ი. ვეკუას სახ.- გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები
Труды Института прикладной математики им. И.Н.Векуа
1987, 22

УДК 517.938

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.М.Миллионщиков

Введение

Показатели Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = A(t)u \quad (u \in E^n,\ t \in R^+) \tag{1}$$

($A(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End} E^n$, где $\operatorname{End} E^n$ - множество линейных отображений $E^n \to E^n$) с ограниченными локально суммируемыми коэффициентами определены А.М.Ляпуновым [1] (по теории показателей Ляпунова имеются также книга [2] и обзор [3]): Напомним некоторые рассуждения А.М.Ляпунова. Сначала доказывается, что среди всех фундаментальных систем решений системы (1) существуют *нормальные*, т. е. такие, у которых сумма показателей Ляпунова решений, входящих в фундаментальную систему, наименьшая; при этом *показатель Ляпунова решения* $u(\cdot)$ есть по определению.

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |u(t)|;$$

из ограниченности коэффициентов системы $\dot{u} = A(t)u$ вытекает, вследствие леммы Гронуолла, что показатель Ляпунова всякого ненулевого решения $u(\cdot)$ система $\dot{u} = A(t)u$ есть число (а не символ $-\infty$ или $+\infty$). Затем доказывается, что показатели Ляпунова решений нормальной фундаментальной системы не зависят от выбора нормальной фундаментальной системы. Они и называются *показателями Ляпунова системы* $\dot{u} = A(t)u$. Обычно принимается некоторое соглашение о нумерации показателей Ляпунова системы $\dot{u} = A(t)u$. Мы предпочитаем нумеровать их в порядке невозрастания - главным образом с целью считать первым старший показатель Ляпунова, ведь именно он ответственен за устойчивость нулевого решения системы $\dot{u} = A(t)u$: если он отрицателен, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову (и далее экспоненциально устойчиво), если же он положителен, то нулевое решение неустойчиво по Ляпунову.

Как видно из воспроизведенного выше определения А.М.Ляпунова, зависимость показателей Ляпунова системы $\dot{u} = A(t)u$ от этой системы является довольно сложной. Ведь уже зависимость суммы показателей Ляпунова решений, входящих в ту или иную фундаментальную систему, от этой фундаментальной система не является простой. А для нахождения показателей Ляпунова системы $\dot{u} = A(t)u$ нужно еще найти нормальную фундаментальную систему (такая система неединственна), т. е. найти точку минимума функции довольно сложной природа.

Поясним, в каком смысле в этом контексте понимается слово «сложность». Непрерывные функции в этом контексте мы считаем простыми функциями, или функциями нулевого класса сложности. Пределы всюду сходящихся счетных последовательностей непрерывных функций считаем функциями первого класса сложности. Пределы всюду сходящихся последовательностей функций первого класса сложности считаем функциями второго класса сложности. Эта классификация сложности функций введена и изучена Р.Бэром [4]; см. также книгу Ф.Хаусдорфа [5], где эти вопросы трактуются в более общем виде - когда областью определения рассматриваемых функций является полное метрическое пространство любой природа, в частности, полное метрическое функциональное пространство (потребность в этих более общих рассмотрениях возникает при изучении интересующей нас ситуации). Классический пример Перрона изложенный в книге В.В.Немыцкого и В.В.Степанова [6] на с. 199, показывает, что показатели Ляпунова системы $\dot{u} = A(t)u$ не являются всюду непрерывными функциями системы даже в топологии равномерной на R^+ сходимости коэффициентов. Если снабдить множество линейных систем дифференциальных уравнений компактно-открытой топологией (т. е. топологией равномерной на каждом отрезке из (к сходимости коэффициентов), то разрывность показателей Ляпунова устанавливается тривиально. Непрерывность показателей Ляпунова в компактно-открытой топологии никогда не имеет места — ее нет даже для одномерных систем, т. е. в случае $n=1$. Дня сравнения напомним, что явление, обнаруженное Перроном, т. е. наличие точек разрыва у показателей Ляпунова, рассматриваемых как функции от системы на пространстве систем $\dot{u} = A(t)u$, наделенном топологией равномерной на R^+ сходимости коэффициентов, имеет место только для $n \geqslant 2$ - при $n=1$ единственный показатель Ляпунова непрерывен в этой топологии.

Все более широкие приложения и все более расширяющаяся потребность в новых приложениях теории показателей Ляпунова диктуют необходимость уметь обращаться с этими непростыми функциями. Не отказываясь от упрощений там, где они возможны, следует все же научиться обращаться с показателями Ляпунова, как с функциями от системы в любой ситуации. Более того, приложения (а под их влиянием и теория), побудили ухе расширить ситуацию, обрисованную в начале статьи, полностью отказавшись от ограниченности коэффициентов системы $\dot{u} = A(t)u$ в каком бы то ни было смысле.

В соответствии с этой программой выведем в этой статье формулы для показателей Ляпунова системы $\dot{u} = A(t)u$ с локально суммируемыми коэффициентами. Так как мы не требуем ограниченности коэффициентов системы, то классическое определение А.М.Ляпунова в этой общей ситуации несколько модифицируется.

О п р е д е л е н и я показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений, имеются по крайней мере четыре (попарно эквивалентных, как будет доказано ниже) определения показателей Ляпунова линейной системы $\dot{u} = A(t)u$.

Одно из них (см. ниже определения 4 - 6) - небольшая модификация оригинального определения А.М.Ляпунова, другое (см. ниже определение 3) близко к определению, принятому за основу изложения теории показателей Ляпунова в книге [2]. А начнем мы с тех двух определений, которые оказались наиболее удобными для изучения показателей Ляпунова как функций системы методами теории функций действительного переменного.

Пусть дана система $\dot{u} = A(t)u$ с локально суммируемыми коэффициентами. Обозначим через $X_A(t)$ разрешающий оператор этой системы, т. е. отображение, которое значению всякого решения системы в точке 0 ставит в соответствие значение этого же решения в точке t.

О п р е д е л е н и е 1. Показатель Ляпунова системы $\dot{u} = A(t)u$ определяется при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой

$$\lambda_{n-k+1}(A) = \\ = \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(E^n)} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_A(t)|_{\mathbf{R}^k} \|. \tag{2}$$

Здесь: $G_k(E^n)$ - множество всех k-мерных векторных подпространств n-мерного евклидова пространства E^n; через $Y|_L$ обозначается сужение отображения Y на множество L; норма линейного отображения определяется стандартным образом, т. е. как точная верхняя грань нормы образа нормированного вектора. Показатели Ляпунова являются точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$, т. е. или действительными числами, или символами $-\infty$, $+\infty$. Отношение линейного порядка, имеющееся на $\mathbf{R}$, продолжается до отношения линейного порядка на $\overline{\mathbf{R}}$ известным образом: по определению $-\infty < r < +\infty$ для всякого действительного числа r.

О п р е д е л е н и е 2. Показатель Ляпунова системы $\dot{u} = A(t)u$ определяется для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой:

$$\lambda_k(A) = \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(E^n)} \sup_{u \in \mathbf{R}^{n-k+1}} \lambda(A, u), \tag{3}$$

где

$$\lambda(A, u) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln | X_A(t)\, u | \tag{4}$$

для всякого $u \in E^n$.

Точка $\lambda\,(A, u)$ расширенной числовой прямой, определена формулой (4) (поясним, что $\ln 0 = -\infty$), называется показателем Ляпунова решения $u(\cdot)$ системы $\dot{u} = A(t)u$, начинающегося в точке u. Это решение, в силу определения разрешающего оператора, выражается формулой $u(\cdot) = X_A(\cdot)\, u$.

Для формулировки следующего определения нам понадобится одна лемма. Фигурирующий в ней показатель $\lambda\,(A, u)$ определен для всяких $u \in E^n$ формулой (4).

Л е м м а 1. Для всякого $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ множество

$$E\,(A, \lambda) = \{u \in E^n : \lambda\,(A, u) \leqslant \lambda\} \tag{5}$$

является векторным подпространством в E^n.

Так как $\lambda\,(A, 0) = -\infty$, то нуль пространства E^n содержится в множестве $E\,(A, \lambda)$ при всяком $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$.

Поэтому лемма 1 вытекает из следующей леммы.

Л е м м а 2. Для всяких $u \in E^n$, $v \in E^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ имеет место неравенство

$$\lambda(A,\ \alpha u+\beta v)\leqslant$$
$$\leqslant \max\{\lambda(A,\ u),\ \lambda(A,\ v)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $u\in E^n$, $v\in E^n$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$. Если $\alpha=\beta=0$, то в левой части доказываемого неравенства стоит $-\infty$, и все доказано. Если же хоть одно из чисел α, β отлично от нуля, то $|\alpha|+|\beta|>0$. В этом случае

$$\lambda(A,\ \alpha u+\beta v)=$$
$$=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X_A(t)(\alpha u+\beta v)|=$$
$$=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|\alpha X_A(t)u+\beta X_A(t)v)|\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln(|\alpha|\cdot|X_A(t)u|+|\beta|\cdot|X_A(t)v|)\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\{(|\alpha|+|\beta|)\times$$
$$\times\max\{|X_A(t)u|,\ |X_A(t)v|\}\}\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left\{\frac{1}{t}\ln(|\alpha|+|\beta|)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{t}\ln\max\{|X_A(t)u|,\ |X_A(t)v|\}\right\}=$$
$$=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\max\left\{\frac{1}{t}\ln|X_A(t)u|,\ \frac{1}{t}\ln|X_A(t)v|\right\}=$$
$$=\max\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X_A(t)u|,\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X_A(t)v|\right\}=$$
$$=\max\{\lambda(A,\ u),\ \lambda(A,\ v)\}.$$

Лемма доказана.

В силу леммы 1 формула $\lambda\mapsto E(A,\lambda)$ определяет монотонно неубывающее отображение расширенной числовой прямой в множество векторных подпространств пространства E^n. Такое отображение не может принимать более $n+1$ различных значений.

О п р е д е л е н и е 3. Расположим в порядке возрастания по включению все различные значения отображения $\lambda\mapsto E(A,\lambda)$. Написав первое из них столько раз подряд, какова его размерность, затем каждое следующее - столько раз подряд, какова разность его размерности с размерностью предыдущего, получим цепочку нестрогих включений

$$E_1(A)\subset\ldots\subset E_n(A).$$

Показатель Ляпунова $\lambda_k(A)$ системы $\dot{u}=A(t)u$ определяется для всякого $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ формулой

$$\lambda_k(A)=\sup_{u\in E_{n-k+1}(A)}\lambda(A,\ u). \tag{6}$$

О п р е д е л е н и е 4. Базис $\{u_1,\ \ldots,\ u_n\}$ векторного пространства E^n называется нормальным для системы $\dot{u}=A(t)u$, если для всякого базиса $\{v_1,\ \ldots,\ v_n\}$ пространства E^n, расположенного в порядке невозрастания показателей Ляпунова: $\lambda(A,\ v_1)\geqslant\ldots\geqslant\lambda(A,\ v_n)$, выполнены неравенства $\lambda(A,\ v_i)\geqslant\lambda(A,\ u_i)$ $(i\in\{1,\ \ldots,\ n\})$.

О п р е д е л е н и е 5. Базис $\{u_1, \ldots, u_n\}$ векторного пространства E^n, расположенный в порядке невозрастания показателей Ляпунова:

$$\lambda(A, u_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(A, u_n),$$

называется нормальным для системы $\dot{u} = A(t)u$, если для всякого базиса $\{v_1, \ldots, v_n\}$ пространства E^n, расположенного в порядке невозрастания показателей Ляпунова: $\lambda(A, v_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(A, v_n)$, выполнены неравенства $\lambda(A, v_i) \geqslant \lambda(A, u_i)$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

Л е м м а 3. Определение 4 эквивалентно определению 5.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из сравнения определения 4 с определением 5 ясно, что базис, нормальный для системы $\dot{u} = A(t)u$ в смысле определения 5, нормален для нее и в смысле определения 4. Пусть $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - базис, нормальный для системы $\dot{u} = A(t)u$ в смысле определения 4. Возьмем такую биекцию $k \mapsto m_k$ множества $\{1, \ldots, n\}$ на себя, что $\lambda(A, u_{m_1}) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(A, u_{m_n})$.

В силу нормальности базиса $\{u_1, \ldots, u_n\}$ в смысле определения 4 (положив в этом определения $v_k = u_{m_k}$ для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$), имеем $\lambda(A, u_{m_k}) \geqslant \lambda(A, u_k)$ $(k \in \{1, \ldots, n\})$.

Отсюда в силу леммы 1 [7] следует, что $\lambda(A, u_{m_k}) = \lambda(A, u_k)$ для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$, т. е. векторы u_k расположены в порядке невозрастания показателей Ляпунова $\lambda(A, u_k)$. Поэтому базис $\{u_1, \ldots, u_n\}$ является нормальным для системы $\dot{u} = A(t)u$ и в смысле определения 5. Лемма доказана,

Лемма 4. Пусть $\{u_1, \ldots, u_n\}$ и $\{v_1, \ldots, v_n\}$ базисы, нормальные для системы $\dot{u} = A(t)u$. Тогда $\lambda(A, u_k) = \lambda(A, v_k)$ для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Из нормальности первого базиса следуют неравенства $\lambda(A, v_k) \geqslant \lambda(A, u_k)$ при всех $k \in \{1, \ldots, n\}$. Из нормальности второго базиса следуют неравенства $\lambda(A, u_k) \geqslant \lambda(A, v_k)$ при тех же k.

Соединением этих неравенств завершается доказательство леммы. Из леммы вытекает корректность следующего определения.

О п р е д е л е н и е 6. Показатель Ляпунова $\lambda_k(A)$ системы $\dot{u} = A(t)u$ определяется для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой $\lambda_k(A) = \lambda(A, u_k)$, где $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - любой базис, нормальный для этой системы.

Т е о р е м а 1 . Определения 1, 2, 3, 6 попарно эквивалентны.

Доказательство см. в последнем параграфе.

О с н о в н ы е т е о р е м ы .

Т е о р е м а 2. Для всякого локально суммируемого отображения $A(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \mathrm{End}\, E^n$ и всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место равенство

$$\lambda_{n-k+1}(A) = \\ = \lim_{m\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(E^n)} \sup_{t\in[m,\, q]} \frac{1}{t} \ln \| X_A(t)|_{\mathbf{R}^k} \|, \tag{7}$$

и это равенство остается верным, если заменить в нем $\lim\limits_{m\to+\infty}$ на $\inf$ по всем $m > 0$. Теорема 2 является частным случаем теоремы 3, формулируемой ниже.

Иногда возникает надобность в рассмотрении систем (1) с коэффициентами более общей природы: например, бывает так, что коэффициенты системы - обобщенные функции, а разрешающий оператор все-таки удается определить, пользуясь той или иной спецификой рассматриваемой ситуации. Бывает и так, что задано лишь однопараметрическое семейство линейных отображений $X(t): E^n \to E^n$ (параметром служит $t \in \mathbf{R}^+$), которые могут зависеть от t произвольным образом, в частности, могут не только не быть дифференцируемыми по t, но даже и не быть непрерывными функциями этого аргумента.

Пусть задано отображение $X(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End} E^n$.

Определение 7. Показатели Ляпунова $\lambda_k(X)$ отображения $X(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End} E^n$ определяются при всяком $k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$ формулой

$$\lambda_{n-k+1}(X) = \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(E^n)} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X(t)|_{\mathbf{R}^k} \|$$

или любым из определений 2, 3, 6 с очевидными изменениями в обозначениях. Теорема об эквивалентности этих определений формулируется я доказывается точно так же, если не считать все тех же очевидных изменений в обозначениях, как теорема 1.

Теорема 3. Пусть дано отображение $X(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End} E^n$. Тогда для всякого $k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$ имеет место равенство

$$\lambda_{n-k+1}(X) =$$
$$= \lim_{m\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(E^n)} \sup_{t\in[m, \ q]} \frac{1}{t} \ln \| X(t)|_{\mathbf{R}^k} \|,$$

и это равенство останется верным, если заменить в нем $\lim\limits_{m\to+\infty}$ на $\inf$ по всем $m > 0$.

Доказательство этой теоремы излагается в последнем параграфе. Оно состоит в выводе из более общей теоремы [10] с помощью соображения, изложенного в [9, § 6].

Системы со случайными коэффициентами

Предложение. Пусть $B(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End} E^n$ - локально суммируемое отображение. Пусть дана последовательность $t_s \nearrow +\infty$. Пусть $C(t, \ \omega)$ - случайный процесс со значениями в $\operatorname{End} E^n$, траектории которого постоянны на каждом полуинтервале $[t_{s-1}, \ t_s)$ ($s \in \mathbf{N}$), причем значения процесса $C(t, \ \omega)$ в точках из разных полуинтервалов $[t_{s-1}, \ t_s)$ - независимые случайные величины. Тогда показатели Ляпунова $\lambda_k(\omega)$ ($k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$) системы $\dot{u} = A(t, \ \omega)u$, где $A(t, \ \omega) = B(t) + C(t, \ \omega)$ с вероятностью единица не зависят от ω.

Доказательство. Заставив в формуле теоремы 2 числа m и q пробегать не $\mathbf{R}^+$, а множество $\{t_s\}_{s\in\mathbf{N}}$ (пределы, стоящие в формуле, от этого не изменятся), получим в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от коэффициентов системы, что показатели Ляпунова системы $\dot{u} = A(t, \ \omega)u$ суть бэровские функции от случайных величин $C_{ij}^{(s)}(\omega)$ ($s \in \mathbf{N}$; $i, j \in \{1, \ \ldots, \ n\}$) элементов матрицы, задающей в стандартном базисе линейное преобразование $C(t, \ \omega)$, где $t \in [t_{s-1}, \ t_s)$.

Показатели Ляпунова системы не изменятся, если взметать коэффициенты системы на конечном отрезке.

Поэтому в силу закона нуля или единицы - см. дополнение в [11] - показатели Ляпунова системы $\dot{u} = A(t, \ \omega)u$ с вероятностью единица не зависят от ω. Предложение доказано.

Подобные предложения для обобщенных случайных процессов $A(t, \ \omega)$ с независимыми в каждой точке значениями могут быть получены с помощью закона 0 или 1 теоремы 3. Оператор Коши системы $\dot{u} = A(t,\ \omega)u$ определяется в этом случае обычной формулой последовательных приближений.

$$X_{\omega}(\theta,\ \tau) = I + \int_{\tau}^{\theta} A(t_1,\ \omega)dt_1 + \int_{\tau}^{\theta} A(t_1,\ \omega)\int_{\tau}^{t_1} A(t_2,\ \omega)dt_2 dt_1 + \ldots,$$

интегралы в которой - стохастические интегралы (см. [12]).

Семейство эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения

Для доказательства теорем, сформулированных выше, мы применим общие теоремы [8 - 10]. Чтобы сформулировать в удобной для дальнейшего изложения форме некоторые теоремы и предложения статей [8 - 10], напомним некоторые определения.

Абстрактным векторным расслоением со слоем $\mathbf{R}^n$ называется тройка $(E,\ p,\ B)$, где E и B - некоторые множества, p отображение множества E на множество B, называемое базой, причем для всякой точке $b \in B$ на ее полном прообраза $p^{-1}(b)$ (он называется слоем над точкой b) задана структура n-мерного векторного пространства над полем действительных чисел.

Метризованным абстрактным векторным расслоением со слоем $\mathbf{R}^n$ называется абстрактное векторное расслоение, на каждом слое которого задана структура n-мерного евклидова пространства.

Эндоморфизмом абстрактного векторного расслоения называется пара $(X,\ \chi)$, где X - отображение множества E в себя, χ - отображение множества B в себя, причем сужение отображения X на слой над всякой точкой $b \in B$ является линейным отображением этого слоя в слой над точкой χb. Из последнего условия вытекает равенство $pX = \chi p$.

Семейством эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения называется отображение $\mathfrak{M}$ некоторого множества M (в этой статье это множество всегда будет предполагаться неограниченным справа множеством действительных чисел) в множество эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения. Значение отображения $\mathfrak{M}$ в точке t обозначается через $(X_t,\ \chi_t)$, где $X_t : E \to E$, $\chi_t : B \to B$.

Пусть, $\mathfrak{M}$ - семейство эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ со слоем $\mathbf{R}^n$.

Определение 8. Показатель Ляпунова семейства $\mathfrak{M}$ определяется для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ формулой

$$\lambda_{k-n+1}(\mathfrak{M},\ b) = \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|$$

Здесь: $G_k(p^{-1}(b))$ - множество всех k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$; через $Y|_L$ обозначается сужение отображения Y на множество L; норма линейного отображения определяется стандартным образом, т. е. как точная верхняя, грань нормы образа нормированного вектора. Величина, стоящая под знаком логарифма в формуле, определяющей $\lambda_{k-n+1}(\mathfrak{M},\ b)$, может оказаться равной нулю. В атом случае логарифм определяется формулой $\ln 0 = -\infty$, являющейся удобным соглашением, при котором логарифм оказывается непрерывной на $\mathbf{R}^+$ функцией со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$. Напомним, что топология на расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$ вводится так. Открытыми множествами объявляются пустое множество и всевозможные объединения множеств вида $[-\infty,\ \alpha)$,

$(\beta,\ \gamma)$, $(\delta,\ +\infty]$, где α, β, γ, δ - действительные числа, причем. $\beta < \gamma$, а в остальном все эти числа произвольны. Благодаря этому соглашению, упомянутому выше доопределению логарифма и воспроизведенному выше определению линейного порядка на $\overline{\mathbf{R}}$ знаки верхнего предела и точной верхней или нижней грани, встречающиеся в этой статье, имеют вполне определенный смысл.

О п р е д е л е н и е 9. П о к а з а т е л ь Л я п у н о в а $\lambda(\mathfrak{M},\ \xi)$ определяется для всякого $\xi \in E$ формулой

$$\lambda(\mathfrak{M},\ \xi) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_t \xi|.$$

О п р е д е л е н и е 10. П о к а з а т е л ь Л я п у н о в а с е м е й с т в а $\mathfrak{M}$ определяется для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{M},\ b) = \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in \mathbf{R}^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{M},\ \xi)$$

В [10] доказана следующая лемма (в цитируемой статье это – предложение 1).

Л е м м а 5. Определения 8 и 10 эквивалентны.

Дня формулировки следящего определения нам понадобится

Л е м м а 6. Для всяких $b \in B$, $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ множество

$$E(\mathfrak{M},\ b,\ \lambda) = \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\ \xi) \leqslant \lambda\}$$

является векторным подпространством слоя $p^{-1}(b)$.

Так как $\lambda(\mathfrak{M},\ 0_b) = -\infty$ для всякого $b \in B$, где 0_b - нуль слоя $p^{-1}(b)$ (это равенство - следствие определения 9 и принятого выше соглашения о том, что $\ln 0 = -\infty$), то при всяких $b \in B$, $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ нуль слоя $p^{-1}(b)$ содержится в множестве $E(\mathfrak{M},\ b,\ \lambda)$. Поэтому лемма 6 вытекает, из следующей леммы.

Л е м м а 7. Для всяких $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ и всяких $\xi \in E$, $\eta \in E$, принадлежащих слою над одной и той же точкой $p\xi = p\eta$, имеет место неравенство

$$\lambda(\mathfrak{M},\ \alpha\xi + \beta\eta) \leqslant \max\{\lambda(\mathfrak{M},\ \xi),\ \lambda(\mathfrak{M},\ \eta)\}$$

Эта лемма доказана в [8] - см. лемму 1 цитируемой статьи.

В силу леммы 6 при всяком $b \in B$ формула $\lambda \mapsto E(\mathfrak{M},\ b,\ \lambda)$ определяет монотонно неубывающее отображение расширенной числовой прямой в множество векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$. Такое отображение не может принимать при данном $b \in B$ более $n+1$ различных значений, так как $\dim p^{-1}(b) = n$.

О п р е д е л е н и е 11. Для всякого фиксированного $b \in B$ расположим в порядке возрастания по включению все различные значения отображения $\lambda \mapsto E(\mathfrak{M},\ b,\ \lambda)$. Написав первое на них столько раз подряд, какова его размерность, затем каждое следующее - столько раз подряд, какова разность его размерности с размерностью предыдущего, получим цепочку нестрогих включений $E_1(\mathfrak{M},\ b) \subset \ldots \subset E_n(\mathfrak{M},\ b)$. Показатель Ляпунова семейства $\mathfrak{M}$ определяется для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{M},\ b) = \sup_{\xi \in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},\ b)} \lambda(\mathfrak{M},\ \xi)$$

Из теорема [8] непосредственно вытекает

Л е м м а 8. Определения 10 и 11 эквивалентны друг другу.

О п р е д е л е н и е 12. Пусть $b \in B$. Базис $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ слоя $p^{-1}(b)$ называется нормальным для семейства $\mathfrak{M}$, если для всякого базиса $\{\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n\}$ того же слоя, расположенного в порядке невозрастания показателей Ляпунова: $\lambda(\mathfrak{M},\ \eta_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(\mathfrak{M},\ \eta_n)$, выполнены неравенства $\lambda(\mathfrak{M},\ \eta_i) \geqslant \lambda(\mathfrak{M},\ \xi_i)$, $(i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$).

О п р е д е л е н и е 13. Пусть $b \in B$. Базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ слоя $p^{-1}(b)$, расположенный в порядке невозрастания показателей Ляпунова: $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_1) \geqslant \dots \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \xi_n)$, называется н о р м а л ь н ы м для семейства $\mathfrak{M}$, если для всякого базиса $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ того же слоя, расположенного в порядке невозрастания показателей Ляпунова: $\lambda(\mathfrak{M}, \eta_1) \geqslant \dots \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \eta_n)$, выполнены неравенства $\lambda(\mathfrak{M}, \eta_i) \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \xi_i)$, $(i \in \{1, \dots, n\})$.

Л е м м а 9. Пусть $\lambda_1 \in \overline{\mathbf{R}}, \dots, \lambda_n \in \overline{\mathbf{R}}$.

Пусть $k \mapsto m_k$ - биекция множества $\{1, \dots, n\}$ на себя такая, что $\lambda_{m_k} \geqslant \lambda_k$ для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\lambda_{m_k} = \lambda_k$ для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$.

Л е м м а 10. Определения 12 и 13 эквивалентны друг другу.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из сравнения определений 12 ж 13 друг с другом ясно, что базис, нормальный для семейства $\mathfrak{M}$ в смысле определения 13, нормален для семейства и в смысле определения 12. Пусть $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ - базис некоторого слоя $p^{-1}(b)$, нормальный для семейства $\mathfrak{M}$ в смысле определения 12. Возьмем такую биекцию $k \mapsto m_k$ множества $\{1, \dots, n\}$ на себя, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_{m_1}) \geqslant \dots \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \xi_{m_n})$. В силу нормальности базиса $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ в смысле определения 12, положив $\eta_k = \xi_{m_k}$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$, имеем: $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_{m_k}) \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \xi_k)$ $(k \in \{1, \dots, n\})$. Отсюда в силу леммы 9 следует, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_{m_k}) = \lambda(\mathfrak{M}, \xi_k)$ для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$, т. е. векторы ξ_k расположены в порядке невозрастания показателей Ляпунова $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k)$. Поэтому базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ является нормальным для семейства $\mathfrak{M}$ и в смысле определения 18. Лемма доказана.

Л е м м а 11. Пусть $b \in B$ и пусть $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ - базисы слоя $p^{-1}(b)$, нормальные для семейства $\mathfrak{M}$. Тогда $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) = \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k)$ для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из нормальности первого базиса следует, что $\lambda(\mathfrak{M}, \eta_k) \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \xi_k)$ при всяком $k \in \{1, \dots, n\}$. Из нормальности второго базиса следует, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k)$ при всяком $k \in \{1, \dots, n\}$. Соединив эти неравенства, получаем заключение леммы. Лемма доказана.

Из леммы 11 вытекает корректность следующего определения.

О п р е д е л е н и е 14. П о к а з а т е л ь Л я п у н о в а с е м е й с т в а $\mathfrak{M}$ определяется для всяких $k \in \{1, \dots, n\}$, $b \in B$ формулой $\lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \lambda(\mathfrak{M}, \xi_k)$, где $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ - любой базис слоя $p^{-1}(b)$, нормальный для семейства $\mathfrak{M}$.

Из теоремы 1 [9] непосредственно вытекает

Л е м м а 12. Определения II и 14 эквивалентны друг другу.

Объединив леммы 5, 8, 12, получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 4. Определения 8, 10, 11, 14 попарно эквивалентны.

Т е о р е м а 5. Для всяких $k \in \{1, \dots, n\}$, $b \in B$ имеет место равенство

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) =$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \lim_{q \to +\infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M \cap [m, q]} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|,$$

и это равенство останется верным, если $\lim\limits_{m \to +\infty}$ заменить в нем на $\inf$ по всем $m > 0$ из области определения отображения $\mathfrak{M}$.

Эта теорема доказана в [10] - см. теорему § 6 цитируемой статьи.

Линейная система дифференциальных уравнений и семейство эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения

Л е м м а 13 . Пусть задано отображение $X(\cdot):\mathbf{R}^+ \to \mathrm{End}\, E^n$. Тогда существуют семейство $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения $(E,\, p,\, B)$ с одноточечной базой $B=\{b\}$ и изоморфизм σ евклидова пространства E^n на евклидово пространство $p^{-1}(b)$ такой, что $\sigma X(t)=X_t\sigma$ для всякого $t\in\mathbf{R}^+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим $E=E^n$ Б качестве множества B возьмем множество $\{b\}$ из одного элемента, обозначенного буквой b. Отображение $p:E\to B$ определим формулой $pu=b$ для всякого $u\in E^n$. Тем самым построена тройка $(E,\, p,\, B)$ из множеств E и B и отображения p множества E на множество B. При этом на слое над единственной точкой $b\in B$ - так называется полный прообраз $p^{-1}(b)$ точки b при отображении p - задана структура n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$: в самом деле, по построению. этот слой есть ни что иное как E^n. Далее, поскольку единственный слой $p^{-1}(b)$ есть евклидово пространство E^n, то построенное абстрактное векторное расслоение $(E,\, p,\, B)$ с одноточечной базой $B=\{b\}$ является метризованным абстрактным векторным расслоением.

При всяком $t\in\mathbf{R}^+$ определим отображения $X_t:E\to E$, $\chi_t:B\to B$ формулами

$$X_t=X(t),\ \chi_t=1_B,$$

где 1_B - тождественное отображение множества B на себя. Так как база B - одноточечное множество $\{b\}$, то $p^{-1}(b)=E$, и поэтому при всяком $t\in\mathbf{R}^+$ сужение отображения X_t на слой $p^{-1}(b)$ совпадает с отображением $X_t:E\to E$. Последнее, в свою очередь, в силу своего определения, совпадает с отображением $X(t):E^n\to E^n$, являющимся, по условию, линейным отображением.

Поэтому при всяком $t\in\mathbf{R}^+$ пара $(X_t;\, \chi_t)$ является, эндоморфизмом построенного абстрактного векторного расслоения $(E,\, p,\, B)$. Следовательно, формула $t\mapsto(X_t,\, \chi_t)$ определяет семейство $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения $(E,\, p,\, B)$ с одноточечной базой.

Обозначим через σ тождественное отображение пространства E^n на себя, рассматриваемое как отображение $E^n\to p^{-1}(b)$; его можно так рассматривать, поскольку $p^{-1}(b)=E=E^n$. Так определенное отображение σ является изоморфизмом евклидова пространства на евклидово пространство $p^{-1}(b)$.

При всяком $t\in\mathbf{R}^+$ имеет место равенство $\sigma X(t)=X_t\sigma$, так как $X_t:E\to E$ по определению равно $X(t):E^n\to E^n$ (напомним, что E сейчас равно E^n), а σ, также по определению, - тождественное отображение $E=E^n$ на $E=E^n$. Лемма доказана.

Л е м м а 14. Пусть задано отображение $X(\cdot):\mathbf{R}^+\to\mathrm{End}\, E^n$. Пусть $\mathfrak{M}$ - семейство эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения $(E,\, p,\, B)$ с одноточечной базой $B=\{b\}$. Пусть σ - изоморфизм евклидова пространства E^n на евклидово пространство $p^{-1}(b)$ такой, что $\sigma X(t)=X_t\sigma$ для всякого $t\in\mathbf{R}^+$. Тогда, $|\, X(t)\, u\, |=|\, X_t\sigma u\, |$ для всяких $t\in\mathbf{R}^+$, $u\in E^n$, а для всякого векторного подпространства L в E^n и всякого $t\in\mathbf{R}^+$ имеет место равенство $\|\, X(t)\,|_L\| = \|\, X_t\,|_{\sigma L}\|$.

Доказательство. Пусть даны $t \in \mathbf{R}^+$, $u \in E^n$. Так как по условию $\sigma X(t) = X_t \sigma$, то $\sigma X(t)\, u = X_t \sigma u$, откуда $|\sigma X(t)\, u| = |X_t \sigma u|$. Так как по условию σ - изоморфизм евклидовых пространств, то $|\sigma X(t)\, u| = |X(t)\, u|$. Из двух последних равенств следует

$$|X(t)\, u| = |X_t \sigma u|. \tag{8}$$

Пусть даны $t \in \mathbf{R}^+$ и векторное подпространство L пространства E^n. Согласно определению нормы линейного отображения имеем

$$\| X(t)|_L \| = \sup_{\{u \in L : |u| = 1\}} |X(t)\, u|, \tag{9}$$

$$\| X_t |_{\sigma L} \| = \sup_{\{v \in \sigma L : |v| = 1\}} |X_t v|. \tag{10}$$

Поскольку σ — изоморфизм евклидова пространства E^n на евклидово пространство $p^{-1}(b)$, то $\{v \in \sigma L : |v| = 1\} = \sigma\{u \in L : |u| = 1\}$. Подставив это равенство в (10), получаем

$$\| X_t |_{\sigma L} \| = \sup_{\{u \in L : |u| = 1\}} |X_t \sigma u|.$$

В силу (8) правая часть последнего равенства совпадает с правой частью равенства (9). Следовательно, совпадают и левые части этих равенств: $\| X(t)|_L \| = \| X_t |_{\sigma L} \|$. Лемма доказана.

Лемма 15. Пусть задано локально суммируемое отображение $A(\cdot) : \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End} E^n$. Тогда существует семейство $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения с одноточечной базой $(E,\, p,\, B = \{b\})$ и существует изоморфизм σ евклидова пространства E^n на евклидово пространство $p^{-1}(b)$ такой, что $\sigma X_A(t) = X_t \sigma$ для всякого $t \in \mathbf{R}^+$, где $X_A(t) : E^n \to E^n$ — разрешающий оператор системы $\dot{u} = A(t)u$.

Доказательство. В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы разрешающий оператор системы $\dot{u} = A(t)u$ существует. Напомним, что разрешавшим оператором системы называется параметризованное параметром $t \in \mathbf{R}^+$ семейство отображений $X_A(t) : E^n \to E^n$, ставящих в соответствие всякому $u \in E^n$ значение в точке t решения $u(\cdot)$ системы, равного u при $t = 0$. Так как система $\dot{u} = A(t)u$ — линейная однородная, то $X_A(t) \in \operatorname{End} E^n$, т. е. является линейным отображением $E^n \to E^n$, для всякого $t \in \mathbf{R}^+$. Поэтому утверждение леммы следует из леммы 13. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть дано локально суммируемое отображение $A(\cdot) : \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End} E^n$. Пусть $\mathfrak{M}$ и σ — те объекты, существование которых утверждается в лемме 15. Тогда в силу леммы 14 для всяких $t \in \mathbf{R}^+$, $k \in \{1,\, \dots,\, n\}$, $\mathbf{R}^k \in G_k(E^n)$ имеет место равенство

$$\| X_A(t)|_{\mathbf{R}^k} \| = \| X_t |_{\sigma \mathbf{R}^k} \|. \tag{11}$$

Так как σ — изоморфизм E^n на $p^{-1}(b)$, то

$$\sigma G_k(E^n) = G_k(p^{-1}(b)) \tag{12}$$

для всякого $k \in \{1,\, \dots,\, n\}$. Из (11), (12) следует, что правая часть формулы (2), определяющей показатель $\lambda_{n-k+1}(A)$, равна

$$\inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|,$$

т. е. равна $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{M},\, b)$ (последнее — в силу определения B). Поэтому имеет место равенство

$$\lambda_q(A) = \lambda_q(\mathfrak{M},\ b) \ \ (q \in \{1,\ \dots,\ n\}), \tag{13}$$

причем левая часть этого равенства понимается в смысле определения 1, а правая — в смысле определения 8.

Далее, в силу леммы 14 для всяких $t \in \mathbf{R}^+$, $u \in E^n$ имеет место равенство $|X_A(t)\,u| = |X_t \sigma u|$. Отсюда для всякого $u \in E^n$ следует формула

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_A(t)\,u| = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_t \sigma u|,$$

левая часть которой согласно формуле (4) равна $\lambda(A,\ u)$, а правая в силу определения 9 равна $\lambda(\mathfrak{M},\ \sigma u)$.

Следовательно,

$$\lambda(A,\ u) = \lambda(\mathfrak{M},\ \sigma u) \tag{14}$$

для всякого $u \in E^n$. Сравнивая определение 2 с определением 10, видим, что из (14), (12) вытекает равенство

$$\lambda_k(A) = \lambda_k(\mathfrak{M},\ b) \ \ (k \in \{1,\ \dots,\ n\}),$$

левая часть которого понимается в смысле определения 2, а правая — в смысле определения 10. Сравнивая определение 3 с определением 11, видим, что из (14) вытекает равенство (13), понимаемое в смысле определений 3, 11. Наконец, сравнивая определение 6 с определением 14, убеждаемся, что из (14) следует равенство (13), понимаемое в смысле определений 6, 14. В силу теоремы 4 определения 8, 10, 11, 14 попарно эквивалентны. Поэтому определения 1, 2, 3, 6 попарно эквивалентны. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. В этой теореме дано отображение $X(\cdot) : \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End} E^n$. Пусть $\mathfrak{M}$ и σ — те объекты, существование которых утверждается в лемме 13. Тогда в силу леммы 14 для всяких $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$, $\mathbf{R}^k \in G_k(E^n)$ имеет место равенство

$$\| X(t)|_{\mathbf{R}^k} \| = \| X_t |_{\sigma \mathbf{R}^k} \|. \tag{15}$$

Так как σ — изоморфизм E^n на $p^{-1}(b)$, то

$$\sigma G_k(E^n) = G_k(p^{-1}(b)) \tag{16}$$

для всякого $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$. Из (15), (16) следует, что правая часть формулы для $\lambda_{k-n+1}(X)$ в определении 7 при всяком $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ совпадает с правой частью формулы для $\lambda_{k-n+1}(\mathfrak{M},\ b)$ в определении 8. Следовательно,

$$\lambda_{k-n+1}(X) = \lambda_{k-n+1}(\mathfrak{M},\ b) \ \ (k \in \{1,\ \dots,\ n\}) \tag{17}$$

В силу (15), (1б) правая часть формулы для $\lambda_{k-n+1}(\mathfrak{M},\ b)$ в теореме 5 при всяком $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ совпадает с правой частью формулы для $\lambda_{k-n+1}(X)$ в теореме 3. Поэтому из (17) следует, что теорема 3 вытекает из теоремы 5. Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. Б. Ломоносова

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. 472 с.

2. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

3. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // В кн.: Итоги науки и техники / Мат. анализ/, Т. 12. М.: Изд-во ВИНИТИ. 1974. С. 71—146.

4. Бэр Р. Теория разрывных функций. — М. — Л.: ГТТИ. 1932. 136 с.

5. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М. — Л.: ОНТИ. 1937. 304 с.

6. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М. — Л.: ГТТИ. 1949. 550 с.

7. Миллионщиков В.М. Линейные системы дифференциальных уравнении и автоморфизмы векторных расслоений. II // Известия АН Каз ССР. Серия физико-математическая. 1986, № 5. С. 23—27.

8. Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Мат. заметки. 1985. Т. 38, вып. 1. С. 92—109.

9. Миллионщиков В.М. Нормальные базисы семейства видоморфизмов метризованного векторного расслоения // Мат. Заметки. 1985. Т. 38, вып. 5. С.691—708.