УДК 517.938

В. В. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. XX

Эта, заключительная, статья цикла представляет собой сводку основных результатов [1—19]. Статья состоит из трех глав, каждую из которых можно читать отдельно (обозначения разъяснены в той же главе).

ГЛАВА 1

1. Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$). Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ евклидову структуру. Рассмотрим непрерывное отображение $A(\cdot):\mathfrak{B}\to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{x\in\mathfrak{B}}\|\,A(x)\,\|\leqslant +\infty.$$

Множество всех таких отображений $A(\cdot)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также A) наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой.

$$d\,(A_1,\ A_2)\underset{\text{def}}{=}\sup_{x\in\mathfrak{B}}\|\,A_1(x)-A_2(x)\,\|.$$

Так определенное полное метрическое пространство обозначим через $\mathcal{J}$.

2. При всяких $A\in\mathcal{J}$, $x\in\mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}}=A(f^t x)\mathfrak{x}\ \ (\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n). \tag{1}$$

Обозначим через $\lambda_1((A,\ x))\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n((A,\ x))$ *показатели Ляпунова* этой системы (см. [20], а также [21, 22]).

3. *Центральный показатель* $\Omega_k((A,\ x))$ системы (1) определяется при всяких $A\in\mathcal{J}$, $x\in\mathfrak{B}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ формулой (см. [21], § 8, 13)

$$\begin{aligned}\Omega_k((A,\ x))\underset{\text{def}}{=}&\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(\mathbf{R}^n)}\ \inf_{\tau\in\mathbf{R}^+_*}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\times\\ &\times\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|\,\mathfrak{X}\,((j+1)\,\tau,\ j\tau;\ A,\ x)_{\mathfrak{X}\,(jr,\ 0;\ A,\ x)\mathbf{R}^{n-k+1}}\,\|,\end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathfrak{X}\,(\sigma,\ \theta;\ A,\ x)$ — оператор Коши системы (1), т. е. отображение, которое значению всякого решения системы (1) в точке $t=\theta$ ставит в соответствие значение этого же решения в точке $t=\sigma$; через $\mathfrak{X}_C$ обозначается сужение на множество C отображения $\mathfrak{X}$. Норма линейного отображения $\mathfrak{X}_{\mathbf{R}^i}$ определяется стандартным образом:

$$\|\,\mathfrak{X}_{\mathbf{R}^i}\,\|\underset{\text{def}}{=}\sup_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^i_*}(|\,\mathfrak{X}\mathfrak{x}\,|\cdot|\,\mathfrak{x}\,|^{-1});$$

$G_i(\mathbf{R}^n)$ — множество i-мерных векторных подпространств пространства $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^+_*$ — множество всех положительных вещественных чисел. Вместо Ω_1 пишут также Ω.

Центральный показатель $\Omega^{(k)}((A,\ x))$ системы (1) определяется при всяких $A\in\mathcal{J}$, $x\in\mathfrak{B}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ формулой (см. [21], § 8, 13)

$$\Omega^{(k)}((A,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{R}_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|\mathfrak{X}((j+1)\tau,\ j\tau;\ A,\ x)_{\mathfrak{X}(jr,\ 0;\ A,\ x)E_{n-k+1}(A,\ x)}\|, \tag{2'}$$

где векторное подпространство $E_{n-k+1}(A,\ x)$ пространства $\mathbf{R}^n$ определено формулой

$$E_{n-k+1}(A,\ x) \underset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n : \lambda(A,\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_k((A,\ x))\},$$

в которой

$$\lambda(A,\ x) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}\ln|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}| & \text{при } \mathfrak{x}\in\mathbf{R}_*^n \underset{\text{def}}{=} \mathbf{R}^n\setminus\{0\}, \\ -\infty \ \text{ при } \mathfrak{x}=0. \end{cases}$$

Для всяких $A\in\mathcal{J}$, $x\in\mathfrak{B}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ имеют место неравенства $\lambda_k((A,\ x))\leqslant\Omega_k((A,\ x))\leqslant\Omega^{(k)}((A,\ x))$.

4. Теорема. *В пространстве $\mathcal{J}\times\mathcal{B}$ найдется всюду плотное множество C типа G_δ, обладающее свойствами:*

а) при всяких $(A,\ x)\in C$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\Omega_k(\cdot):\mathcal{J}\times\mathfrak{B}\times\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке $(A,\ x)$;

б) при всяких $(A,\ x)\in C$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место равенство $\lambda_k((A,\ x))=\Omega_k((A,\ x))=\Omega^{(k)}((A,\ x))$

в) при всяких $(A,\ x)\in C$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ имеет место альтернатива: либо

$$\lambda_{n-k}((A,\ x))=\lambda_{n-k+1}((A,\ x)),$$

либо подпространство $L^k(A,\ x)$ векторного пространства $L(A,\ x)$ всех решений системы (1), состоящее из решений), показатели Ляпунова которых $\leqslant\lambda_{n-k+1}((A,\ x))$, экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения (в векторном пространстве $L(A,\ x)$),* т. е. для всякого алгебраического дополнения L^{n-k} подпространства $L^k(A,\ x)$ (в векторном пространстве $L(A,\ x)$) существуют вещественные числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для всяких решений $\mathfrak{x}(\cdot)\in L^{n-k}$, $\mathfrak{y}(\cdot)\in L^k(A,\ x)$ для всяких вещественных чисел $t\geqslant s\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|\mathfrak{x}(t)|\cdot|\mathfrak{y}(s)|\geqslant\alpha|\mathfrak{x}(s)|\cdot|\mathfrak{y}(t)|\exp(\beta(t-s)).$$

ГЛАВА 2

§ 1

1. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие*). Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f:V^n\to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию**)

$$\sup_{x\in V^n}\max\{\|df_x\|,\ \|(df_x)^{-1}\|\}<+\infty..$$

---

*) Показатель Ляпунова нулевого решения по определению равен $-\infty$.

*) Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

**) Через df_x обозначается производная отображения f в точке x. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

Множество S наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\tilde{d}(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,\ gx)} \{\min\{s(u),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} + \|\varphi_u dg_x - df_x\|\};;$$

здесь x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n; $G(y,\ z)$ — множество всех кусочно-гладких путей u, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; $s(u)$ — длина пути u; $\rho(\cdot,\ \cdot)$ — расстояние между точками многообразия V^n; φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути u.

Замечание 1. Если V^n компактно (т. е. V^n — замкнутое многообразие), то метрика $\tilde{d}(\cdot,\ \cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$, определяемая формулой

$$\tilde{d}_1(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,\ gx)} \{s(u) + \|\varphi_u dg_x - df_x\|\}.$$

Замечание 2. Пусть $V^n = E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\tilde{d}(\cdot,\ \cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{\tilde{d}}(\cdot,\ \cdot)$, определяемая формулой***):

$$\tilde{\tilde{d}}(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} |fx_0 - gx_0| + \sup_{x\in E^n} \|fx_x - gx_x\|.$$

2. Для всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ определяется *показатель Ляпунова*

$$\lambda_{n-k+1}((f,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(T_xV^n)} \max_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^k_*} \overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in\mathbf{N})}}} \frac{1}{m} \ln|df^m \mathfrak{x}|, \tag{3}$$

где $G_k(T_xV^n)$ — множество всех k-мерных векторных подпространств касательного пространства T_xV^n многообразия V^n в точке x, $\mathbf{R}^k_* = \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$.

Через $S \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $\tilde{d}(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n.

3. *Центральный показатель* $\Omega_{n-k+1}((f,\ x))$ определяется при всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ формулой

$$\Omega_{n-k+1}((f,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(T_xV^n)} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln\|df^\tau|_{df^{j\tau}\mathbf{R}^k}\| \tag{4}$$

($X|_C$ — сужение на множество C отображения X).

Центральный показатель $\Omega^{(n-k+1)}((f,\ x))$ определяется при всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ формулой

$$\Omega^{(n-k+1)}((f,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln\|df^\tau|_{df^{j\tau}E_k(f,\ x)}\|, \tag{4$'$}$$

где векторное подпространство $E_k(f,\ x)$ касательного пространства T_xV^n определено формулой

$$E_k(f,\ x) \underset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{x} \in T_xV^n : \lambda(f,\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{n-k+1}((f,\ x))\},$$

в которой

***) В случае $V^n = E^n$ касательные пространства стандартным образом отождествляются с E^n. После этого отождествления разность $df_x - dg_x$ (и норма этой разности) приобретает смысл.

$$\lambda(f, x) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{t\to+\infty \\ (m\in\mathbf{N})}} \dfrac{1}{m} \ln |df^m \mathfrak{x}| & \text{при} \quad |\mathfrak{x}| \neq 0, \\ -\infty \quad \text{при} \ |\mathfrak{x}| = 0. \end{cases}$$

Для всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *имеет место неравенство* $\lambda_k((f, x)) \leqslant \Omega_k((f, x)) \leqslant \Omega^{(k)}((f, x))$.

4. Теорема. *В пространстве* $S \times V^n$ *найдется всюду плотное множество* D *типа* G_δ, *обладающее свойствами:*

а) при всяких $(f, x) \in D$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *функция* $\Omega_k(\cdot): S \times V^n \times \mathbf{R}$ *полунепрерывна сверху в точке* (f, x);

б) при всяких $(f, x) \in D$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *имеет место равенство* $\lambda_k((f, x)) = \Omega_k((f, x)) = \Omega^{(k)}((f, x))$;

в) при всяких $(f, x) \in D$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *имеет место альтернатива:*
либо

$$\lambda_{n-k}((f, x)) = \lambda_{n-k+1}((f, x)),$$

либо подпространство $E_k(f, x)$ *экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения в пространстве* T_xV^n, т. е. для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} подпространства (в $E_k(f, x)$ векторном пространстве T_xV^n) существуют числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in E_k(f, x)$ и всяких целых чисел $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|df^t\mathfrak{x}| \cdot |df^s\mathfrak{y}| \geqslant \alpha\, |df^s\mathfrak{x}| \cdot |df^t\mathfrak{y}| \exp(\beta(t - s)).$$

§ 2

1. Для всякого $j \in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in V^n} \rho(fx, jx) < +\infty$ (если V^n компактно (т. е. V^n — замкнутое многообразие), то $S_j = S$ для всякого $j \in S$).

При всяком $j \in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\tilde{d}_1(f, g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,\, gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\} \tag{5}$$

(если $V^n = E^n$, то $\tilde{d}_1(f, g) = \sup\limits_{x\in V^n} (|fx - gx| + \| df_x - dg_x \|)$).

Через $S_j \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_j (с топологией, индуцированной метрикой $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$) и топологического пространства V^n.

2. Для всякого $j \in S$ для всяких $f \in S_j$, $x \in V^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *показатель Ляпунова* $\lambda_{n-k+1}((f, x))$ определяется формулой (3), а центральные показатели $\Omega_{n-k+1}((f, x))$, $\Omega^{(n-k+1)}((f, x))$ — формулами (4), (4′).

3. При всяком $j \in S$ имеет место следующая

Теорема. *В пространстве* $S_j \times V^n$ *найдется всюду плотное множество* D_j *типа* G_δ, *обладающее свойствами:*

а) при всяких $(f, x) \in D_j$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *функция* $\Omega_k(\cdot): S_j \times V^n \times \mathbf{R}$ *полунепрерывна сверху в точке* (f, x);

б) при всяких $(f,\ x)\in D_j$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство* $\lambda_k((f,\ x))=\Omega_k((f,\ x))=\Omega^{(k)}((f,\ x))$*;*

в) при всяких $(f,\ x)\in D_j$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место альтернатива:*
либо

$$\lambda_{n-k}((f,\ x))=\lambda_{n-k+1}((f,\ x)),$$

либо подпространство $E_k(f,\ x)$ *экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения в пространстве* T_xV^n, т. е. для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} подпространства $E_k(f,\ x)$ (в векторном пространстве T_xV^n) существуют числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для всяких $\mathfrak{x}\in l^{n-k}$, $\mathfrak{y}\in E_k(f,\ x)$, и всяких целых чисел $t\geqslant s\geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|\,df^t\mathfrak{x}\,|\cdot|\,df^s\mathfrak{y}\,|\geqslant\alpha\,|\,df^s\mathfrak{x}\,|\cdot|\,df^t\mathfrak{y}\,|\exp(\beta\,(t-s)).$$

§ 3

1. Множество J_1V^n всех 1-струй (т. е. троек $(x,\,y,\,L)$, где $x\in V^n$, $y\in V^n$, $L\in\mathrm{Hom}\,(T_xV^n,\ T_yV^n)$) наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\rho_1((x_1,\ y_1,\ L_1),\ (x_2,\ y_2,\ L_2))\underset{\text{def}}{=}\inf_{\substack{u\in G(x_2,\,x_1)\\ v\in G(y_1,\,y_2)}}\{s(u)+s(v)+\|\,\varphi_v L_2\varphi_u-L_1\,\|\}.$$

Через S^u обозначим множество всех диффеоморфизмов $f\in S$ 1-струйные расширения которых *равномерно непрерывны**[)].

Для всякого $j\in S^u$ положим $S_j^u\underset{\text{def}}{=}S_j\bigcap S^u$. Через $S_j^u\times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_j^u (с топологией, индуцированной метрикой $\tilde d_1(\cdot,\ \cdot)$ (см. формулу (5))) и топологического пространства V^n.

2. Для всякого $j\in S^u$ для всяких $f\in S_j^u$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *показатель Ляпунова* $\lambda_{n-k+1}((f,\ x))$ определяется формулой (3), а *центральные показатели* $\Omega_{n-k+1}((f,\ x))$, $\Omega^{(n-k+1)}((f,\ x))$ — формулами (4), (4′).

3. Для всякого $j\in S^u$ имеет место следующая

Теорема. *В пространстве* $S_j^u\times V^n$ *найдется всюду плотное множество* D_j^u *типа* G_δ *обладающее свойствами:*

а) при всяких $(f,\ x)\in D_j^u$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *функция* $\Omega_k(\cdot):S_j^u\times V^n\to\mathbf{R}$ *полунепрерывна сверху в точке* $(f,\ x)$*;*

б) при всяких $(f,\ x)\in D_j^u$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство* $\lambda_k((f,\ x))=\Omega_k((f,\ x))=\Omega^{(k)}((f,\ x))$*;*

в) при всяких $(f,\ x)\in D_j^u$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место альтернатива:*
либо

$$\lambda_{n-k}((f,\ x))=\lambda_{n-k+1}((f,\ x)),$$

---

*[)] Иными словами, диффеоморфизм $f\in S$ принадлежит множеству в S^u том и только в том случае, если отображение $\mathrm{jet}_1 f:(V^n,\ \rho)\to(J_1V^n,\ \rho_1)$, ставящее в соответствие точке $x\in V^n$ тройку, $(x,\,fx,\,df_x)$ равномерно непрерывно.

либо подпространство $E_k(f,\, x)$ *экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения в пространстве* T_xV^n*,* т. е. для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} подпространства $E_k(f,\, x)$ (в векторном пространстве T_xV^n) существуют числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in E_k(f,\, x)$ и всяких целых чисел $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|\, df^t \mathfrak{x} \,| \cdot |\, df^s \mathfrak{y} \,| \geqslant \alpha \,|\, df^s \mathfrak{x} \,| \cdot |\, df^t \mathfrak{y} \,| \exp(\beta\,(t-s)).$$

ГЛАВА 3

1. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие*⁾. Потребуем, чтобы оно было *равномерным* (или *равномерно картографируемым),* т. е. чтобы нашлись числа $\sigma_1 > 0$, $\sigma > 0$ такие, что для всякой точки $x \in V^n$ найдется карта**⁾ $\{U_\sigma(x),\ h_x : U_\sigma(x) \to R^n\}$ такая, что***⁾

$$|\, g_{ij}(x;\ \hat{y}) \,| + |\, g^{ij}(x;\ \hat{y}) \,| + \left| \frac{\partial g_{ij}(x;\ \hat{y})}{\partial \hat{y}^k} \right| \leqslant \sigma_1$$

для всяких $x \in V^n$, $\hat{y} \in h_x U_\sigma(x)$, $i,\, j,\, k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$.

2. Множество J_1V^n всех 1-струй (т. е. троек $(x,\, y,\, L)$, где $x \in V^n$, $y \in V^n$, $L \in \mathrm{Hom}\,(T_xV^n,\ T_yV^n)$) наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\rho_1((x_1,\, y_1,\, L_1),\ (x_2,\, y_2,\, L_2)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\substack{u \in G(x_2,\, x_1)\\ v \in G(y_1,\, y_2)}} \{s(u) + s(v) + \|\, \varphi_v L_2 \varphi_u - L_1 \,\|\};$$

здесь $G(y,\, z)$ — множество всех кусочно-гладких путей w, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; $s(w)$ — длина пути w φ_w — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути w; $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

3. Через S^u обозначим множество всех диффеоморфизмов $f : V^n \to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих совокупности следующих двух условий****⁾:

1) $\sup\limits_{x \in V^n} \max\,\{\|\, df_x \,\|,\ \|\,(df_x)^{-1}\,\|\} < +\infty$;

2) 1-струйное расширение*****⁾ $\mathrm{jet}_1 f$ диффеоморфизма f равномерно непрерывно отображает $(V^n,\ \rho)$ в $(J_1V^n,\ \rho_1)$.

---

*⁾ Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

**⁾ Через $U_\sigma(x)$ обозначается σ окрестность точки x в римановом многообразии, т. е. $U_\sigma(x) = \{y \in V^n : \rho\,(y,\, x) < \sigma\}$, где $\rho\,(\cdot,\ \cdot)$ — расстояние на V^n.

***⁾ Через $g_{ij}(x,\ \hat{y})$ обозначаются компоненты метрического тензора в карте $\{U_\sigma(x),\ h_x : U_\sigma(x) \to R^n\}$ (в точке $\hat{y} = (\hat{y}^1,\ \ldots,\ \hat{y}^n) \in U_\sigma(x)$), через (g^{ij}) — матрица, обратная (g_{ij}).

****⁾ Через df_x обозначается производная отображения f в точке x.

4. Для всякого $j \in S^u$ обозначим через S_j^u подмножество множества S^u, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in V^n} \rho\,(fx,\ gx) < +\infty$$

(если V^n — замкнутое многообразие, то $S_j^u = S^u$ для всякого $j \in S^u$).

При всяком $j \in S^u$ множество S_j^u наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\tilde{d}_{\mathrm{jet}_1}(f,\ g) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \rho_1((\mathrm{jet}_1 f)\,x,\ (\mathrm{jet}_1 g)\,x)$$

(если $V^n = E^n$, то

$$\tilde{d}_{\mathrm{jet}_1}(f,\ g) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x \in V^n}(|\,fx - gx\,| + \|\,df_x - dg_x\,\|)\,).$$

Через $S_j^u \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_j^u (с топологией, индуцированной метрикой $\tilde{d}_{\mathrm{jet}_1}(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n.

5. Теорема. *При всяком $j \in S^u$ в пространстве $S_j^u \times V^n$ имеется всюду плотное множество D_j^u типа G_δ такое, что всякая точка $(f,\ x) \in D_j^u$ обладает свойством: множество* *)

$$\left\{ y \in V^n : \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln \rho\,(f^m y,\ f^m x) < 0 \right\}$$

содержит погруженное в V^n дифференцируемое многообразие V^-; касательное пространство этого многообразия в точке x есть

$$\{\mathfrak{x} \in T_x V^n : \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln |\,df^m \mathfrak{x}\,| < 0\}.$$

6. Сформулируем отдельно результат третьей главы для случая $V^n = E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Формулировка дается так, что ее можно читать независимо от предыдущего текста.

Через S^u обозначим множество диффеоморфизмов f пространства E^n на себя, имеющих равномерно непрерывную производную такую, что

$$\sup_{x \in E^n} \max\,\{\|\,df_x\,\|,\ \ \|\,(df_x)^{-1}\,\|\} < +\infty.$$

Для $j \in S$ через S_j^u обозначим множество всех $f \in S^u$, удовлетворяющих, условию $\sup_{x \in E^n} |\,fx - jx\,| < +\infty$; в множестве S_j^u задается расстояние

$$\tilde{d}_{\mathrm{jet}_1}(f,\ g) = \sup_{x \in E^n}(|\,fx - jx\,| + \|\,d(f-g)_x\,\|).$$

Теорема*). *При всяком $j \in S^u$ в метрическом пространстве $S_j^u \times E^n$ имеется всюду плотное множество D_j^u типа G_δ такое, что всякая точка $(f,\ x) \in D_j^u$ обладает свойством: множество*

$$\left\{ y \in E^n : \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln |\,f^m y - f^m x\,| < 0 \right\}$$

*****) Напомним, что 1-струйное расширение $\mathrm{jet}_1 f : V^n \to J_1 V^n$ дифференцируемого отображения $f : V^n \to V^n$ определяется формулой $(\mathrm{jet}_1 f)_x = (x,\ fx,\ df_x)$ ($x \in V^n$).

*) Полагаем $\ln 0 = -\infty$.

содержит погруженное в E^n *дифференцируемое многообразие* V^-*; касательное пространство* V^- *в точке* x *есть*

$$\left\{ z \in E^n : \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln |d(f^m)_x (z-x)| < 0 \right\}.$$

7. В случае, когда многообразие V^n замкнутое, теорема п. 5 выглядит проще всего, так как в этом случае всякий диффеоморфизм $f: V^n \to V^n$ класса C^1, отображающий V^n на себя, удовлетворяет условиям 1), 2) п. 3 и всякие два диффеоморфизма $f: V^n \to V^n$, $j: V^n \to V^n$ удовлетворяют неравенству $\sup_{x\in V^n} \rho(fx, jx) < +\infty$, вследствие чего $S_j^u = S^u = S$ для всякого $j \in S$, где S — множество всех диффеоморфизмов класса C^1, отображающих V^n на V^n. Кроме того, в этом случае утверждение этой теоремы дифференциально-топологически инвариантно, так как топология, индуцированная на S метрикой $\tilde{d}_{\mathrm{jet}_1}(\cdot, \cdot)$ (называемая C^1-топологией), не зависит от выбора римановой метрики $\delta(\cdot, \cdot)$ на замкнутом дифференцируемом многообразии V^n.

Приведем формулировку теоремы п. 5 для замкнутого многообразия V^n (эта формулировка может быть понята без чтения предыдущего текста)**).

Пусть V^n — n-мерное связное замкнутое дифференцируемое многообразие (класса C^3). Множество S всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на V^n, наделяется C^1-топологией (подробнее: берется любой конечный атлас $\{U_i,\ h_i: U_i \to R^n\}_{i\in J}$ многообразия V^n; в покрытие $\{U_i\}_{i\in j}$ вписывается покрытие $\{V_i\}_{i\in j}$ такое, что $\overline{V}_i \subset U_i$ ($i \in J$); сходимость последовательности диффеоморфизмов в C^1-топологии есть по определению равномерная сходимость их самих и их первых производных в картах $\{V_i,\ h_i|_{V_i}: V_i \to R^n\}$ (легко видеть, что от выбора указанных атласов и вписанных покрытий эта топология не зависит)).

Теорема. *В пространстве* $S \times V^n$ *имеется всюду плотное множество* D *типа* G_δ *такое, что для всякого* $(f, x) \in D$ *множество точек* $y \in V^n$ *таких, что точки* $f^m x$, $f^m y$ *сближаются при* $m \to +\infty$ *с экспоненциальной скоростью, содержит погруженное в* V^n *дифференцируемое многообразие* V^-*; касательное пространство многообразия* V^- *в точке* x *есть множество всех тех касательных векторов* $\mathfrak{x}$ *многообразия* V^n *в точке* x, *для которых* $df^m\mathfrak{x}$ *стремится при* $m \to +\infty$ *к нулю с экспоненциальной скоростью* (скорость сближения (стремления к нулю) измеряется в координатах атласа $\{V_i,\ h_i|_{V_i}: V_i \to R^n\}_{i\in J}$.

Примечание. В статье [15] на с. 609 в формуле (4) в верхнем индексе вместо $ym, -1$ должно быть $y, m-1$; на с. 610 (строка 3 снизу) скобка должна закрываться не в конце строки, а после цифры 3; на с. 613 (строка 5 сверху) перед знаком неравенства должен быть нижний индекс c.

Литература

1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1344—1356.
2. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1503—1510.
3. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 11. С 1866—1870.
4. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 2. С. 241—257.

**) Следующая далее формулировка теоремы была доложена автором 20 апреля 1983 г. на конференции «Ломоносовские чтения» в МГУ.

5. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 5. С. 753—779.
6. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 6. С 980—991.
7. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 8. С 1366—1376.
8. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 11. С. 1889—1896.
9. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 223—236.
10. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С. 771—776.
11. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 6. С. 946—955.
12. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 9, С. 1489—1498.
13. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 11. С. 1905—1915.
14. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 2. С. 216—223.
15. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 4. С. 607—618.
16. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 8. С. 1338—1350.
17. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 10. С. 1697—1711.
18. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 2. С. 255—267.
19. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 640—658.
20. Ляпунов А. М. // Собр. соч.: В 6 т. М.; Л., 1956. Т. 2.
21. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
22. Изобов Н. А. // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М., 1974. Т. 12. С. 71—146.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 15 апреля 1983 г.