В.М.Миллионщиков

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В этой статье анализируется понятие экспоненциальной устойчивости [1], изучается вопрос о наиболее естественной общности, в которой целесообразно рассматривать это понятие, и излагается теорема, наиболее естественная формулировка которой дается благодаря проведенному анализу.

Введение. 1. Пусть даны равномерное пространство (см. [2, гл. 2]) E и семейство $F=\{f_t\}_{t\in T}$ отображений $f_t:U\to E$, где U – некоторое открытое множество в E. Здесь T – некоторое не ограниченное справа множество точек действительной числовой прямой $\mathbf{R}$. В качестве T чаще всего будет фигурировать множество неотрицательных действительных ($\mathbf{R}^+$) или целых ($\mathbf{Z}^+$) чисел.

Точка $x\in U$ называется устойчивой по Ляпунову относительно семейства f, если семейство f равностепенно непрерывно в этой точке. Напомним, что равностепенная непрерывность семейства в точке $x\in U$ означает следующее: для всякого окружения Ξ найдется окрестность W точки x такая, что $(f_t y, f_t x)\in\Xi$ для всяких $y\in W$, $t\in T$.

2. Наиболее часто встречающимися в теории устойчивости примерами равномерных пространств являются метрические и векторные топологические пространства. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений метрические пространства охватывают все содержательные ситуации, и все же нам не хотелось ограничиться в определении устойчивости рассмотрением только метрических пространств, имея в виду приложения не только к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Напомним, что окружением в метрическом пространстве (E, d), где d – расстояние (точнее, ε-окружением в этом пространстве), называется множество пар $(x, y)\in E\times E$, удовлетворяющих неравенству $d(x, y)<\varepsilon$, где ε – любое положительное действительное число.

После этого напоминания становится ясно, во что превращается сформулированное выше определение равностепенной непрерывности в случае, когда E – метрическое пространство с расстоянием d. В этом случае формулировка этого определения общеизвестна и состоит в следующем. Семейство $F=\{f_t\}_{t\in T}$ отображений $f_t:E\to E$ называется равностепенно непрерывным в точке $x\in E$, если для всякого $\varepsilon\in\mathbf{R}^+_*$ найдется $\delta\in\mathbf{R}^+_*$ такое, что $d(f_t y, f_t x)<\varepsilon$ для всякого $t\in T$ и всякого $y\in E$, удовлетворяющего неравенству $d(y, x)<\delta$.

Поясним, что через $\mathbf{R}^+_*$ обозначается множество положительных действительных чисел.

3. Пусть задано отображение $f:E\to E$ равномерного пространства E. Устойчивость по Ляпунову точки $x\in E$ относительно отображения f определяется как ее устойчивость по Ляпунову относительно семейства целых неотрицательных степеней этого отображения. Роль параметризующего множества T в этом случае играет $\mathbf{Z}^+$, а f_t при всяком $t\in\mathbf{Z}^+$ определяется как f^t (t-я степень отображения f).

4. Пусть дано отображение $f:E\to E$ компактного топологического пространства E. Точка пространства E называется устойчивой по Ляпунову относительно отображения f, если она становится таковой в результате наделения E той единственной равномерной структурой, которая согласуется с топологией компактного пространства E.

Если $f:E\to E$ – отображение компактного дифференцируемого многообразия E, то устойчивость по Ляпунову точки $x\in E$ относительно отображения f можно определить так: точка $x \in E$ устойчива по Ляпунову, если она становится таковой в результате наделения E некоторой римановой (или финслеровой) метрикой. Это определение эквивалентно предыдущему (рассматриваемому в случае, когда E – дифференцируемое многообразие), так как всякая финслерова метрика индуцирует на компактном дифференцируемом многообразии равномерную структуру, а равномерная структура на компакте единственна.

5. Пусть дано риманово многообразие V, моделью которого служит евклидово или гильбертово пространство. Напомним, что последнее означает, что координатные отображения суть отображения областей пространства V на области в евклидовом или гильбертовом пространстве. Расстояние в V обозначаем через d. Все, что излагается далее в этом пункте, применимо без изменений и в более общей ситуации, когда V – финслерово многообразие (моделью финслерова многообразия служит нормированное пространство).

Пусть на V задано дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x,\, t)$. Решение $x(\cdot): t_0 + \mathbf{R}^+ \to V$ этого уравнения называется устойчивым по Ляпунову, если для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}^+_*$ найдется $\eta \in \mathbf{R}^+_*$ такое, что для всякой точки y из η-окрестности точки $x(t_0)$ решение $y(\cdot)$ уравнения $\dot{y} = f(y,\, t)$, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y$ единственно определено на $t_0 + \mathbf{R}^+$ и при всяком $t \in t_0 + \mathbf{R}^+$ удовлетворяет неравенству $d\,(y(t),\, x(t)) < \varepsilon$.

Это же самое определение можно сформулировать короче – как конкретизацию определения, изложенного в п.1. А именно, решение $x(\cdot): t_0 + \mathbf{R}^+ \to V$ уравнения $\dot{x} = f(x,\, t)$ устойчиво в том и только в том случае, если при $\tau = t_0$ и всяком $\theta \in t_0 + \mathbf{R}^+$ оператор Коши $X(\theta,\, \tau)$ уравнения $\dot{x} = f(x,\, t)$ определен в некоторой не зависящей от θ окрестности U точки $x(t_0)$ и семейство отображений

$$\left\{X(t,\, t_0)\right\}_{t \in t_0 + \mathbf{R}^+} : U \to V$$

равностепенно непрерывно в точке $x(t_0)$.

6. Пусть дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x,\, t)$ задано на компактном дифференцируемом многообразии V. Решение этого уравнения называется устойчивым по Ляпунову, если оно становится таковым в результате наделения дифференцируемого многообразия V некоторой римановой метрикой. От выбора римановой метрики на V свойство решения быть устойчивым по Ляпунову не зависит, так как всякие две римановы метрики на компактном дифференцируемом многообразии эквивалентны в том смысле, что отношение индуцированных ими норм ненулевого касательного вектора заключено между двумя положительными числами, не зависящими от этого касательного вектора, и потому индуцируют на V одну и ту же равномерную структуру.

Можно назвать решение дифференциального уравнения, заданного на компактном дифференцируемом многообразии V, устойчивым по Ляпунову, если оно становится таковым в результате наделения дифференцируемого многообразия V некоторой финслеровой метрикой. Это определение эквивалентно предыдущему, так как всякие две финслеровы метрики на компактном дифференцируемом многообразии эквивалентны в том же смысле, в каком выше понималась эквивалентность римановых метрик.

7. До сих пор речь шла об устойчивости по Ляпунову. Прежде чем дать определение асимптотической устойчивости отметим, что этот термин является сокращением термина «асимптотическая устойчивость по Ляпунову».

Пусть E – равномерное пространство, а T – неограниченное подмножество неотрицательной действительной полупрямой $\mathbf{R}^+$ (основные частные случаи $T = \mathbf{R}^+$ и $T = \mathbf{Z}^+$).

Пусть U – открытое множество в E и пусть при всяком $t \in T$ задано отображение $f_t : U \to E$. Точка $x \in U$ называется асимптотически устойчивой относительно семейства $\{f_t\}_{t \in T}$, если она устойчива по Ляпунову относительно этого семейства и найдется окрестность $W \in U$ точки x такая, что для всякого $y \in W$ всякого окружения Ξ найдется $t\,(y,\ \Xi) \in T$ такое, что $(f_t y,\ f_t x) \in \Xi$ для всякого $t \geqslant t\,(y,\ \Xi)$.

Это определение конкретизируется так же, как выше было конкретизировано определение устойчивости. Так, асимптотическая устойчивость точки равномерного пространства E относительно отображения $f : E \to E$ определяется как асимптотическая устойчивость этой точки относительно семейства целых неотрицательных степеней этого отображения. Точка компактного топологического пространства E называется асимптотически устойчивой относительно отображения $f : E \to E$, если она становится таковой в результате наделения E той единственной равномерной структурой, которая согласуется с топологией компактного пространства E. Точка компактного дифференцируемого многообразия E называется асимптотически устойчивой относительно отображения $f : E \to E$, если она становится таковой в результате наделения E некоторой римановой (финслеровой) метрикой. Так как всякая финслерова метрика индуцирует на компактном дифференцируемом многообразии ту единственную равномерную структуру, которая имеется на нем как на компактном топологическом пространстве, то это определение эквивалентно предыдущему, взятому для дифференцируемого многообразия. Решение $x(\cdot) : t_0 + \mathbf{R}^+ \to V$ дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x,\ t)$, заданного на римановом (или, более общая ситуация, на финслеровом) многообразии V (расстояние в котором обозначается через d) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и для некоторого $\eta_0 \in \mathbf{R}_*^+$ всякое решение $y(\cdot)$ уравнения $\dot{y} = f(y,\ t)$, начинающееся в η_0 – окрестности точки $x(t_0)$ (т.е. удовлетворяющее условию $d\,(y(t_0),\ x(t_0)) < \eta_0$), удовлетворяет соотношению $d\,(y(t),\ x(t)) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

Наконец, решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x,\ t)$, заданного на компактном дифференцируемом многообразии V, называется асимптотически устойчивым, если оно становится таковым в результате наделения V некоторой римановой (или финслеровой) метрикой.

§ I. Экспоненциальная устойчивость

I. Экспоненциальная устойчивость – это более сильное, чем асимптотическая устойчивость, свойство точки (решения). Употребление этого термина не столь четко кодифицировано, как употребление терминов «устойчивость по Ляпунову» и «асимптотическая устойчивость». Различия в толковании этого термина могут начинаться уже в классической ситуации, когда рассматривается дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x,\ t)$, в n-мерном нормированном пространстве E. Первый вариант использования обсуждаемого сейчас термина состоит в следующем. Решение $x(\cdot) : t_0 + \mathbf{R}^+ \to E$ уравнения $\dot{x} = f(x,\ t)$, называется экспоненциально устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и найдется окрестность W точки $x(t_0)$ такая, что всякое решение $y(\cdot)$ этого уравнения, начинающееся в W (т.е. такое, что $y(t_0) \in W$, удовлетворяет неравенству

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |\, y(t) - x(t)\,| < 0$$

(здесь и всюду далее считаем, что $\ln 0$ по определению равен $-\infty$).

Напомним тот классический контекст, в котором иногда встречается сформулированное определение. Им является теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению, обычно формулируемая следующим образом.

Пусть в окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$ задано автономное дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$, правая часть которого непрерывно дифференцируема и обращается в точке x_0 в нуль. Пусть действительные части всех собственных значений производной отображения f, взятой в точке x_0, отрицательны. Тогда неподвижная точка x_0 (или решение $x(\cdot) \equiv x_0$) дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ устойчива по Ляпунову.

В приведенной формулировке иногда заменяют заключение более сильным: вместо «устойчива до Ляпунову» пишут «асимптотически устойчива». Гораздо реже, хотя и это делается иногда, заменяют заключение еще более сильным: «экспоненциально устойчива». В этой – самой сильной из трех – формулировке теорема остается верной и также принадлежит А.М.Ляпунову; правда, не всякое доказательство из числа излагаемых в учебниках годится без изменений в качестве доказательства этой усиленной теоремы. Можно пойти еще несколько дальше по пути усиления формулировки теоремы Ляпунова. Рассмотрим вот какой аспект сформулированного определения экспоненциальной устойчивости. В этом определении требуется, чтобы показатель Ляпунова возмущения решения (возмущением решения естественно называть разность $y(\cdot) - x(\cdot)$)

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |y(t) - x(t)|$$

был отрицателен для всякого решения $y(\cdot)$ уравнения $\dot{y} = f(y, t)$, начинающегося в некоторой окрестности точки $x(t_0)$. Не требуется никакой равномерности: и верхний предел имеет право зависеть от возмущенного решения $y(\cdot)$, и тот момент времени, начиная с которого $\frac{1}{t}\ln|y(t) - x(t)|$ остается меньше

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |y(t) - x(t)| + \varepsilon,$$

может зависеть не только от $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$, но и от возмущенного решения $y(\cdot)$.

Столь широкое толкование термина «экспоненциальная устойчивость» было бы вполне оправданным, если бы в формулировке теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению нельзя было утверждать большего. Но в действительности дело обстоит не так: формулировка теоремы остается верной и при другом определении экспоненциальной устойчивости, выражающем более сильное свойство решения уравнения $\dot{x} = f(x, t)$ и состоящем в следующем. Решение $x(\cdot)$ уравнения $\dot{x} = f(x, t)$ называется экспоненциально устойчивым (в этом втором толковании термина «экспоненциальная устойчивость»), если оно устойчиво по Ляпунову и для некоторой окрестности W точки $x(t_0)$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \sup_{y\in W} |y(t) - x(t)| < 0,$$

где $y(\cdot)$ – решение того же уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y$. Теорема Ляпунова верна и известна и при таком сужении толкования термина «экспоненциальная устойчивость». Можно было бы сохранить оба определения, обозначив свойство, фигурирующее во втором, более длинным словосочетанием «равноэкспоненциальная устойчивость», этимология которого ясна из приведенного выше комментария.

II. Есть еще один довод в пользу предпочтительного внимания к равноэкспоненциальной устойчивости. Для изложения этого довода воспроизведем здесь формулировку теоремы, доказанной в статье [3].

Пусть V – связное компактное дифференцируемое многообразие класса C^3. Множество S всех диффеоморфизмов класса C^1, отображающих V на V наделим C^1-топологией.

ТЕОРЕМА. В пространстве $S \times V$ имеется всюду плотное множество A типа G_δ, обладающее свойством: если для некоторого $(f, x) \in A$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln \| d(f^m)_x \| < 0,$$

то множество тех $(g, y) \in S \times V$, для которых точка y экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма g, есть окрестность точки (f, x).

Фигурирующая в формулировке этой теоремы норма $\|\cdot\|$ линейного отображения касательного пространства в касательное пространство определяется стандартным образом (как точная верхняя грань нормы образа вектора, принадлежащего единичной сфере) через нормы в касательных пространствах, индуцированные некоторой римановой метрикой. Сама эта норма зависит от римановой метрики, но показатель Ляпунова

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln \| d(f^m)_x \|$$

от выбора римановой метрики на V не зависит, так как вследствие компактности многообразия V всякие две римановы метрики на V эквивалентны в том смысле, что отношение индуцированных ими норм ненулевого касательного вектора заключено между двумя положительными числами, не зависящими от ненулевого касательного вектора. Для пояснения сформулированной теоремы в [3] приведено следующее определение экспоненциальной устойчивости точки относительно диффеоморфизма. Точка $y \in V$ названа там экспоненциально устойчивой относительно диффеоморфизма $g : V \to V$, если она устойчива по Ляпунову относительно g (т.е. для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ существует $\delta \in \mathbf{R}_*^+$ такое, что для всякого z из (δ-окрестности точки и имеет место неравенство $\sup_{m\in\mathbf{N}} d\,(g^m z,\, g^m y) < \varepsilon$) и для некоторой окрестности W точки y выполнено неравенство

$$\sup_{z\in W} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln d\,(g^m z,\, g^m y) < 0.$$

В этом определении d – расстояние на V, индуцированное некоторой римановой метрикой. Свойство точки быть устойчивой относительно диффеоморфизма не зависит от выбора римановой метрики на компактном многообразии V, так как вследствие упомянутой выше эквивалентности всяких двух римановых метрик на компактном многообразии эквивалентны и расстояния, индуцированные ими. Под эквивалентностью расстояний d_1, d_2 здесь подразумевается, что отношение $d_1(y, z)\,(d_2(y, z))^{-1}$, заключено между двумя положительными числами, не зависящими от точек $y \in V$, $z \in V$ ($y \neq z$). В силу этой эквивалентности показатель Ляпунова

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln d\,(g^m z,\, g^m y),$$

обусловленный, конечно, g, y, z, не зависит от выбора римановой метрики, индуцирующей расстояние d на компактном многообразии V.

В действительности в [3] доказана более сильная теорема, которая получается из сформулированной выше не изменением самой формулировки теоремы, а изменением определения экспоненциальной устойчивости, данного в [3] и воспроизведенного выше. Все изменение в определении состоит в перестановке знаков $\sup$ и $\overline{\lim}$ в неравенстве

$$\sup_{z\in W} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln d\,(g^m z,\, g^m y) < 0..$$

От этой перестановки левая часть неравенства может только возрасти и поэтому измененное неравенство является более сильным или таким же условием. Это изменение и есть переход от экспоненциальной устойчивости к тому, что мы временно называли в предыдущем пункте равноэкспоненциальной устойчивостью. Сформулируем теперь полностью определение, получающееся путем указанного изменения из воспроизведенного выше определения.

Точку $y \in V$ будем называть теперь экспоненциально устойчивой относительно диффеоморфизма $g : V \to V$, если она устойчива по Ляпунову относительно g и для некоторой окрестности W точки y выполнено неравенство

$$\lambda_W(g) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \sup_{z\in W} \frac{1}{m} \ln d\,(g^m z,\ g^m y) < 0..$$

Из доказанного ниже предложения 2 следует, что это определение перейдет в эквивалентное, если из него выбросить слова «она устойчива по Ляпунову относительно g и».

По поводу этого определения могут быть сделаны те же пояснения, что и по поводу определения из [3]. Показатель Ляпунова $\lambda_W(g)$ не зависит от выбора римановой метрики на компактном многообразии V, индуцирующей расстояние d, по той же причине, что и выше, т.е. вследствие эквивалентности всяких двух таких расстояний.

Теорема, сформулированная выше, доказана в [3] именно при таком «усиленном» понимании экспоненциальной устойчивости. То обстоятельство, что эта теорема верна и при такой трактовке, служит еще одним доводом в пользу предпочтения, которое мы оказываем тому, что в предыдущем пункте называлось равноэкспоненциальной устойчивостью. Это предпочтение побуждает нас не удлинять термин (т.е. не писать «равноэкспоненциальная устойчивость»), а усилить вышеуказанным способом смысл, вкладываемый в термин «экспоненциальная устойчивость».

III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дано дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x,\ t)$ на римановом (или, более общая ситуация, финслеровом) многообразии V, расстояние в котором обозначается через d. Решение $x(\cdot) : t_0 + \mathbf{R}^+ \to V$ этого уравнения называется экспоненциально устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову, и найдется окрестность W точки $x(t_0)$ такая, что

$$\lambda_W(f) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \sup_{y\in W} d\,(y(t),\ x(t)) < 0, \tag{1}$$

где $y(\cdot)$ – решение уравнения $\dot{y} = f(y,\ t)$, удовлетворяющее условию $y(t_0) = y$.

Далее через $(TV,\ \pi,\ V)$ обозначается касательное расслоение дифференцируемого многообразия V (π – проекция).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть дано конечномерное финслерово многообразие V. Пусть $f : V_x(t_0 + \mathbf{R}^+) \to TV$ – непрерывное отображение, имеющее непрерывную частную производную d_{f_x} и удовлетворяющее равенству $\pi_f(x,\ t) = x$ при всяких $x \in V$, $t \in t_0 + \mathbf{R}^+$. Пусть точка $x_0 \in V$ имеет окрестность W такую, что для всякого $y \in W$ решение начальной задачи $\dot{y} = f(y,\ t)$, $y(t_0) = y$ определено на $t_0 + \mathbf{R}^+$. Пусть выполнено неравенство (1). Тогда решение $x(\cdot)$ начальной задачи $\dot{x} = f(x,\ t)$, $x(t_0) = x_0$ экспоненциально устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В силу теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от начального значения решения задачи Коши (условия этой теоремы здесь выполнены) решение $y(\cdot)$ начальной задачи $\dot{y} = f(y,\ t)$, $y(t_0) = y$ единственно и непрерывно зависит от $y \in W$, если множество решений наделить компактно открытой топологией.

2. Для всякого $\lambda \in \lambda_W(f) + \mathbf{R}_*^+$ возьмем $T_\lambda \in t_0 + \mathbf{R}^+$ такое, что для всякого $t \in T_\lambda + \mathbf{R}^+$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{t} \ln \sup_{y \in W} d\,((yt),\ x(t)) < \lambda. \tag{2}$$

Существование такого T_λ следует из (1). Фиксируем теперь какое-нибудь

$$\lambda \in (\lambda_W(f),\ 0). \tag{3}$$

3. Пусть дано $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$. Возьмем $T(\varepsilon)$ такое, что

$$\exp(\lambda T(\varepsilon)) < \varepsilon. \tag{4}$$

Такое $T(\varepsilon)$ существует вследствие (3).

4. Положим

$$T(\lambda,\ \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \max\{T_\lambda,\ T(\varepsilon)\}. \tag{5}$$

5. Возьмем $\eta \in \mathbf{R}_*^+$ такое, что для всякой точки y из η-окрестности точки x_0 имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [0,\ T(\lambda,\ \varepsilon)]} d\,(y(t),\ x(t)) < \varepsilon, \tag{6}$$

где $y(\cdot)$ – решение начальной задачи $\dot{y} = f(y,\ t)$, $y(t_0) = y$, а $T(\lambda,\ \varepsilon)$ определено формулой (5). Существование такого η следует из п.1.

6. Для всякого y из пересечения W с η-окрестностью точки x_0 при всяком $t \in t_0 + \mathbf{R}^+$ имеет место неравенство $d\,(y(t),\ x(t)) < \varepsilon$ где $y(\cdot)$ – решение начальной задачи $\dot{y} = f(y,\ t)$, $y(t_0) = y$.

В самом деле, для всякого $t \in [0,\ T(\lambda,\ \varepsilon)]$ неравенство $d\,(y(t),\ x(t)) < \varepsilon$ следует из (6), а для всякого $t \in T(\lambda,\ \varepsilon) + \mathbf{R}^+ \subset T(\varepsilon) + \mathbf{R}^+$ (последнее включение следует из (5)) из (2) следует неравенство $d\,(y(t),\ x(t)) < \exp(\lambda t)$, правая часть которого меньше ε в силу (4).

7. Результат предыдущего пункта состоит в следующем: решение $x(\cdot)$ уравнения $\dot{x} = f(x,\ t)$ устойчиво по Ляпунову. Так как, кроме того, по условию имеется окрестность W точки $x(t_0)$ удовлетворяющая неравенству (1), то в силу определения 1 решение $x(\cdot)$ экспоненциально устойчиво. Предложение доказано.

IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точка x метрического пространства $(E,\ d)$ называется экспоненциально устойчивой относительно отображения $f : E \to E$, если она устойчива по Ляпунову относительно этого отображения и найдется окрестность W этой точки такая, что

$$\lambda_W(f) \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \ln \sup_{y \in W} d\,(f^m y,\ f^m x) < 0. \tag{7}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f : E \to E$ – непрерывное отображение метрического пространства $(E,\ d)$. Пусть точка $x \in E$ имеет окрестность W, удовлетворяющую неравенству (7). Тогда точка x экспоненциально устойчива относительно отображения f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\lambda \in \lambda_w(f) + \mathbf{R}_*^+$. Возьмем $M_\lambda \in \mathbf{N}$ такое, что для всякого $m \in M_\lambda + \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{m} \ln \sup_{y \in W} d\,(f^m y,\ f^m x) < \lambda. \tag{8}$$

Существование такого M_λ следует из (7).

Фиксируем теперь какое-нибудь

$$\lambda \in (\lambda_W(f),\ 0), \tag{9}$$

2. Пусть дано $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$. Возьмем $M(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что

$$\exp(\lambda\, M(\varepsilon)) < \varepsilon. \tag{10}$$

Существование такого $M(\varepsilon)$ следует из (9).

3. Положим

$$M(\lambda,\ \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \max\{M_\lambda,\ M(\varepsilon)\}. \tag{11}$$

4. Возьмем $\delta \in (0,\ \varepsilon)$ такое, что для всякой точки y из δ-окрестности точки x, для всякого $m \in \{1,\ \dots,\ M(\lambda,\ \varepsilon)\}$ имеет место неравенство

$$d\,(f^m y,\ f^m x) < \varepsilon. \tag{12}$$

Существование такого δ следует из непрерывности отображения $f: E \to E$. Из неравенства $\delta < \varepsilon$ следует, что (12) выполнено и при $m = 0$ для всякой точки y из δ-окрестности точки x.

5. Для всякого y из пересечения W с δ-окрестностью точки x при всяком $m \in \mathbf{Z}^+$ имеет место неравенство $d\,(f^m y,\ f^m x) < \varepsilon$. В самом деле, при всяком $m \in \{0,\ \dots,\ M(\lambda,\ \varepsilon)\}$ это доказано в п.4, а при всяком $m \in M(\lambda,\ \varepsilon) + \mathbf{N} \subset M(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ (последнее включение следует из (II)) из (8) следует неравенство $d\,(f^m y,\ f^m x) < \exp(\lambda m)$, правая часть которого меньше ε в силу (10).

6. Результат предыдущего пункта таков: точка x устойчива по Ляпунову относительно отображения f. А так как, кроме того, для некоторой окрестности W точки x выполнено неравенство (7), то в силу определения 2 точка x экспоненциально устойчива относительно отображения f. Предложение доказано.

V. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Решение $x(\cdot): t_0 + \mathbf{R}^+ \to E$ дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x,\ t)$ (E – векторное топологическое пространство) называется экспоненциально устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову (т.е. для всякой окрестности нуля U найдется окрестность нуля V такая, что для всякого $y \in x(t_0) + V$ решение $y(\cdot)$ уравнения $\dot{y} = f(y,\ t)$, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y$ единственно, определено на $t_0 + \mathbf{R}^+$ и таково, что $y(t) \in x(t) + U$ при всяком $t \in t_0 + \mathbf{R}^+$) и найдутся окрестность нуля W и число $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, для которых

$$\exp(\alpha t)\,(y(t) - x(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

равномерно для всех решений $y(\cdot)$ уравнения $\dot{y} = f(y,\ t)$, удовлетворяющих условию $y(t_0) \in x(t_0) + W$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Точка x векторного топологического пространства E называется экспоненциально устойчивой относительно отображения $f: E \to E$, если она устойчива по Ляпунову относительно этого отображения, и найдутся окрестность W точки x и число $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что

$$\exp(\alpha m)\,(f^m y - f^m x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$$

равномерно относительно $y \in W$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f: E \to E$ – непрерывное отображение векторного топологического пространства E. Пусть точка $x \in E$ имеет окрестность W такую, что для некоторого числа $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$ имеет место соотношение

$$\exp(\alpha m)\,(f^m y - f^m x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0,$$

где стремление к нулю – равномерное относительно $y \in W$. Тогда точка x экспоненциально устойчива относительно отображения f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Для всякой уравновешенной окрестности нуля $U \in E$ возьмем $M_U \in \mathbf{N}$ такое, что

$$\exp(\alpha m)(f^m y - f^m x) \in U$$

для всяких $m \in M_U + \mathbf{N}$, $y \in W$. Так как U – уравновешенное множество (т.е. $\beta U \subset U$, если $|\beta| \leqslant 1$), то отсюда следует, что

$$f^m y - f^m x \in U \tag{13}$$

для всяких $m \in M_U + \mathbf{N}$, $y \in W$.

2. По всякой окрестности нуля U найдем окрестность V точки x такую, что $V \subset x + U$ и

$$f^m y - f^m x \in U \tag{14}$$

для всяких $m \in \{1, \ldots, M_U\}$, $y \in V$. Существование V следует из непрерывности отображения $f : E \to E$ и вытекающей из нее непрерывности целых неотрицательных степеней этого отображения.

Из включения $V \subset x + U$ следует, что

$$y - x \in U \tag{15}$$

для всякого $y \in V$.

3. Из фраз, содержащих формулы (13) – (15), следует, что для всякой уравновешенной окрестности нуля U найдется окрестность V точки x такая, что

$$f^m y - f^m x \in U$$

для всяких $y \in W \bigcap V$.

4. Так как существует базис окрестностей нуля, состоящий из уравновешенных множеств, то доказанное верно и для всякой окрестности нуля $U \in E$.

5. Доказанное утверждение означает, что точка x устойчива по Ляпунову относительно отображения f. Так как, кроме того, выполнено соотношение

$$\exp(\alpha m)(f^m y - f^m x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$$

где стремление к нулю равномерно относительно $y \in W$, то в силу определения 4 точка x экспоненциально устойчива относительно отображения f. Предложение доказано.

VI. Определения 3 и 4 близко родственны, но все же речь в них идет не об одном и том же объекте. В одном случае рассматриваются решения дифференциального уравнения, в другом – образы точек при отображениях, равных степеням некоторого отображения. Определения 2 и 4 сравнивать друг с другом легче, чем сравнивать определение 3 с определением 4. Сравнивая определения 2 и 4, мы видим, что экспоненциальная устойчивость есть свойство, определенное для отображений метрического пространства и для отображений векторного топологического пространства. Конечно, «пересечение» велико: все нормированные пространства и все локально выпуклые пространства со счетным достаточным множеством полунорм входят в это «пересечение». Но все же ни один из этих двух наборов пространств не содержится в другом и это побуждает искать более широкий класс пространств, для отображений которых можно было бы определить экспоненциальную устойчивость.

Пока речь шла об устойчивости по Ляпунову и об асимптотической устойчивости, вопросов не возникало: общим полем деятельности здесь явились равномерные пространства. Определение устойчивости по Ляпунову точки относительно семейства отображений, изложенное в п. 1 введения, является тем определением, из которого все остальные определения устойчивости по Ляпунову получаются как частные случаи.

Асимптотическую устойчивость можно определить в том же духе, что и было сделано в п.7 введения.

Но как быть с определением экспоненциальной устойчивости? В определении этого вида устойчивости фигурирует скорость стремления к нулю и, казалось бы, для определения экспоненциальной устойчивости точки равномерного пространства относительно семейства отображений этого пространства необходимо иметь что-то вроде градуировки в множестве окружений.

Несмотря на это кажущееся препятствие, определение экспоненциальной устойчивости может быть дано и для любого равномерного пространства.

VII. Пусть E – равномерное пространство, а T – неограниченное множество точек неотрицательной действительной полупрямой $\mathbf{R}^+$ (основные частные случаи: $T = \mathbf{R}^+$ и $T = \mathbf{Z}^+$). Пусть U – открытое множество в E. Пусть при всяком $t \in T$ задано отображение $f_t : U \to E$. Семейство этих отображений будем обозначать через $\{f_t\}_{t \in T}$ или, короче, через f.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка $x \in U$ называется экспоненциально устойчивой относительно семейства f, если для всякого окружения Ξ найдутся окружение H и действительные числа $\alpha > 0$, $c > 0$ такие, что для всякого $t \in T$ имеет место включение

$$((f_t \times f_t)(H \cap (U \times U)))^{[c \exp \alpha t]} \subset \Xi.$$

Поясним использованные в этом определении обозначения. Для всякого множества $M \subset U \times U$ и отображения $f : U \to E$ через $(f \times f) M$ обозначается множество всех пар (fy, fz), где $(y, z) \in M$. Квадратными скобками здесь обозначена целая часть действительного числа. Наконец, обозначение M^m, где $M \subset E \times E$ вводится индукцией по $m \in M$, а именно: полагаем $M^1 = M$, $M^m = M^{m-1} \circ M$ для всякого целого $m > 1$; при этом через $P \circ Q$, где $P \subset E \times E$, $Q \subset E \times E$, обозначается множество тех пар $(p, q) \subset E \times E$, для которых существует $r \in E$ такое, что $(p, q) \in P$, $(r, q) \in Q$ (все эти обозначения имеются в [2, с. 202]).

Непосредственно из определения устойчивости по Ляпунову (см. д.1 введения), определения 5 и определения равномерного пространства (см.[2, гл. 2, § 1]) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если точка $x \in U$ экспоненциально устойчива относительно семейства f, то она устойчива по Ляпунову относительно этого семейства.

На принятом в этом пункте уровне абстракции можно определить не только экспоненциальную устойчивость, но и показатель Ляпунова семейства f в любой точке $x \in U$. Вот как выглядит соответствующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Показателем Ляпунова $\lambda(f, x)$ семейства f в точке $x \in U$ называется точка расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$, равная по определению точной нижней грани множества таких действительных чисел λ, что для всякого окружения Ξ найдутся окружение H и действительное число $c > 0$ (H и c зависят от λ и Ξ) такие, что

$$((f_t \times f_t)(H \cap (U \times U)))^{[c \exp(-\lambda t)]} \subset \Xi$$

при всех $t \in T$, если множество таких, чисел λ не пусто, и равная по определению $+\infty$, если множество таких чисел λ пусто.

Следующее предложение, вытекающее непосредственно из определений 5, 6, представляет собой обобщение простейшего критерия экспоненциальной устойчивости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для того, чтобы точка $x \in U$ была экспоненциально устойчивой относительно семейства f, необходимо и достаточно, чтобы показатель $\lambda(f, x)$ был отрицателен.

Цитированная литература

1. Ляпунов А.М. Собр. соч.: В 6 т. М.; Л., 1956. Т.2. 496 с.

2. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., 1968. 272 с.

3. Миллионщиков В.М. Типичность стабильной устойчивости по первому приближению // Математические заметки. 1984. Т.36. Вып. 4. С. 517—530.