ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МАРТ 1968 Г., ТОМ IV, № 3

Посвящается
памяти В. В. Немыцкого

УДК 517.941.92

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

Н. П. Еругин поставил проблему: всякая ли система n-го порядка

$$x = A(t)x \tag{1}$$

с почти периодической $A(t)$ является правильной?

В настоящей работе дается решение (отрицательное) этой проблемы.

Теорема 1. *При любом $n>1$ существует почти периодическая $A(t)$ такая, что система (1) не почти приводимая.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать это для $n=2$, что мы и сделаем.

Пусть числа α_i таковы, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i < +\infty, \alpha_i > 0 . \tag{2}$$

Пусть $m_i > 1$ — натуральные числа $(i = 0,1,2,...)$. Положим

$$n_k = \prod_{i=0}^{k} m_i. \tag{3}$$

Положим

$$A_0(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{при} \quad qn_0 - 1 \leqslant t < qn_0 \\ & (q\text{–любое число}) \\ \dfrac{\pi}{2}|\sin \pi t|\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{при остальных } t, \end{cases} \tag{4}$$

$$A_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}|\sin \pi t|\begin{pmatrix} 0 & \alpha_k \\ -\alpha_k & 0 \end{pmatrix} & \text{при} \quad qn_k - 1 \leqslant t < qn_k \\ & (q\text{–любое число}) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{при остальных } t, \end{cases} \tag{5}$$

$$k \geqslant 1.$$

Очевидно, $A_k(t) \quad (k \geqslant 0)$ непрерывна и периодична (с периодом n_k). Положим далее

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t). \tag{6}$$

Из (2)—(5) вытекает, что $A(t)$ — почти периодическая (непрерывная почти периодическая, см. [3], стр. 42, [4], стр. 20).

Докажем, что числа α_i, удовлетворяющие (2), и числа $m_i > 1$ можно выбрать так, чтобы система (1), (6) была не почти приводимой.

$$B_k(t) = \sum_{i=0}^{k} A_i(t), \tag{7}$$

очевидно, периодична (с периодом n_k).

Рассмотрим системы

$$x = B_k(t)x \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Примечание. Везде в дальнейшем, где не говорится о направлении отсчета угла, угол считается положительным.

Лемма. *Существуют* α_i, *удовлетворяющие* (2), и $m_i > 1 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$, *такие, что при каждом* $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ *система (8) имеет решения* $x_k^{(i)}(t) \quad \left(\left\| x_k^{(i)}(0) \right\| = 1\right) \quad (i = 1, 2)$, *обладающие свойствами*:

а) при любом целом q

$$x_k^{(1)}(qn_k - 1) = e^{\lambda_k^{(1)} qn_k} x_k^{(1)}(-1), \tag{9}$$

$$x_k^{(2)}(qn_k) = e^{\lambda_k^{(2)} qn_k} x_k^{(2)}(0), \tag{10}$$

причем

$$\lambda_k^{(1)} > \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\lambda_k^{(2)} > -\frac{1}{2}; \tag{12}$$

б) (при $k \geqslant 1$*) векторы* $x_k^{(2)}(0)$ *и* $x_k^{(1)}(-1)$ *лежат между векторами* $x_{k-1}^{(2)}(0)$ *и* $x_{k-1}^{(1)}(-1)$ *(т.е. в том углу между ними, который* $< \pi$ *);*

в) (при $k \geqslant 1$*)* угол ξ_k *между векторами* $x_k^{(1)}(-1)$ и $x_k^{(2)}(0)$, *отсчитываемый от* $x_k^{(2)}(0)$ *против часовой стрелки, и числа* α_i *удовлетворяют неравенству*

$$\frac{1}{k} > \xi_k - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i > 0. \tag{13}$$

Доказательство леммы. При $k = 0$ все утверждения, как легко проверяется, справедливы, если $m_0 > 2$, причем

$$\lambda_0^{(1)} > 1 - \frac{1}{n_0}, \tag{14}$$

$$\lambda_0^{(2)} = -1 + \frac{1}{n_0}. \tag{15}$$

Пусть существуют $\alpha_i > 0$, $m_i > 1 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$, такие, что утверждения леммы справедливы при $k \leqslant s$. Докажем, что существуют α_{s+1}, m_{s+1} такие, что утверждения леммы справедливы при $k = s + 1$.

Обозначим $X_k(t)$ фундаментальную матрицу системы (8), удовлетворяющую условию

$$X_k(0) = E.$$

Тогда, как легко проверить,

$$X_{k+1}(t) = \begin{cases} X_k(t) & \text{при } 0 \leqslant t < n_{k+1} - 1, \\ U_{k+1}(t - n_{k+1} + 1) X_k(t) & \text{при } n_{k+1} - 1 \leqslant t < n_{k+1}, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$U_{k+1}(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{k+1}(t) & \sin\varphi_{k+1}(t) \\ -\sin\varphi_{k+1}(t) & \cos\varphi_{k+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Здесь

$$\varphi_{k+1}(t) = \alpha_{k+1} \frac{\pi}{2} \int_0^t \left|\sin \pi\tau\right| d\tau, \tag{18}$$

в частности,

$$\varphi_{k+1}(1) = \alpha_{k+1}. \tag{19}$$

Возьмем в качестве α_{s+1} положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{s+1} > \xi_s - \sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i > 0 \tag{20}$$

(такое $\alpha_{s+1} > 0$ существует, так как при $k = s$ выполнено (13)).

Угол между векторами x и $x_s^{(2)}(0)$, отсчитываемый от $x_s^{(2)}(0)$ против часовой стрелки, обозначаем $\theta_s(x)$; угол между x и $x_s^{(1)}(n_{s+1}-1)$, отсчитываемый от $x_s^{(1)}(n_{s+1}-1)$ по часовой стрелке, обозначаем $\psi_s(x)$.

Выберем теперь $m_{s+1} > 1$ столь большим, чтобы:

1) если

$$\theta_s(x) \geqslant \frac{1}{3}\left(\xi_s - \sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right),$$

то угол между векторами $X_s(n_{s+1})x$ и $x_s^{(1)}(0)$ не превосходит $\frac{1}{2}\left(\xi_s - \sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right)$;

2) если угол между векторами $X_s(n_{s+1})x$ и $x_s^{(1)}(0)$ больше $\frac{1}{2}\left(\xi_s - \sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right)$, то

$$\frac{1}{n_{s+1}}\ln\frac{\|X_s(n_{s+1})x\|}{\|x\|} < -\frac{1}{2};$$

3) если

$$\psi_s(x) \geqslant \frac{1}{3}\left(\xi_s - \sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right),$$

то угол между векторами $X_s(-1)X_s^{-1}(n_{s+1}-1)x$ и $x_s^{(2)}(-1)$ не превосходит $\frac{1}{2}\left(\xi_s - \sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right)$;

4) если угол между векторами $X_s(-1)X_s^{(-1)}(n_{s+1}-1)x$ и $x_s^{(2)}(-1)$ больше $\frac{1}{2}\left(\xi_s - \sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right)$, то

$$\frac{1}{n_{s+1}}\ln\frac{\|x\|}{\|X_s(-1)X_s^{-1}(n_{s+1}-1)x\|} > \frac{1}{2}.$$

Возможность указанного выбора m_{s+1} вытекает из того, что выполнены (9) — (12) при $k = s$.

В силу непрерывной зависимости решений от начальных данных и линейности системы (8)

$$f_s(\theta_s(x)) = \theta_s(X_{s+1}(n_{s+1})x) - \theta_s(x)$$

есть непрерывная функция от $\theta_s(x)$ на отрезке

$$\theta_s(-x_s^{(1)}(0)) \leqslant \theta_s(x) \leqslant \theta_s(x_s^{(1)}(0)).$$

В силу (16)—(19)

$$f_s(0) < 0,$$

а в силу 1) и (16) —(19)

$$f_s\left(\frac{1}{3}\left(\xi_s - \sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right)\right) > 0,$$

и потому найдется $\theta_s(x)$ такое, что

$$0 < \theta_s < \frac{1}{3}\left(\xi_s - \sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right), \tag{21}$$

$$f_s(\theta_s) = 0. \tag{22}$$

Положим $x_{s+1}^{(2)}(t) = X_{s+1}(t)x_{s+1}^{(2)}$, где $x_{s+1}^{(2)}$ — вектор, для которого $\theta_s(x_{s+1}^{(2)}) = \theta_s$. Тогда из (22) вытекает (10) при $k = s+1$, а из 2) вытекает (12) при $k = s+1$.

Аналогично тому, как мы построили решение $x_{s+1}^{(2)}(t)$ с помощью 1), 2), с помощью 3), 4) строим решение $x_{s+1}^{(1)}(t)$ системы (8) ($k=s+1$), удовлетворяющее (9), (11) (при $k=s+1$). (При этом построении вместо $f_s(\theta_s(x))$ рассматриваем функцию от $\psi_s(x)$:

$$g_s(\psi_s(x)) = \psi_s(X_{s+1}(-1)X_{s+1}^{-1}(n_{s+1}-1)x) - \psi_s(x)$$

и получаем, что $g_s(\psi_s)=0$, причем

$$0<\psi_s<\frac{1}{3}\left(\xi_s-\sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i\right). \tag{23}$$

Утверждение б) леммы при $k=s+1$ вытекает из (21), (23). При $k=s+1$ (13) вытекает из(20), (21), (23).

По индукции $\alpha_i>0$ и $m_i>1$ построены. Заметим теперь, что из б) и (13) вытекает (2). Лемма доказана.

Пусть теперь α_i и m_i удовлетворяют условиям доказанной леммы. Для любого натурального k система (1), (6) имеет решение $\overline{x}_k(t)$ (равное $x_k^{(1)}(t)$ при $0\leqslant t\leqslant n_k-1$), которое в силу (9), (11), (4) — (6) обладает свойством

$$\frac{1}{n_k}\ln\left\|\overline{x}_k(n_k)\right\|>\frac{1}{2}, \tag{24}$$

и решение $\overline{\overline{x}}_k(t)$ (равное $x_k^{(2)}(t)$ при $0\leqslant t\leqslant n_k-1$), для которого в силу (10), (12)

$$\frac{1}{n_k}\ln\left\|\overline{\overline{x}}_k(n_k)\right\|<-\frac{1}{2}. \tag{25}$$

Отсюда следует, что верхний особый показатель системы $\Omega^0>\frac{1}{2}$, а нижний особый показатель $\omega^0<-\frac{1}{2}$.

Предположим, что полученная система (1), (6) почти приводимая. Тогда она имеет два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, характеристические показатели которых соответственно $>\frac{1}{2}$ и $<-\frac{1}{2}$ и угол $\alpha(t)$ между которыми

$$\pi>const\geqslant\alpha(t)\geqslant const>0. \tag{26}$$

В силу утверждения б) леммы существует

$$x_0=\lim_{k\to\infty}\overline{\overline{x}}_k(0).$$

Решение системы (1), (6), равное x_0 при $t=0$, совпадает в силу (25) с решением $x_2(t)$. Так как угол между векторами $\overline{x}_k(n_k)$ и $x_2(n_k)$ не превосходит угла между векторами $\overline{x}_k(n_k)$ и $\overline{\overline{x}}_k(n_k)$, а последний в силу (13) $\underset{k\to\infty}{\rightarrow}0$, то (24) приводит к противоречию с (26).

Т е о р е м а 2. При любом $n>1$ существует почти периодическая $A(t)$, такая, *что система (1) неправильная.*

Эта теорема вытекает из теоремы 1, в силу теоремы 1 и леммы из [5].

З а м е ч а н и е. Если в (4) — (5) заменить $\frac{\pi}{2}\left|\sin\pi t\right|$ бесконечно дифференцируемой функцией $f(t)\geqslant 0,\ f(0)$, имеющей период 1 и $\int_0^1 f(\tau)d\tau=1$ (такая $f(t)$ существует), то получим, что существует неправильная система (1) с бесконечно дифференцируемой почти периодической $A(t)$.

Литература

1. Е р у г и н Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. АН БССР, ,1963.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. Изд. «Наука», ,1966.
3. Бор Г. Почти периодические функции. ГТТИ, 1934.
4. Левитан Б. ,М. Почти периодические функции. ГТТИ, 1953.
5. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 3, № 12, 2127—2134, 1967.

Поступила в редакцию
30 октября 1967 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова