунова. В работе [2] приведены еще два определения, одно из которых весьма близко к определению А. М. Ляпунова [3], а в статье [4] доказана попарная эквивалентность всех трех определений.

Рассмотрим общие свойства показателей $\lambda_k(A, x)$ как функций от (A, x). Пусть нас интересует вопрос: если при некоторых $A \in S$, $x \in D$ нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво, т. е. все ее решения при $t \to +\infty$ стремятся к нулю быстрее некоторой экспоненты $\exp \alpha t$ с $\alpha < 0$, то сохранится ли устойчивость при малых возмущениях A и x. Величина возмущения точки x определяется расстоянием d в метрическом пространстве D, а за величину возмущения отображения A примем $\sup\limits_{x \in D} \| A(x) - B(x) \|$, где B — возмущенное отображение (эта точная верхняя грань бывает и бесконечной). Из примера Перрона [1] известно, что ответ на этот вопрос может оказаться отрицательным. Это связано с тем, что для некоторых динамических систем f^t показатель $\lambda_1(A, x)$ как функция от (A, x) не является всюду полунепрерывным сверху. То же можно сказать про $\lambda_k(A, x)$ и при всяком другом $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Но нам хотелось бы знать, насколько часто встречаются в пространстве $S \times D$ точки, в которых показатели Ляпунова полунепрерывны сверху. Эти точки (A, x) обладают свойством: если при некоторых $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda \in R$ выполнено неравенство $\lambda_k(A, x) < \lambda$, то и при всех $(B, y) \in S \times D$, достаточно близких к (A, x), выполнено неравенство $\lambda_k(B, y) < \lambda$. А отсюда следует, что если у системы (1) имеется $(n-k+1)$-мерное векторное подпространство пространства E^n, в котором начинаются решения, экспоненциально стремящиеся к нулю при $t \to +\infty$, то такое $(n-k+1)$-мерное подпространство имеется и у системы $\dot{u} = B(f^t y)u$ для всякой пары (B, y), достаточно близкой к (A, x). В частности, при $k = 1$ это означает, что экспоненциальная устойчивость системы (1) сохраняется при всех достаточно малых возмущениях пары (A, x).

Существует несколько различных, неэквивалентных друг другу пониманий того, какие свойства выполняются «часто», а какие «редко». Напомним понятие типичности в смысле Р. Бэра. Свойство точки топологического пространства (в нашем случае — произведение $S \times D$, где S наделено топологией равномерной сходимости) называется типичным, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное пересечение счетной совокупности открытых множеств. Эта типичность (в смысле Бэра) обладает рядом замечательных свойств, из которых укажем на следующие. Пусть топологическое пространство метризуемо и полно в некоторой метрике. Тогда два взаимоисключающих свойства не могут быть оба типичными. Если бы в определение типичности не было включено требование о типе G_δ, т. е. о том, что множество должно быть пересечением счетной совокупности открытых множеств, взаимоисключающие свойства могли бы оказаться типичными. Например, на прямой всюду плотно как множество рациональных, так и множество иррациональных точек. Обсуждаемое свойство типичности имеет и более «сильный» вариант: пересечение двух и даже счетного множества типичных свойств есть типичное свойство (по-прежнему предполагаем, что пространство метризуемо и полно в некоторой метрике).

Т е о р е м а. Пусть f^t — непрерывное действие группы R на полном метрическом пространстве D. Пусть S — множество всех непрерывных отображений $D \to \operatorname{End} E^n$, наделенное топологией равномерной сходимости. Тогда показатели Ляпунова системы $\dot{u} = A(f^t x)u$, рассматриваемые как функции $\lambda_k : S \times D \to \overline{R}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$), принадлежат второму классу Бэра и свойство точки пространства $S \times D$ быть точкой полунепрерывности сверху всех этих функций типично.

Поясним сначала, что такое функция второго класса Бэра. Непрерывные функции образуют нулевой класс Бэра. Первый класс Бэра образуют функции, являющиеся пределами всюду сходящихся счетных последовательностей непрерывных функций, т. е.

функций нулевого класса. Функция принадлежит второму классу, если она есть предел некоторой всюду сходящейся счетной последовательности функций первого класса. Согласно теореме Бэра, для всякой функции первого класса на полном метрическом пространстве свойство точки быть точкой непрерывности этой функции типично. Функции второго класса Бэра таким свойством могут не обладать. Но сужение функции второго класса (область ее определения — по-прежнему полное метрическое пространство) на некоторое типичное множество, т. е. на некоторое всюду плотное множество типа G_δ, есть непрерывная функция. Известно, например, что функция Дирихле, равная 0 в иррациональных точках и 1 в рациональных, принадлежит второму классу Бэра. В самом деле, она представима в виде повторного предела двойной счетной последовательности непрерывных функций:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}\cos^s(\pi m!x).$$

Первому классу Бэра эта функция не принадлежит, так как она всюду разрывна.

О типичных свойствах и классах функций Бэра можно прочесть в работах [5—7], где содержатся, в частности, доказательства всех сформулированных теорем Бэра. Использование этих понятий и результатов Бэра в теории дифференциальных уравнений и вообще в динамике началось с теоремы Пуанкаре о возвращении [1, 7, 8]. Сформулированная теорема выводится из общей теоремы подобного рода [9]. Для этого сначала выполняются вспомогательные построения, чтобы «вложить» ситуацию, рассматриваемую здесь, в ситуацию в работе [9].

Лемма 1. Топологическое пространство S, т. е. множество всех непрерывных отображений $D\to \operatorname{End} E^n$, наделенное топологией равномерной сходимости, метризуемо и полно в некоторой метрике.

Доказательство. Определим функцию $\sigma: S\times S\to R^+$ формулой

$$\sigma(A,\ B)=\min\{1,\ \sup_{x\in D}\|A(x)-B(x)\|\} \tag{3}$$

для всяких $A\in S$, $B\in S$. В частном случае, когда D компактно, можно было бы принять за расстояние между точками $A\in S$, $B\in S$ величину $\sup_{x\in D}\|A(x)-B(x)\|$. Но для произвольного D так поступить нельзя, поскольку эта величина может обращаться в бесконечность. Поэтому для исправления этого дефекта приходится брать не саму эту величину, а ее срезку единицей. Легко проверяется, что функция $\sigma: S\times S\to R^+$, определенная таким образом, есть расстояние на S. Действительно, тождества $\sigma(A,\ A)=0$, $\sigma(A,\ B)=\sigma(B,\ A)$ вытекают непосредственно из формулы (3). Если $\sigma(A,\ B)=0$, то из (3) следует равенство $\sup_{x\in D}\|A(x)-B(x)\|=0$, откуда $A=B$. Остается доказать неравенство треугольника

$$\sigma(A,\ B)\leqslant\sigma(A,\ C)+\sigma(C,\ B) \tag{4}$$

для всяких $A,\ B,\ C\in S$.

Для доказательства этого неравенства сделаем сначала одно замечание. Пространство S является объединением множеств, называемых далее компонентами и определяемых следующим образом. Компонентой, содержащей точку $A\in S$, называется множество всех тех $B\in S$, для которых величина $\sup_{x\in D}\|A(x)-B(x)\|$ конечна. Одной из этих компонент — компонентой нуля — является множество всех ограниченных непрерывных отображений $D\to \operatorname{End} E^n$. Каждую компоненту можно метризовать, введя на ней расстояние по формуле

$$\rho(B,\ C)=\sup_{x\in D}\|B(x)-C(x)\| \tag{5}$$

для всяких B, C из одной компоненты, пользуясь тем, что, когда B и C принадлежат одной компоненте, эта величина конечна. Прочие свойства расстояния для этой величины выполнены. Столь же хорошо известна и легко доказывается полнота каждой компоненты в метрике (5). Пусть даны $A \in S$, $B \in S$, $C \in S$. Если хоть одно из чисел $\sigma(A, C)$, $\sigma(C, B)$ равно единице, то неравенство (4) верно, так как в силу (3) имеют место неравенства $\sigma(A, B) \leqslant 1$, $\sigma(A, C) \geqslant 0$, $\sigma(C, B) \geqslant 0$. Если $\sigma(A, C) < 1$, $\sigma(C, B) < 1$, то из определения отображения σ вытекают формулы

$$1 > \sigma(A, C) = \sup_{x \in D} \| A(x) - C(x) \|, \tag{6}$$

$$1 > \sigma(C, B) = \sup_{x \in D} \| C(x) - B(x) \|. \tag{7}$$

Следовательно, A и B принадлежат компоненте, содержащей точку C. Поэтому в силу определенияρправые части равенств в формулах (6), (7) равны, $\rho(A, C)$, $\rho(C, B)$. Так как ρ — расстояние на компоненте, содержащей точку C, то имеет место неравенство треугольника $\rho(A, B) \leqslant \rho(A, C) + \rho(C, B)$, правая часть которого в силу (6), (7) и сказанного ранее равна $\sigma(A, C) + \sigma(C, B)$. Из определения ρ, σ (см. формулы (3), (5)) следует неравенство $\sigma(A, B) \leqslant \rho(A, B)$, поэтому имеет место неравенство (4).

Итак, на множестве S введено расстояние σ. Если точки A и B пространства S таковы, что $\sigma(A, B) < 1$, то обе они содержатся в одной компоненте и $\sigma(A, B) = \rho(A, B)$. Отсюда вытекает, что если последовательность точек пространства S сходится в метрике σ или является последовательностью Коши в этой метрике, то все точки этой последовательности, начиная с некоторого номера, содержатся в одной компоненте и последовательность сходится (соответственно является последовательностью Коши) в метрике ρ, заданной на этой компоненте. С другой стороны, если последовательность точек компоненты пространства S сходится в метрике ρ, заданной на этой компоненте, то она сходится и в метрике $\sigma \leqslant \rho$. Из двух предыдущих фаз и определения ρ следует совпадение топологии, индуцированной на S метрикой σ, с топологией равномерной сходимости. Из тех же двух фраз и полноты каждой компоненты в метрике ρ следует полнота метрического пространства (S, σ). Лемма доказана.

Л е м м а 2. Отображение $(t, A, x, u) \mapsto X(t, 0; A, x)u$, где $X(\theta, \tau; A, x)$ — оператор Коши системы $\dot{u} = A(f^t x)u$, является непрерывным отображением пространства $R \times S \times D \times E^n$ в пространство E^n.

Эта лемма есть не что иное, как результат применения к системе $\dot{u} = A(f^t x)u$ теоремы о непрерывной зависимости решения линейной системы дифференциальных уравнений от коэффициентов системы.

Доказательство теоремы. Положим $B = S \times D$. Так определенное топологическое пространство B метризуемо и полно в некоторой метрике, поскольку пространства S (в силу леммы 1) и D (по условию) таковы. Положим $E = B \times E^n$. Определим отображение $p : E \to B$ как проекцию произведения $B \times E^n$ на первый сомножитель. Тройка (E, p, B), полученная таким образом, является тривиальным векторным расслоением [10]. При всяком $t \in R$ найдем отображения $X^t : E \to E$, $\chi^t : B \to B$ формулами

$$X^t(A, x) = (A, f^t x), \tag{8}$$

$$X^t((A, x), u) = (\chi^t(A, x), X(t, 0; A, x)u), \tag{9}$$

где $A \in S$; $x \in D$; $u \in E^n$.

В силу теоремы [11] отображение $t \mapsto (X^t, \chi^t)$, определенное этими формулами, есть гомоморфизм группы R в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), рассматриваемого как абстрактное векторное расслоение. Чтобы утверждать, что это отображение есть гомоморфизм группы R в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), понимаемого в обычном (топологическом) смысле, достаточно убедиться, что при всяком $t \in R$ отображения $X^t : E \to E$, $\chi^t : B \to B$ непрерывны. Непрерывность отображения χ^t следует из формулы (8), так как, по условию, f^t — непрерывное действие группы R на D. Непрерывность отображения X^t следует из формулы (9) в силу непрерывности отображения $\chi^t : B \to B$ и леммы 2.

Итак, доказано, что формулы (8), (9) задают гомоморфизм H группы R в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B). Формула $(t, \xi) \to X^t \xi$ определяет непрерывное отображение $R \times E \to E$. Это следует из формулы (9) в силу леммы 2 и непрерывности отображения $(t, b) \to \chi^t b$ пространства $R \times B$ в пространство B, вытекающей в силу формулы (8) из того, что f^t, по условию, есть непрерывное действие группы R на пространстве D.

Для всякого $b \in B$ определим отображение $F_b : p^{-1}(b) \to E^n$ формулой $F_b(b, u) = u$. Положим для $\langle \xi, \eta \rangle = (F\xi, F_b \eta)$ всяких, $b \in B$, $\xi \in p^{-1}(b)$, $\eta \in p^{-1}(b)$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве E^n. Легко видеть (впрочем, это доказано в начале статьи [4]), что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на абстрактном векторном расслоении (E, p, B). Из приведенных определений отображений F_b и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ясно, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть непрерывное отображение в прямую множества пар $(\xi, \eta) \in E \times E$, таким, что, $p\xi = p\eta$ рассматриваемого как подпространство топологического пространства $E \times E$. Таким образом, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть риманова метрика на векторном расслоении (E, p, B). Из непрерывности отображений $(t, \xi) \to X^t \xi$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$, установленной выше, следует, в силу теоремы о непрерывности суперпозиции непрерывных функций, что отображение $(t, \xi) \mapsto |X^t \xi|$, где $|\eta| = \langle \eta, \eta \rangle^{1/2}$ для всякого $\eta \in E$, есть непрерывное отображение $R \times E \to R^+$.

Для всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$ показатели Ляпунова гомоморфизма H определяются формулой **)

$$\lambda_k(H, b) = \inf_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in R^{n-k+1}} \lambda(H, \xi),$$

где $G_q(p^{-1}(b))$ — множество всех q-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Согласно теоремам 1, 3 [9], функции $\lambda_k(H, \cdot) : S \times D \to \overline{R}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) принадлежат второму классу Бэра и в типичной точке полунепрерывны сверху. Для завершения доказательства теоремы остается напомнить, что по теореме 1 [4] при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k : S \times D \to \overline{R}$, фигурирующая в формулировке доказываемой теоремы, совпадает с функцией $\lambda_k(H, \cdot) : S \times D \to \overline{R}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949. 550 с.

2. *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1986. № 1. С. 36—40.

3. *Ляпунов А. М.* Собр. соч. М.; Л., 1956. Т. 2. 472 с.

4. *Миллионщиков В. М.* Линейные системы дифференциальных уравнений и автоморфизмы векторных расслоений. II // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1986. № 5. С. 23—28.

**) $\lambda(H, \xi) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X^t \xi|$.

5. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М.; Л., 1932. 136 с.
6. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1937. 304 с.
7. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М., 1974. 160 с.
8. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М., 1972. Т. 2. 1000 с.
9. *Миллионщиков В. М.* Типичное свойство показателей Ляпунова // Мат. заметки. 1986. Т. 40, вып. 2. С. 203—217.
10. *Хьюзмоллер Д.* Расслоение пространства. М., 1970. 444 с.
11. *Миллионщиков В. М.* Линейные системы дифференциальных уравнений и автоморфизмы векторных расслоений. I // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1986. № 3. С. 25—30.

Резюме

Дифференциалдық теңдеулердің сызықтық системаларының әртүрлі кластарында Ляпунов көрсеткіштерінің жоғарыдан жартылай үзіліссіздігінің типтілігі дәлелденген. Ляпуновтың көрсеткіштері мұнда системаның функциясы деп қарастырылады.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила 11 февраля 1987 г.