УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. XIX

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть V^n — n-мерное связное дифференцируемое (класса C^3) многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика $\delta(\cdot,\cdot)$ (класса C^2). Через (TV^n, π, V^n) обозначаем касательное расслоение многообразия V^n (π — проекция, TV^n — пространство касательного расслоения, стандартным способом наделенное структурой дифференцируемого многообразия (класса C^2)). С помощью фиксированной выше римановой метрики $\delta(\cdot,\cdot)$ многообразие V^n стандартным способом наделяется структурой метрического пространства, которое обозначается через (V^n, ρ), где $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние.

Требуем, чтобы метрическое пространство (V^n, ρ) было полным.

2. Через S обозначаем множество всех диффеоморфизмов f класса: C^1, биективно отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию
$$\max\{|||\, df\,|||,\ |||\,(df)^{-1}\,|||\} < +\infty; \tag{B.1}$$
здесь
$$|||\, df\,||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \| df_x \|, \tag{B.2}$$
$$|||\,(df)^{-1}\,||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \| (df_x)^{-1} \|, \tag{B.3}$$
df_x — производная отображения f в точке x, $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

3. Для всякого $j\in S$ через S_j обозначаем подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов, удовлетворяющих неравенству
$$\sup_{x\in V^n} \rho(fx,\ jx) < +\infty.$$

При всяком $j\in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния $d_1(\cdot,\cdot)$, определяемого для всяких $f\in S_j$, $g\in S_j$ формулой (в [1] это — формула (55))
$$d_1(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \\ \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,\, gx)} \{ s(u) + \|\varphi_u dg_x - df_x\| + \|(\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1}\| \}; \tag{B.4}$$
здесь: 1) для всяких $y\in V^n$, $z\in V^n$ через $G(y,\ z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; при этом под кусочно-гладким путем u, идущим в многообразии V^n из точки z в точку y, понимается непрерывное, имеющее кусочно-непрерывную производную отображение u отрезка [0, 1] в многообразие V^n, причем значение u_0 этого отображения в точке 0 равно z, а его значение u_1 в точке 1 равно y (через u_t обозначаем значение отображения u в точке t);

2) $s(u) \underset{\text{def}}{=} \int_0^1 [\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)]^{1/2}\, dt$ (B.5)

— длина пути u;

3) $\varphi_u : \pi^{-1}(z) \to \pi^{-1}(y)$ — преобразование, ставящее в соответствие всякому вектору $\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(z)$ результат его параллельного перенесения вдоль пути $u \in G(y, z)$.

При всяком $j \in S$ метрическое пространство (S_j, d_1) полно [2, предложение 2].

4. При всяком $j \in S$ множество S_j наделяется также другой структурой метрического пространства: расстояние $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$ определяется для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ формулой (в [1] это — формула (56))

$$\tilde{d}_1(f, g) \underset{\text{def}}{=} \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx, gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\}. \tag{B.6}$$

При всяком $j \in S$ расстояние $d_1(\cdot, \cdot)$ и расстояние $\tilde{d}(\cdot, \cdot)$ индуцируют на S_j одну и ту же топологию (см. [1], п. 5).

5. Множество J_1V^n струй первого порядка (или 1-струй), т. е. троек (x, y, L), где*) $x \in V^n$, $y \in V^n$, $L \in \mathrm{Hom}(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y))$, наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния, определяемого для всяких $(x_1, y_1, L_1) \in J_1V^n$, $(x_2, y_2, L_2) \in J_1V^n$, формулой

$$\rho_1((x_1, y_1, L_1), (x_2, y_2, L_2)) \underset{\text{def}}{=} \underset{\text{def}}{=} \inf_{\substack{u \in G(x_2, x_1) \\ v \in G(y_1, y_2)}} \{s(u) + s(v) + \| \varphi_v L_2 \varphi_u - L_1 \|\} \tag{B.7}$$

(см. предложение [3]).

Отображение $p_1 : J_1V^n \to V^n$ определяется формулой

$$p_1(x, y, L) \underset{\text{def}}{=} x. \tag{B.8}$$

Отображение $p_1 : (J_1V^n, \rho_1) \to (V^n, \rho)$, определенное формулой (B.8), равномерно непрерывно (см. [4], предложение 1).

6. Через S^u обозначается множество всех тех диффеоморфизмов $f \in S$, 1-струйные расширения которых равномерно непрерывны; напомним, что 1-струйным расширением дифференцируемого отображения $f : V^n \to V^n$ называется отображение $\mathrm{jet}_1 f : (V^n, \rho) \to (J_1V^n, \rho_1)$, определенное формулой

$$(\mathrm{jet}_1 f)\, x = (x, fx, df_x) \quad (x \in V^n). \tag{B.9}$$

При всяком $j \in S^u$ через S_j^u обозначается множество всех тех диффеоморфизмов $f \in S_j$, 1-струйные расширения которых равномерно непрерывны; иными словами,

$$S_j^u \underset{\text{def}}{=} S_j \bigcap S^u \text{ при всяком } j \in S^u. \tag{B.10}$$

При всяком $j \in S^u$ множество S_j^u замкнуто в метрическом пространстве (S_j, d_1) и метрическое пространство (S_j^u, d_1) полно (см. [4], предложения 5, 6).

*) Через $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ обозначается множество всех линейных отображений векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2.

7. Через $S_j^u \times V^n$ будем обозначать произведение топологических пространств S_j^u и V^n. При этом топология на $S_j^u \subset S_j$ индуцирована топологией на S_j, которая в свою очередь индуцирована метрикой $d_1(\cdot, \cdot)$, определенной формулой (В.4) (та же топология индуцируется на S_j метрикой $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$, определенной формулой (В.6), см. п. 4 введения).

Если риманово многообразие (V^n, δ) равномерно картографируемо (см. п. 8 ниже), то в силу предложения [5] та же самая топология индуцируется на S_j метрикой $\tilde{d}_{\mathrm{jet}_1}(\cdot, \cdot)$, определяемой формулой

$$\tilde{d}_{\mathrm{jet}_1}(f,\ g) = \sup_{x\in V^n} \rho_1((\mathrm{jet}_1 f)\, x,\ (\mathrm{jet}_1 g)\, x). \tag{В.11}$$

8. Напомним, что риманово многообразие (V^n, δ) называется равномерно картографируемым, если существуют числа $\sigma_1 \in \mathbf{R}_*^+$, $\sigma \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всякого $x \in V^n$ найдется карта **)

$$\{U_\sigma(x),\ h_x : U_\sigma(x) \to R^n\}\ \ (h_x x = 0) \tag{В.12}$$

такая, что *)

$$|\, g_{ij}(x;\ y)| + |\, g^{ij}(x;\ y)| + \left| \frac{\partial g_{ij}(x;\ y)}{\partial y^k} \right| \leqslant \sigma_1 \tag{В.13}$$

для всяких $x \in V^n$, $y \in h_x U_\sigma(x)$, $i \in \{1,\ \dots,\ n\}$, $j \in \{1,\ \dots,\ n\}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$.

Евклидово пространство E^n и всякое замкнутое (т. е. компактное) риманово многообразие равномерно картографируемо (это хорошо известно и легко доказывается).

§ 1

Пусть риманово многообразие (V^n, δ) *равномерно картографируемо* (см. п. 8 введения). Тогда при всяком $j \in S^u$ имеет место следующая

Теорема. *В пространстве $S_j^u \times V^n$ имеется всюду плотное множество D_j^u типа G_δ, такое, что для всякого $(f,\ x) \in D_j^u$ диффеоморфизм f имеет в точке x экспоненциально устойчивое многообразие, касательное пространство которого в точке x есть* **)

$$\{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda(f,\ x) < 0\}. \tag{1}$$

Пояснение к формулировке теоремы. Говорят, что диффеоморфизм $f : V^n \to V^n$ имеет в точке $x \in V^n$ *экспоненциально устойчивое многообразие* $V^- = iW^k$, *если существует взаимно однозначное погружение (инъективная иммерсия***)) i некоторого*

**) Через $U_\sigma(x)$ обозначается σ-окрестность точки x в римановом многообразии (V^n, δ), т. е. $U_\sigma(x) = \{y \in V^n : \rho(y,\ x) < \sigma\}$.

*) Через $g_{ij}(x;\ y)$ обозначаются компоненты метрического тензора в карте $\{U_\sigma(x),\ h_x : U_\sigma(x) \to R^n\}$ в точке $y \in h_x U_\sigma(x)$, через (g^{ij}) обозначается матрица, обратная матрице (g_{ij}).

**)
$$\lambda(f,\ \mathfrak{x}) \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{1}{m} \ln |df^m \mathfrak{x}| \ \text{ при } |\mathfrak{x}| \neq 0 \ \ (\mathfrak{x} \in TV^n), \\ -\infty \ \text{ при } |\mathfrak{x}| = 0 \ \ (\mathfrak{x} \in TV^n). \end{cases}$$

***) Напомним, что погружением (иммерсией) дифференцируемого многообразия W^k (класса C^1) в дифференцируемое многообразие V^n класса C^1 называется непрерывно дифференцируемое отображение W^k в V^n, производная которого в каждой точке имеет нулевое ядро (т. е. невырождена). Касательным пространством iW^k в точке iv называется diT_vW^k (где di — производная отображения i, T_vW^k —

дифференцируемого многообразия W^k $(k \in \mathbf{Z}^+)$ *в дифференцируемое многообразие* V^n, *такое, что*

1) $x = iw$ *для некоторого* $w \in W^k$;

2) существуют число $\eta \in \mathbf{R}^+_*$ *и функция* $C(\cdot): W^k \to \mathbf{R}^+$, *сужение которой на некоторую компактную окрестность точки* w *в* W^k *есть ограниченная функция, такие, что для всяких* $v \in W^k$, $s \in \mathbf{Z}^+$ *имеет место неравенство*

$$\rho\,(f^s(iv), f^s x) \leqslant C(v)\exp(-\eta s). \tag{2}$$

Доказательству теоремы предпошлем некоторые вспомогательные построения и несколько лемм.

1) Пусть дано $j \in S^u$. В силу теоремы [6] в пространстве $S^u_j \times V^n$ имеется всюду плотное множество D^u_j типа G_δ, обладающее следующими свойствами:

а) для всяких $(f,\, x) \in D^u_j$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место равенство

$$\lambda_k((f,\, x)) = \Omega^{(k)}((f,\, x)), \tag{3}$$

б) при всяких $(f,\, x) \in D^u_j$, $k \in \{2,\ \ldots,\ n\}$ имеет место альтернатива:
либо

$$\lambda_{k-1}((f,\, x)) = \lambda_k((f,\, x)) \tag{4}$$

либо подпространство*)

$$E_{n-k+1}(f,\, x) \underset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\, \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_k((f,\, x))\} \tag{5}$$

экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения в пространстве $\pi^{-1}(x)$, т. е. для всякого алгебраического дополнения l^{k-1} подпространства $E_{n-k+1}(f,\, x)$ (в векторном пространстве $\pi^{-1}(x)$) существуют $\alpha \in \mathbf{R}^+_*$, $\beta \in \mathbf{R}^+_*$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{k-1}$, $\mathfrak{y} \in E_{n-k+1}(f,\, x)$ и всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$, выполнено неравенство

$$|\,df^t\mathfrak{x}\,| \cdot |\,df^s\mathfrak{y}\,| \leqslant \alpha\,|\,df^s\mathfrak{x}\,| \cdot |\,df^t\mathfrak{y}\,| \exp(\beta\,(t-s)), \tag{6}$$

где $|\,\mathfrak{z}\,| \underset{\text{def}}{=} [\delta\,(\mathfrak{z},\, \mathfrak{z})]^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{z} \in TV^n$.

П о я с н е н и я. а) Для всяких $f \in S^u_j$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *показатель Ляпунова* $\lambda_k((f,\, x))$ определяется формулой

$$\lambda_k((f,\, x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\pi^{-1}(x))} \ \sup_{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^{n-k+1}} \lambda(f,\, \mathfrak{x}), \tag{7}$$

где $G_m(\pi^{-1}(x))$ — множество всех m-мерных подпространств касательного пространства $\pi^{-1}(x)$ многообразия V^n в точке x, $|\,\mathfrak{y}\,| = (\delta\,(\mathfrak{y},\, \mathfrak{y}))^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{y} \in TV^n$ (в [7] это**) формула (1)).

б) Для всяких $f \in S^u_j$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ центральный показатель $\Omega^{(k)}((f,\, x))$ определяется формулой (в [7] это — формула (3))

$$\Omega^{(k)}((f,\, x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\theta \in \mathbf{N}} \ \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\theta} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|\, df^\theta|_{df^{j\theta}E_{n-k+1}(f,\, x)} \|, \tag{8}$$

где $E_{n-k+1}(f,\, x)$ определено формулой (5).

2) В [8] доказано, что величина $\lambda\,(f,\, \mathfrak{x})$ для всяких $f \in S$, $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$ равна либо одному из показателей

$$\lambda_1((f,\, x)) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n((f,\, x)), \tag{9}$$

касательное пространство W^k в точке v).

*) См. сноску к формуле (1).

**) См. предыдущую сноску.

либо $-\infty$, и там же (предложение 8) доказано, что

$$\{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_k((f,\ x))\}$$

при всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ есть векторное подпространство в $\pi^{-1}(x)$, размерность которого при $k=1$ равна n, а при $k>1$ при условии

$$\lambda_{k-1}((f,\ x)) > \lambda_k((f,\ x))$$

равна $n-k+1$; точнее говоря, в [8] все это доказано для более общей ситуации; зафиксировав $f \in S$, положив $E = TV^n$, $p = \pi$, $B = V^n$ и определив гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ формулой

$$\mathfrak{H}m = (X^m,\ \chi^m) = (df^m,\ f^m),$$

получаем рассматриваемый сейчас частный случай ситуации [8].

Следовательно, для всяких $f \in S$, $x \in V^n$ таких, что $\lambda_n((f,\ x)) < 0$, имеем

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) < 0\} = \{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) \leqslant \max\,\{\lambda_k((f,\ x)) : \lambda_k((f,\ x)) <\\ < 0\}\} \underset{(9)}{=} \{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{k\,(f,\,x)}((f,\ x))\},\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$k\,(f,\ x) \underset{\text{def}}{=} \min\,\{k \in \{1,\ \ldots,\ n\} : \lambda_k((f,\ x)) < 0\}. \tag{11}$$

В силу написанного в первой фразе этого пункта, при $k\,(f,\ x) = 1$ имеем $\dim\,\{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{k\,(f,\,x)}((f,\ x))\} = n$, а при $k\,(f,\ x) \in \{2,\ \ldots,\ n\}$ имеем

$$\lambda_{k\,(f,\,x)-1}((f,\ x)) \underset{(11)}{\geqslant} 0 \underset{(11)}{>} \lambda_{k\,(f,\,x)}((f,\ x)), \tag{12}$$

откуда опять-таки в силу написанного в первой фразе этого пункта следует равенство

$$\dim\,\{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{k\,(f,\,x)}((f,\ x))\} = n - k\,(f,\ x) + 1;$$

таким образом, во всех случаях

$$\dim\,\{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{k\,(f,\,x)}((f,\ x))\} = n - k\,(f,\ x) + 1.$$

Отсюда в силу (10) следует равенство

$$\dim\,\{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) < 0\} = n - k\,(f,\ x) + 1, \tag{13}$$

если $\lambda_n((f,\ x)) < 0$.

3) Пусть дана пара $(f,\ x) \in D_j^u$ (напомним, что множество D_j^u введено в п. 1)) такая, что $\lambda_n((f,\ x)) < 0$. Положим

$$q = n - k\,(f,\ x) + 1. \tag{14}$$

А. В силу написанного в п. 1) имеем:

$$\text{а)}\ \Omega^{(n-q+1)}((f,\ x)) < 0 = \lambda_{n-q+1}((f,\ x)) \overset{(11)}{\underset{(13)}{<}} 0, \tag{15}$$

б) *если* $q \neq n$, *то*

$$\lambda_{n-q}((f,\ x)) \overset{(12)}{\underset{(14)}{>}} \lambda_{n-q+1}((f,\ x)),$$

т. е. первая возможность альтернативы, сформулированной в подпункте б) п. 1), при $k = n-q+1$ отпадает, следовательно, осуществляется вторая возможность этой альтернативы, т. е. *подпространство*

$$\begin{aligned}E_q(f,\ x) \underset{(5)}{=} \{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{n-q+1}((f,\ x))\} \overset{(10)}{\underset{(14)}{=}}\\ \overset{(10)}{\underset{(14)}{=}} \{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda\,(f,\ \mathfrak{x}) < 0\}\end{aligned} \tag{16}$$

(в силу формул (13), (14) размерность этого подпространства равна q*) слоя* $\pi^{-1}(x)$ *экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения в слое* $\pi^{-1}(x)$.

4) Пусть дано $f \in S$. В силу леммы из введения [9] отображение $f:(V^n,\ \rho) \to (V^n,\ \rho)$ равномерно непрерывно. Следовательно, существует

$$\sigma_f \in (0, \sigma) \tag{17}$$

такое, что для всякого $y \in V^n$ имеет место включение

$$f(U_{\sigma_f}(y)) \subset U_\sigma(fy). \tag{18}$$

Поэтому формула

$$f_y = h_{fy} f(h_y)^{-1}|_{h_y U_{\sigma_f}(y)} \tag{19}$$

определяет при всяком $y \in V^n$ отображение $\widehat{f}_y : h_y U_{\sigma_f}(y) \to h_{fy} U_\sigma(fy)$, причем

$$\widehat{f}_y 0 \underset{(19)}{\overset{(B.12)}{=}} 0. \tag{20}$$

Пусть дано $x \in V^n$. Положим при всяком $m \in \mathbf{N}$

$$T_m \underset{\text{def}}{=} \widehat{d}(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0 = \tau_0 d(\widehat{f}_{f^{m-1}x})(\tau_0)^{-1},, \tag{21}$$

где τ_0 — стандартное отображение «отождествления» касательного пространства к R^n в точке 0 с самим R^n (подробнее это объяснено б [9]). Так как $f: V^n \to V^n$ — диффеоморфизм (и, следовательно, линейное отображение $df_y : \pi^{-1}(y) \to \pi^{-1}(fy)$ невырождено при всяком $y \in V^n$), то из формул (19), (21) следует: T_m при всяком $m \in \mathbf{N}$ есть невырожденное линейное преобразование.

Лемма 1. *Пусть $f \in S$, $x \in V^n$. Тогда семейство $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ невырожденных линейных операторов $R^n \to R^n$, определенных формулой (21), удовлетворяет неравенству*[)]*

$$\sup_{m\in\mathbf{N}} \max\{\|T_m\|_c,\ \|T_m^{-1}\|_c\} < +\infty .$$

Доказательство. При всяком $m \in \mathbf{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
\|(df_{f^{m-1}x})^{-1}\| = &\sup_{\mathfrak{y}\in\pi_*^{-1}(f,\,x)} \{[\delta\,((df_{f^{m-1}x})^{-1}\mathfrak{y},\ (df_{f^{m-1}x})^{-1}\mathfrak{y})]^{1/2} \times \\
&\times[\delta\,(\mathfrak{y},\ \mathfrak{y})]^{-1/2}\} \underset{(21)}{\overset{(19)}{=}} \sup_{\mathfrak{y}\in\pi_*(f,\,x)} \{[\delta\,((d\,(h_{f^{m-1}x})_{f^{m-1}x})^{-1}\tau_0^{-1}(\widehat{d}\,(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0)^{-1} \times \\
&\times \tau_0 d\,(h_{f^m x})_{f^m x}\mathfrak{y},\ (d\,(h_{f^{m-1}x})_{f^{m-1}x})^{-1}\tau_0^{-1}(\widehat{d}\,(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0)^{-1} \times \\
&\times \tau_0 d\,(h_{f^m x})_{f^m x}\mathfrak{y})]^{1/2}[\delta\,(\mathfrak{y},\ \mathfrak{y})]^{-1/2}\} = \\
&= \sup_{a\in\mathbf{R}_*^n} \{[\delta\,((d\,(h_{f^{m-1}x})_{f^{m-1}x})^{-1}\tau_0^{-1}(\widehat{d}\,(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0)^{-1}a, \\
&(d\,(h_{f^{m-1}x})_{f^{m-1}x})^{-1}\tau_0^{-1}(\widehat{d}\,(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0)^{-1}a)]^{1/2} \times \\
&\times[\delta\,((d\,(h_{f^m x})_{f^m x})^{-1}\tau_0^{-1}a,\ (d\,(h_{f^m x})_{f^m x})^{-1}\tau_0^{-1}a)]^{-1/2}\} \underset{(5.12)}{\overset{(19)-(21)}{=}} \\
&\underset{(5.12)}{\overset{(19)-(21)}{=}} \sup_{a\in\mathbf{R}_*^n} \{|(\widehat{d}\,(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0)^{-1}a\,|_{f^{m-1}x,\,0}|\,a\,|_{f^m x,\,0}^{-1}\} \underset{(5.11)}{=} \\
&\underset{(5.11)}{=} \|(\widehat{d}\,(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0)^{-1}\|_{f^m x,\,0}^{f^{m-1}x,\,0} .
\end{aligned} \tag{22}$$

---

*[)] Через $\|\cdot\|_c$ обозначается норма линейного оператора $R^n \to R^n$, индуцированная нормой $|\,y\,|_c = \left(\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ в R^n.

При всяком $m \in \mathbf{N}$ имеем

$$\| T_m \|_c \underset{(21)}{=} \| \widehat{d}(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0 \|_x \underset{(5.13)-(5.14)}{\overset{(5.9)}{\leqslant}}$$

$$\underset{(5.13)-(5.14)}{\overset{(5.9)}{\leqslant}} \| 1_{R^n} \|^{(c)}_{f^m x,\, 0} \| \widehat{d}(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0 \|^{f^m x,\, 0}_{f^{m-1}x,\, 0} \| 1_{\mathbf{R}^n} \|^{f^{m-1}x,\, 0}_{(c)} \underset{\text{лемма 1 [5]}}{\overset{(19)-(21)}{\leqslant}} \tag{23}$$

$$\underset{\text{лемма 1 [5]}}{\overset{(19)-(21)}{\leqslant}} d^{-1}\overline{d} \, \| \widehat{d}(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0 \|^{f^m x,\, 0}_{f^{m-1}x,\, 0} \underset{(9.27)}{=} d^{-1}\overline{d} \, \| df_{f^{m-1}x} \| \underset{(\text{B}.2)}{\leqslant} d^{-1}\overline{d} \, \||df\||,$$

$$\| T_m^{-1} \|_c \underset{(21)}{=} \| (\widehat{d}(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0)^{-1} \|_c \underset{(5.13),\ (5.14)}{\overset{(5.9)}{\leqslant}}$$

$$\underset{(5.13),\ (5.14)}{\overset{(5.9)}{\leqslant}} \| 1_{R^n} \|_{f^{m-1}x,\, 0} \| (\widehat{d}(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0)^{-1} \|^{f^{m-1}x,\, 0}_{f^m x,\, 0} \| 1_{R^n} \|^{f^m x,\, 0}_{(c)} \underset{\text{лемма 1 [5]}}{\overset{(\text{B}.12)}{\leqslant}}$$

$$\underset{\text{лемма 1 [5]}}{\overset{(\text{B}.12)}{\leqslant}} d^{-1}\overline{d} \, \| (\widehat{d}(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0)^{-1} \|^{f^{m-1}x,\, 0}_{f^m x,\, 0} \underset{(22)}{\leqslant} \tag{24}$$

$$\underset{(22)}{\leqslant} d^{-1}\overline{d} \, \| (df_{f^{m-1}x})^{-1} \| \underset{(\text{B}.3)}{\leqslant} d^{-1}\overline{d} \, \||(df)^{-1}\||.$$

Тогда

$$\sup_{m \in \mathbf{N}} \max \{ \| T_m \|_c ,\ \| T_m^{-1} \|_c \} \underset{(24)}{\overset{(23)}{\leqslant}} d^{-1}\overline{d} \max \{ \||df\||,\ \||(df)^{-1}\|| \} \underset{(\text{B}.1)}{<} +\infty.$$

Лемма 1 доказана.

5) Пусть дано $f \in S$. Из равномерной картографируемости риманова многообразия (V^n, δ) в силу леммы 4 [5] следует, что для $\sigma_f \in \mathbf{R}_*^+$ найдется $r_f \in \mathbf{R}_*^+$ такое, что для всякого $y \in V^n$ имеет место включение

$$\{ \widehat{y} \in R^n : | \widehat{y} |_c < r_f \} \subset h_y U_{\sigma_f}(y),$$

т. е. шар радиуса r_f содержится в области определения отображения $\widehat{f}_y$ (см. формулу (19)) при всяком $y \in V^n$.

Пусть дано $x \in V^n$. Положим при всяком $m \in \mathbf{N}$

$$W_m \underset{\text{def}}{=} \widehat{f}_{f^{m-1}x} |_{\{ \widehat{y} \in R^n : |\widehat{y}|_c < r_f \}} . \tag{25}$$

Лемма 2. *Пусть риманово многообразие* (V^n, δ) *равномерно картографируемо. Пусть* $f \in S^u$, $x \in V^n$. *Тогда отображения* T_m, W_m ($m \in \mathbf{N}$), *определенные формулами (21), (25), обладают следующим свойством: для всякого* $\gamma \in \mathbf{R}_*^+$ *найдется* $r_\gamma \in (0,\, r_f)$ *такое, что*

$$\sup_{m \in \mathbf{N}} | (W_m \widehat{y}_1 - T_m \widehat{y}_1) - (W_m \widehat{y}_2 - T_m \widehat{y}_2) |_c < \gamma \, | \widehat{y}_1 - \widehat{y}_2 |_c \tag{26}$$

для всяких $\widehat{y}_1 \in R^n$, $\widehat{y}_2 \in R^n$, *удовлетворяющих неравенствам* $| \widehat{y}_1 |_c < r_\gamma$, $| \widehat{y}_2 |_c < r_\gamma$.

Доказательство. В силу формул (21), (25) эта лемма следует из предложения [9] в силу леммы 1 [9]. Лемма 2 доказана.

6) В условиях п. 3) положим

$$\mathbf{R}^q \underset{\text{def}}{=} \tau_0 d(h_x)_x E_q(f,\, x). \tag{27}$$

Векторное подпространство $E_q(f,\, x)$ слоя $\pi^{-1}(x)$ в силу формул (5), (10), (13), (14) имеет размерность q; линейные отображения $d(h_x)_x : \pi^{-1}(x) \to \widehat{\pi}^{-1}(0)$, $\tau_0 : \widehat{\pi}^{-1}(0) \to R^n$ невырожденные, следовательно, множество $\mathbf{R}^q$, определенное формулой (27), есть q-мерное векторное подпространство пространства R^n. Центральный показатель семейства $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ относительно подпространства $\mathbf{R}^q$ определяется формулой (см. приложение, где приведены также библиографические указания по этому поводу)

$$\Omega(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}},\ \mathbf{R}^q) \underset{\text{def}}{=}$$
$$\underset{\text{def}}{=} \inf_{\theta\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\theta}\sum_{j=0}^{m-1} \ln \|\Pi((j+1)\theta,\ j\theta)_{\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q}\|_c, \tag{28}$$

где

$$\Pi_0 \underset{\text{def}}{=} T_0 = 1_{R^n}, \tag{29}$$

$$\Pi_m \underset{\text{def}}{=} T_m\Pi_{m-1}\ (m\in\mathbf{N}), \tag{30}$$

$$\Pi(m,\ k) = \Pi_m\Pi_k^{-1}\ (m\in\mathbf{Z}^+,\ k\in\mathbf{Z}^+). \tag{31}$$

Лемма 3. *Пусть риманово многообразие* $(V^n,\ \delta)$ *равномерно картографируемо. Пусть* $j\in S^u$, $(f,\ x)\in D_j^u$, $\lambda_n((f,\ x))<0$ *(см. п. 1). Пусть* $q=n-k(f,\ x)+1$, *где*

$$k(f,\ x) \underset{\text{def}}{=} \min\{k\in\{1,\ \ldots,\ n\}: \lambda_k((f,\ x))<0\}.$$

Тогда для семейства $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, *определенного формулой (21), и подпространства* $\mathbf{R}^q$, *определенного формулой (27), имеет место равенство*

$$\Omega(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}},\ \mathbf{R}^q) = \Omega^{(n-q+1)}((f,\ x)). \tag{32}$$

Доказательство. а) При всяком $m\in\mathbf{N}$ имеем

$$\begin{aligned} T_m &\underset{(21)}{=} \widehat{d}\,(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0 \underset{(21)}{=} \tau_0 d\,(\widehat{f}_{f^{m-1}x})_0\tau_0^{-1} \underset{(19)}{=} \\ &\underset{(19)}{=} \tau_0 d\,(h_{f^m x})_{j^m x} df_{f^{m-1}x} d\,((h_{f^{m-1}x})^{-1})_0\tau_0^{-1}. \end{aligned} \tag{33}$$

При всяком $m\in\mathbf{Z}^+$ имеет место равенство

$$\Pi_m = \tau_0 d\,(h_{f^m x})_{f^m x} df_x^m d\,((h_x)^{-1})_0\tau_0^{-1}; \tag{34}$$

в самом деле, при $m=0$ равенство (34) в силу формулы (29) превращается в равенство $1_{\mathbf{R}^n} = \tau_0 d\,(h_{f^0x})_{f^0x} df_x^0 d\,((h_x)^{-1})_0\tau_0^{-1}$, которое, очевидно, верно, так как $f^0 \underset{\text{def}}{=} 1_{V^n}$; пусть формула (34) верна при некотором $m\in\mathbf{Z}^+$, тогда

$$\begin{aligned} \Pi_{m+1} &\underset{(30)}{=} T_{m+1}\Pi_m \overset{(33)}{\underset{(34)}{=}} \tau_0 d\,(h_{f^{m+1}x})_{f^{m+1}x} df_{f^m x} d\,((h_{f^m x})^{-1})_0 \times \\ &\times d\,(h_{f^m x})_{f^m x} df_x^m d\,((h_x)^{-1})_0\tau_0^{-1}, \end{aligned}$$

откуда в силу формул

$$d\,((h_{f^m x})^{-1})_0 = (d\,(h_{f^m x})_{f^m x})^{-1},\ df_{f^m x} df_x^m = df_x^{m+1} \tag{35}$$

следует равенство

$$\Pi_{m+1} = \tau_0 d\,(h_{f^{m+1}x})_{f^{m+1}x} df_x^{m+1} d\,((h_x)^{-1})_0\tau_0^{-1},$$

т. е. равенство (34) с $m+1$ вместо m; тем самым формула (34) индукцией по $m\in\mathbf{Z}^+$ доказана при всяком $m\in\mathbf{Z}^+$.

б) При всяких $m\in\mathbf{Z}^+$, $k\in\mathbf{Z}^+$ имеем

$$\begin{aligned} \Pi(m,\ k) &\underset{(31)}{=} \Pi_m\Pi_k^{-1} \underset{(34)}{=} \tau_0 d(h_{f^m x})_{f^m x} df_x^m d\,((h_x)^{-1})_0\tau_0^{-1}[\tau_0 d\,(h_{f^k x})_{f^k x} df_x^k \times \\ &\times d\,((h_x)^{-1})_0\tau_0^{-1}]^{-1} = \tau_0 d\,(h_{f^m x})_{f^m x} df_x^m (df_x^k)^{-1}(d\,(h_{f^k x})_{f^k x})^{-1}\tau_0^{-1} \underset{(35)}{=} \\ &\underset{(35)}{=} \tau_0 d\,(h_{f^m x})_{f^m x} df_{f^k x}^{m-k} d\,((h_{f^k x})^{-1})_0\tau_0^{-1}. \end{aligned} \tag{36}$$

в) При всяких $\theta\in\mathbf{N}$, $j\in\mathbf{Z}^+$ имеем

$$\Pi((j+1)\,\theta,\ j\theta) \underset{(36)}{=}$$

$$\underset{(36)}{=} \tau_0 d\,(h_{f^{(j+1)\theta}x})_{f^{(j+1)\theta}x}\, df^{\theta} d\,((h_{f^{j\theta}x})^{-1})_0\, \tau_0^{-1} \underset{(35)}{=} \tag{37}$$

$$\underset{(35)}{=} \tau_0 (d\,((h_{f^{(j+1)\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df^{\theta} d\,((h_{f^{j\theta}x})^{-1})_0\, \tau_0^{-1},$$

$$\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q \overset{(27)}{\underset{(34)}{=}}$$

$$\overset{(27)}{\underset{(34)}{=}} \tau_0 d\,(h_{f^{j\theta}x})_{f^{j\theta}x}\, df_x^{j\theta} d\,((h_x)^{-1})_0\, d\,(h_x)_x E_q(f,\ x) \underset{(35)}{=} \tag{38}$$

$$\underset{(35)}{=} \tau_0 (d\,((h_{f^{j\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df_x^{j\theta} E_q(f,\ x),$$

$$\|\,\Pi((j+1)\,\theta,\ j\theta)_{\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q}\,\|_c \underset{\text{def}}{=} \sup_{\mathfrak{y}\in\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q_*} \{|\,\Pi((j+1)\,\theta,\ j\theta)\,\mathfrak{y}\,|_c\,|\,\mathfrak{y}\,|_c^{-1}\},, \tag{39}$$

при этом*)

$$\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q_* = (\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q)_*, \tag{40}$$

так как $\Pi_m : R^n \to R^n$ невырожденные линейные преобразования (поскольку T_m таковы). Так как $\tau_0 (d\,((h_{f^m x})^{-1})_0)^{-1} : \pi^{-1}(f_x^m) \to R^n$ есть невырожденное отображение (при всяком $m \in \mathbf{Z}^+$), то при всяких $\theta \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{Z}^+$ имеем

$$\|\,\Pi((j+1)\,\theta,\ j\theta)_{\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q}\,\|_c \overset{(39)}{\underset{(40)}{=}} \sup_{\mathfrak{z}\in d\,((h_{f^{j\theta}x})^{-1})_0\tau_0^{-1}\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q_*} \{|\,\Pi((j+1)\,\theta,\ j\theta)\tau_0 \times$$

$$\times (d\,((h_{f^{j\theta}x})^{-1})_0)^{-1}\mathfrak{z}\big|_c \big|\tau_0 (d\,((h_{f^{j\theta}x})^{-1})_0)^{-1}\mathfrak{z}\,|_c^{-1} \overset{(37)}{\underset{(38)}{=}} \tag{41}$$

$$\overset{(37)}{\underset{(38)}{=}} \sup_{\mathfrak{z}\in df^{j\theta}E_q(f,\ x)_*} \{\tau_0 (d\,((h_{f^{(j+1)\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df^{\theta}\mathfrak{z}\,|_c|\,\tau_0 (d\,((h_{f^{j\theta}x})^{-1})_0)^{-1}\mathfrak{z}\,|_c^{-1}\}.$$

г) При всяких $\theta \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{Z}^+$, $\mathfrak{z} \in df^{j\theta}\pi^{-1}(x)$, $\omega \in \{0,\ 1\}$ имеем

$$\begin{gathered} |\,\tau_0 (d\,((h_{f^{(i+\omega)\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df^{\omega\theta}\mathfrak{z}\,|_c \underset{(5.14)}{\leqslant} \|\,1_{R^n}\,\|^{(c)}_{f^{(j+\omega)\theta}x,\ 0} \times \\ \times |\,\tau_0 (d\,((h_{f^{(i+\omega)\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df^{\omega\theta}\mathfrak{z}\,|_{f^{(j+\omega)\theta}x,\ 0}, \end{gathered} \tag{42}$$

$$|\,\tau_0 (d\,((h_{f^{(i+\omega)\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df^{\omega\theta}\mathfrak{z}\,|_{f^{(j+\omega)\theta}x,\ 0} \underset{(5.12)}{=} [\delta\,(df^{\omega\theta}\mathfrak{z},\ df^{\omega\theta}\mathfrak{z})]^{1/2}. \tag{43}$$

В силу леммы 1 [5] (см. также формулу (B.12)) имеем

$$\|\,1_{R^n}\,\|^{(c)}_{f^{(i+\omega)\theta}x,\ 0} \leqslant d^{-1}. \tag{44}$$

При всяких $\theta \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{Z}^+$, $\mathfrak{z} \in df^{j\theta}\pi^{-1}(x)$, $\omega \in \{0,\ 1\}$ имеем

$$\begin{gathered} [\delta\,(df^{\omega\theta}\mathfrak{z},\ df^{\omega\theta}\mathfrak{z})]^{\frac{1}{2}} \overset{(5.13)}{\underset{(43)}{\leqslant}} \\ \overset{(5.13)}{\underset{(43)}{\leqslant}} \|\,1_{R^n}\,\|_{(c)}^{f^{(j+\omega)\theta}x,\ 0} |\,\tau_0 (d\,((h_{f^{(j+\omega)\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df^{\omega\theta}\mathfrak{z}\,|_c\,. \end{gathered} \tag{45}$$

В силу леммы 1 [5] (см. также формулу (B.12))

$$\|\,1_{R^n}\,\|_{(c)}^{f^{(j+\omega)\theta}x,\ 0} \leqslant \bar{d}. \tag{46}$$

При всяких $\theta \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{Z}^+$, $\mathfrak{z} \in df^{j\theta}\pi_*^{-1}(x)$, $\omega \in \{0,\ 1\}$ имеем

---

*) Здесь используется обозначение $L_* = L \setminus \{0\}$.

$$(\overline{d})^{-1} \underset{(45),\ (46)}{\leqslant} |\tau_0(d\,((h_{f^{(j+\omega)\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df^{\omega\theta}\mathfrak{z}|_c \times \\ \times[\delta\,(df^{\omega\theta}\mathfrak{z},\ df^{\omega\theta}\mathfrak{z})]^{-1/2} \underset{(42)-(44)}{\leqslant} d^{-1} \tag{47}$$

(поясним, что $df^{\omega\theta}\mathfrak{z}=\mathfrak{z}$ при $\omega=0$, так как $f^0=1_{V^n}$). При всяких $\theta\in\mathbf{N}$, $j\in\mathbf{Z}^+$, $\mathfrak{z}\in df^{j\theta}\pi_*^{-1}(x)$ имеют место неравенства

$$(\overline{d})^{-1}d \underset{(47)}{\leqslant} \{|\tau_0(d\,((h_{f^{(j+1)\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df^{\theta}\mathfrak{z}|_c |\tau_0(d\,((h_{f^{j\theta}x})^{-1})_0)^{-1}\mathfrak{z}|_c^{-1}\}\times \\ \times\{[\delta\,(df^{\theta}\mathfrak{z},\ df^{\theta}\mathfrak{z})]^{1/2}[\delta\,(\mathfrak{z},\ \mathfrak{z})]^{-1/2}\}^{-1} \underset{(47)}{\leqslant} \overline{d}d^{-1}.$$

Следовательно, при всяких $\theta\in\mathbf{N}$, $j\in\mathbf{Z}^+$ выполнены неравенства

$$(\overline{d})^{-1}d \leqslant \sup_{\mathfrak{z}\in df^{j\theta}E_q(f,\,x)_*} \{|\tau_0(d\,((h_{f^{(j+1)\theta}x})^{-1})_0)^{-1} df^{\theta}\mathfrak{z}|_c \times \\ \times|\tau_0(d\,((h_{f^{j\theta}x})^{-1})_0)^{-1}\mathfrak{z}|_c^{-1}\}\{\sup_{\mathfrak{z}\in df^{j\theta}E_q(f,\,x)_*}\{[\delta\,(df^{\theta}\mathfrak{z},\ df^{\theta}\mathfrak{z})]^{1/2}[\delta\,(\mathfrak{z},\ \mathfrak{z})]^{-\frac{1}{2}}\}\}^{-1} \leqslant \\ \leqslant \overline{d}d^{-1},$$

из которых вследствие формулы (41) и равенства

$$\|df^{\theta}|_{df^{j\theta}E_q(f,\,x)}\| \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\mathfrak{z}\in df^{j\theta}E_q(f,\,x)_*}\{[\delta\,(df^{\theta}\mathfrak{z},\ df^{\theta}\mathfrak{z})]^{1/2}[\delta\,(\mathfrak{z},\ \mathfrak{z})]^{-1/2}\}$$

вытекают неравенства

$$(\overline{d})^{-1}d \leqslant \|\Pi((j+1)\,\theta,\ j\theta)|_{\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q}\|_c\|df^{\theta}|_{df^{j\theta}E_q(f,\,x)}\|^{-1} \leqslant \overline{d}d^{-1}. \tag{48}$$

Итак, *при всяких* $\theta\in\mathbf{N}$, $j\in\mathbf{Z}^+$ *имеет место цепочка неравенств (48).*

д) При всяких $\theta\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{N}$ имеем

$$\theta^{-1}\ln((\overline{d})^{-1}d) \underset{(48)}{\leqslant} \frac{1}{m\theta}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|\Pi((j+1)\,\theta,\ j\theta)|_{\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q}\|_c - \\ -\frac{1}{m\theta}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|df^{\theta}|_{df^{j\theta}E_q(f,\,x)}\| \underset{(48)}{\leqslant} \theta^{-1}\ln(\overline{d}d^{-1}).$$

Следовательно, при всяком $\theta\in\mathbf{N}$ имеют место неравенства

$$\theta^{-1}\ln((\overline{d})^{-1}d) \leqslant \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|\Pi((j+1)\,\theta,\ j\theta)|_{\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q}\|_c - \\ -\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|df^{\theta}|_{df^{j\theta}E_q(f,\,x)}\| \leqslant \theta^{-1}\ln(\overline{d}d^{-1}). \tag{49}$$

В силу леммы 1 [10] из формулы (8) имеем

$$\Omega^{(n-q+1)}((f,\ x)) = \lim_{\substack{\theta\to+\infty\\(\theta\in\mathbf{N})}}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|df^{\theta}|_{df^{j\theta}E_q(f,\,x)}\|; \tag{50}$$

точнее говоря, в [10] это равенство доказано для более общей ситуации; зафиксировав $f\in S$, положив $E=TV^n$, $p=\pi$, $B=V^n$ и определив гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ формулой $\mathfrak{H}m=(X^m,\ \chi^m)=(df^m,\ f^m)$ получаем рассматриваемый сейчас частный случай ситуации [10]. В силу леммы **П** (см. приложение) имеем

$$\Omega\,(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}},\ \mathbf{R}^q) = \lim_{\substack{\theta\to+\infty\\(\theta\in\mathbf{N})}}\frac{1}{m\theta}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|\Pi((j+1)\,\theta,\ j\theta)_{\Pi_{j\theta}\mathbf{R}^q}\|_c. \tag{51}$$

Из формул (49) — (51) следует равенство

$$\Omega\,(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}},\ \mathbf{R}^q) = \Omega^{(n-q+1)}((f,\ x)).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть риманово многообразие* (V^n, δ) *равномерно картографируемо. Пусть* $j \in S^u$, $(f, x) \in D_j^u$ *(см. п. 1)),* $\lambda_n((f, x)) < 0$. *Пусть* $q = n - k(f, x) + 1$, *где*

$$k(f, x) \underset{\text{def}}{=} \min\{k \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_k((f, x)) < 0\}.$$

Тогда подпространство

$$\mathbf{R}^q \underset{\text{def}}{=} \tau_0 d(h_x)_x E_q(f, x) \tag{52}$$

*экспоненциально отделено**) *от всякого своего алгебраического дополнения* $\mathbf{R}^{n-q} = R^n \ominus \mathbf{R}^q$ *относительно семейства* $\{T_m\}_{m \in \mathbf{N}}$, *определенного формулой (21).*

Доказательство. а) Прежде чем доказывать сформулированное утверждение, напомним, что, согласно приведенному в приложении определению, это утверждение может быть сформулировано следующим образом.

Для всякого алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-q} = R^n \ominus \mathbf{R}^q$ *подпространства* $\mathbf{R}^q$, *определенного формулой (52), существуют* $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}_*^+$, $\overline{\beta} \in \mathbf{R}_*^+$ *такие, что для всяких* $a \in \mathbf{R}^{n-q}$, $b \in \mathbf{R}^q$ *для всяких* $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ *таких, что* $t \geqslant s$, *имеет место неравенство*

$$|\Pi_t a|_c |\Pi_s b|_c \geqslant \overline{\alpha} |\Pi_t b|_c |\Pi_s a|_c \exp(\overline{\beta}(t - s)). \tag{53}$$

Перейдем теперь собственно к доказательству утверждения.

б) Из формулировки п. а) видно, что в случае $q = n$ доказывать нечего: при $q = n$ подпространство $\mathbf{R}^{n-q} = R^n \ominus \mathbf{R}^q$ нулевое, следовательно, всякое $a \in \mathbf{R}^{n-q}$ равно нулю, а для $a = 0$ неравенство (53) очевидно имеет место при любых $\overline{\alpha} \in \mathbf{R}_*^+$, $\overline{\beta} \in \mathbf{R}_*^+$, $b \in \mathbf{R}^q = R^n$.

в) Пусть $q \neq n$. Тогда, согласно фразе, содержащей формулу (16), подпространство $E_q(f, x)$ слоя $\pi^{-1}(x)$ экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения в слое $\pi^{-1}(x)$, т. е. (см. п. 1) б)) для всякого алгебраического дополнения l^{n-q} подпространства $E_q(f, x)$ (в векторном пространстве $\pi^{-1}(x)$) существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{n-q}$, $\mathfrak{y} \in E_q(f, x)$ и всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$, выполнено неравенство

$$\begin{gathered}[\delta(df^t\mathfrak{x}, df^t\mathfrak{x})]^{\frac{1}{2}}[\delta(df^s\mathfrak{y}, df^s\mathfrak{y})]^{1/2} \geqslant \\ \geqslant \alpha[\delta(df^s\mathfrak{x}, df^s\mathfrak{x})]^{1/2}[\delta(df^t\mathfrak{y}, df^t\mathfrak{y})]^{1/2} \exp(\beta(t - s)).\end{gathered} \tag{54}$$

г) При всяких $m \in \mathbf{Z}^+$, $e \in R^n$ имеем

$$\Pi_m e \underset{(34)}{=} \tau_0 d(h_{f^m x})_{f^m x} df_x^m d((h_x)^{-1})_0 \tau_0^{-1} e, \tag{55}$$

$$|\Pi_m e|_c \leqslant \|1_{R^n}\|_{f^m x,\, 0}^{(c)} |\Pi_m e|_{f^m x,\, 0}, \tag{56}$$

$$|\Pi_m e|_{f^m x,\, 0} \leqslant \|1_{R^n}\|_{(c)}^{f^m x,\, 0} |\Pi_m e|_c\,. \tag{57}$$

В силу леммы 1 [5] (см. также формулу (В.12)) при всяком $m \in \mathbf{Z}^+$ имеют место неравенства

$$\|1_{R^n}\|_{f^m x,\, 0}^{(c)} \leqslant d^{-1}, \tag{58}$$

$$\|1_{R^n}\|_{(c)}^{f^m x,\, 0} \leqslant \overline{d}. \tag{59}$$

При всяких $m \in \mathbf{Z}^+$, $e \in R^n$ *имеем*

$$|\Pi_m e|_c \underset{(58)}{\overset{(56)}{\leqslant}} d^{-1} |\Pi_m e|_{f^m x,\, 0}, \tag{60}$$

---

*) См. приложение.

$$|\Pi_m e|_{f^m x,\,0} \underset{(59)}{\overset{(57)}{\leqslant}} \bar{d}\,|\Pi_m e|_c\,. \tag{61}$$

д) При всяких $m \in \mathbf{Z}^+$, $e \in R^n$ из формулы (12) [5] следует равенство

$$\begin{gathered}|\Pi_m e|_{f^m x,\,0} = [\delta\,((d\,(h_{f^m x})_{f^m x})^{-1}\tau_0^{-1}\Pi_m e,\ (d\,(h_{f^m x})_{f^m x})^{-1}\tau_0^{-1}\Pi_m e)]^{1/2} \underset{(55)}{=} \\ \underset{(55)}{=} [\delta\,(df_x^m d\,((h_x)^{-1})_0\tau_0^{-1}e,\ df_x^m d\,((h_x)^{-1})_0\tau_0^{-1}e)]^{1/2} \underset{(\text{B}.12)}{=} \\ \underset{(\text{B}.12)}{=} [\delta\,(df_x^m (d(h_x)_x)^{-1}{}_0\tau_0^{-1}e,\ df_x^m (d\,(h_x)_x)^{-1}{}_0\tau_0^{-1}e)]^{1/2}.\end{gathered} \tag{62}$$

е) Пусть дано алгебраическое дополнение $\mathbf{R}^{n-q}$ подпространства $\mathbf{R}^q \underset{(52)}{=} \tau_0 d\,(h_x)_x E_q(f,\,x)$ в пространстве R^n. Так как $\tau_0 d\,(h_x)_x$ — изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(x)$ на векторное пространство R^n, то

$$E^{n-q} \underset{\text{def}}{=} (d\,(h_x)_x)^{-1}\tau_0^{-1}\mathbf{R}^{n-q} \tag{63}$$

— алгебраическое дополнение векторного подпространства $E_q(f,\,x)$ в касательном пространстве $\pi^{-1}(x)$:

$$E^{n-q} = \pi^{-1}(x) \ominus E_q(f,\,x). \tag{64}$$

Следовательно (см. п. в)), существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in E^{n-q}$, $\mathfrak{y} \in E_q(f,\,x)$ и всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$, выполнено неравенство (54).

ж) Пусть даны

$$a \in \mathbf{R}^{n-q} \underset{(63)}{=} \tau_0 d(h_x)_x E^{n-q}, \tag{65}$$

$$b \in \mathbf{R}^q \underset{(52)}{=} \tau_0 d(h_x)_x E_q(f,\,x) \tag{66}$$

и даны $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ такие, что $t \geqslant s$. Положим

$$\mathfrak{x} \underset{\text{def}}{=} (d(h_x)_x)^{-1}\tau_0^{-1}a, \tag{67}$$

$$\mathfrak{y} \underset{\text{def}}{=} (d(h_x)_x)^{-1}\tau_0^{-1}b. \tag{68}$$

Имеем

$$\mathfrak{x} \underset{(67)}{\overset{(65)}{\in}} E^{n-q},\ \mathfrak{y} \underset{(68)}{\overset{(66)}{\in}} E_q(f,\,x), \tag{69}$$

следовательно (см. последнюю фразу п. е)), для $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, определенных формулами (67), (68), выполнено неравенство

$$\begin{gathered}[\delta\,(df^t\mathfrak{x},\ df^t\mathfrak{x})]^{1/2}[\delta\,(df^s\mathfrak{y},\ df^s\mathfrak{y})]^{1/2} \geqslant \\ \geqslant \alpha\,[\delta\,(df^s\mathfrak{x},\ df^s\mathfrak{x})]^{1/2}[\delta\,(df^t\mathfrak{y},\ df^t\mathfrak{y})]^{1/2}\exp\,(\beta\,(t-s)).\end{gathered} \tag{70}$$

При $m = t$ и при $m = s$

$$\begin{gathered}[\delta\,(df^m\mathfrak{x},\ df^m\mathfrak{x})]^{1/2} = [\delta\,(df_x^m\mathfrak{x},\ df_x^m\mathfrak{x})]^{1/2} \underset{(67)}{=} \\ \underset{(67)}{=} [\delta\,(df_x^m(d\,(h_x)_x)^{-1}\tau_0^{-1}a,\ df_x^m(d\,(h_x)_x)^{-1}\tau_0^{-1}a)]^{1/2} \underset{(62)}{=}, \\ \underset{(62)}{=} |\Pi_m a|_{f^m x,\,0},\end{gathered} \tag{71}$$

$$\begin{gathered}[\delta\,[df^m\mathfrak{y},\ df^m\mathfrak{y})]^{1/2} = [\delta\,(df_x^m\mathfrak{y},\ df_x^m\mathfrak{y})]^{1/2} \underset{(68)}{=} [\delta\,(df_x^m(d\,(h_x)_x)^{-1}\tau_0^{-1}b, \\ df_x^m(d\,(h_x)_x)^{-1}\tau_0^{-1}b)]^{1/2} \underset{(62)}{=} |\Pi_m b|_{f^m x,\,0}\,.\end{gathered} \tag{72}$$

Имеем

$$[\delta\,(df^t\mathfrak{x},\ df^t\mathfrak{x})]^{1/2} \underset{(71)}{=} |\Pi_t a|_{f^t x,\,0} \underset{(61)}{\leqslant} \bar{d}\,|\Pi_t a|_c, \tag{73}$$

$$[\delta(df^s\mathfrak{y},\ df^s\mathfrak{y})]^{1/2} \underset{(72)}{=} |\Pi_s b|_{f^s x,\,0} \underset{(61)}{\leqslant} \bar{d}\,|\Pi_s b|_c\,. \tag{74}$$

Из (73), (74) следует неравенство

$$|\Pi_t a|_c |\Pi_s b|_c \geqslant (\bar{d})^{-2}[\delta(df^t\mathfrak{x},\ df^t\mathfrak{x})]^{1/2}[\delta(df^s\mathfrak{y},\ df^s\mathfrak{y})]^{1/2}. \tag{75}$$

Кроме того,

$$[\delta(df^s\mathfrak{x},\ df^s\mathfrak{x})]^{1/2} \underset{(71)}{=} |\Pi_s a|_{f^s x,\,0} \underset{(60)}{\geqslant} d\,|\Pi_s a|_c, \tag{76}$$

$$[\delta(df^t\mathfrak{y},\ df^t\mathfrak{y})]^{1/2} \underset{(72)}{=} |\Pi_t b|_{f^t x,\,0} \underset{(60)}{\geqslant} d\,|\Pi_t b|_c\,. \tag{77}$$

Из (76), (77) следует неравенство

$$[\delta(df^s\mathfrak{x},\ df^s\mathfrak{x})]^{1/2}[\delta(df^t\mathfrak{y},\ df^t\mathfrak{y})]^{1/2} \geqslant d^2\,|\Pi_s a|_c |\Pi_t b|_c\,. \tag{78}$$

Из неравенств (70), (75), (78) следует неравенство

$$|\Pi_t a|_c |\Pi_s b|_c \geqslant (\bar{d})^{-2}\alpha d^2\,|\Pi_s a|_c |\Pi_t b|_c \exp(\beta(t-s)),$$

совпадающее с неравенством (53) при $\bar{\alpha} = (\bar{d})^{-2}\alpha d^2$, $\bar{\beta} = \beta$. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $(f,\ x) \in D_j^u$ (множество D_j^u определено в п. 1) (до конца доказательства пара $(f,\ x)$ остается фиксированной)*). Имеем: в силу леммы 1 *семейство* $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ *невырожденных линейных преобразований пространства* R^n*, определенных формулой (21), удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{m\in\mathbf{N}} \max\{\|T_m\|_c,\ \|T_m^{-1}\|_c\} < +\infty;$$

центральный показатель семейства $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ *относительно подпространства* $\mathbf{R}^q$*, определенного формулой (52), отрицателен:*

$$\Omega(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}},\ \mathbf{R}^q) \overset{(15)}{\underset{(32)}{<}} 0;$$

в силу леммы 4 *подпространство* $\mathbf{R}^q$, *определенное формулой (52), экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения* $\mathbf{R}^{n-q} = R^n \ominus \mathbf{R}^q$ *относительно семейства* $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$; *для некоторого* $r_f \in \mathbf{R}_*^+$ *определено* (формулой (25)) *семейство непрерывно дифференцируемых отображений* $W_m : \{\hat{y} \in R^n : |\hat{y}|_c < r_f\} \to R^n$ *таких, что,* $W_m 0 \underset{(20),\,(25)}{=} 0$ $(m \in \mathbf{N})$ *удовлетворяющее в силу леммы 2 условию: для всякого* $\zeta \in \mathbf{R}_*^+$ *найдется* $r_\zeta \in (0,\ r_f)$ *такое, что*

$$\sup_{m\in\mathbf{N}} |(W_m\hat{y}_1 - T_m\hat{y}_1) - (W_m\hat{y}_2 - T_m\hat{y}_2)|_c < \zeta\,|\hat{y}_1 - \hat{y}_2|_c$$

для всяких $\hat{y}_1 \in R^n$, $\hat{y}_2 \in R^n$, *удовлетворяющих неравенствам* $|\hat{y}_1|_c < r_\zeta$, $|\hat{y}_2|_c < r_\zeta$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы **П** приложения.

Фиксируем какое-нибудь $\mathbf{R}^{n-q} = R^n \ominus \mathbf{R}^q$; фиксируем какое-нибудь $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ такое, что

$$\chi \underset{\text{def}}{=} \Omega^{(n-q+1)}((f,\ x)) + \varepsilon < 0 \tag{79}$$

(такое ε существует вследствие неравенства

$$\Omega^{(n-q+1)}((f,\ x)) \underset{(15)}{<} 0).$$

В силу теоремы **П** приложения *существует окрестность* V *точки* 0 *в пространстве* $\mathbf{R}^q$ *и существует непрерывно дифференцируемое отображение* $\psi(\cdot) : V \to \mathbf{R}^{n-q}$ *такое, что*

1) $\psi(0) = 0$; (80)

---

*) Если $\lambda_n((f,\ x)) \geqslant 0$, то множество (1) состоит из нуля, а точка x — нульмерное экспоненциально устойчивое многообразие, и все доказано. Поэтому далее предполагаем, что $\lambda_n((f,\ x)) < 0$.

2) $\left.\dfrac{d\psi}{d\widehat{y}}\right|_{\widehat{y}=0}=0$; (81)

3) *для всяких* $\widehat{y}\in V$, $s\in\mathbf{Z}^+$ *точка* $\widehat{y}+\psi(\widehat{y})$ *содержится в области определения отображения* Ξ_s *и найдется* $C_\varepsilon\in\mathbf{R}_*^+$ *такое, что для всякого* $s\in\mathbf{Z}^+$ *выполнено неравенство*

$$\begin{gathered}\sup_{\widehat{y}\in V}|\,\Xi_s(\widehat{y}+\psi(\widehat{y}))\,|_c\leqslant C_\varepsilon\exp\{[\Omega(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}},\ \mathbf{R}^q)+\varepsilon]\,s\}\underset{(32)}{=}\\ \underset{(32)}{=}C_\varepsilon\exp\{[\Omega^{(n-q+1)}((f,\ x))+\varepsilon]\,s\}\underset{(79)}{=}C_\varepsilon\exp(\chi s).\end{gathered}\tag{82}$$

В силу леммы 4 [5] существует $d_1\in\mathbf{R}_*^+$ такое, что для всяких $\gamma\in(0,\,\sigma)$, $s\in\mathbf{Z}^+$ для всякого $\widehat{y}\in R^n$, удовлетворяющего неравенству $|\,\widehat{y}\,|_c<d_1\gamma$, имеет место включение

$$\widehat{y}\in h_{f^s x}U_\gamma(f^s x).\tag{83}$$

Фиксируем $\overline{s}\in\mathbf{Z}^+$ такое, что для всякого натурального $s>\overline{s}$ выполнено неравенство

$$C_\varepsilon\exp(\chi s)<d_1\sigma\tag{84}$$

(такое $\overline{s}$ существует в силу (79)).

Фиксируем $\overline{\rho}\in\mathbf{R}_*^+$ такое, что

$$V_{\overline{\rho}}\underset{\text{def}}{=}\mathbf{R}^q\bigcap\{\widehat{y}\in R^n:|\,\widehat{y}\,|_c<\overline{\rho}\}\subset V\tag{85}$$

и для всяких $\widehat{y}\in V_{\overline{\rho}}$, $s\in\{0,\ \ldots,\ \overline{s}\}$ имеет место неравенство

$$|\,\Xi_s(\widehat{y}+\psi(\widehat{y}))\,|_c<d_1\sigma\tag{86}$$

(такое $\overline{\rho}$ существует в силу непрерывности отображения

$$\psi(\cdot):V\to\mathbf{R}^{n-q}).$$

Из (86) (см. фразу, содержащую формулу (83)) следует включение

$$\Xi_s(\widehat{y}+\psi(\widehat{y}))\in h_{f^s x}U_\sigma(f^s x),$$

эквивалентное неравенству

$$\rho((h_{f^s x})^{-1}\Xi_s(\widehat{y}+\psi(\widehat{y})),\,f^s x)<\sigma.\tag{87}$$

Пусть $\widehat{y}\in V$; для всякого натурального $s>\overline{s}$ имеем

$$|\,\Xi_s(\widehat{y}+\psi(\widehat{y}))\,|_c\underset{(82)}{\leqslant}C_\varepsilon\exp(\chi s),\tag{88}$$

а так как при всяком натуральном $s>\overline{s}$ имеет место неравенство

$$\gamma_s\underset{\text{def}}{=}(d_1)^{-1}C_\varepsilon\exp(\chi s)\underset{(84)}{<}\sigma,\tag{89}$$

то (см. фразу, содержащую формулу (83)) при всяком натуральном $s\geqslant\overline{s}$ имеет место включение

$$\Xi_s(\widehat{y}+\psi(\widehat{y}))\in h_{f^s x}U_{\gamma_s}(f^s x),$$

эквивалентное неравенству

$$\rho((h_{f^s x})^{-1}\Xi_s(\widehat{y}+\psi(\widehat{y})),\,f^s x)<\gamma_s.\tag{90}$$

Положим

$$C\underset{\text{def}}{=}\max\{(d_1)^{-1}C_\varepsilon,\ \sigma\exp(-\chi\overline{s})\}.\tag{91}$$

Тогда для всяких $\widehat{y}\in V_{\overline{\rho}}$, $s\in\{0,\ \ldots,\ \overline{s}\}$ имеем

$$\rho((h_{f^s x})^{-1}\Xi_s(\widehat{y}+\psi(\widehat{y})),\,f^s x)\underset{(87)}{<}\sigma\underset{(91)}{\leqslant}C\exp(\chi s),$$

а для всякого натурального $s > \overline{s}$ и всякого $\hat{y} \in V_{\bar{\rho}}$

$$\rho\,((h_{f^s x})^{-1}\Xi_s(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})),\, f^s x) \underset{(90)}{<} \gamma_s \underset{(89)}{=} (d_1)^{-1} C_\varepsilon \exp\,(\chi s) \underset{(91)}{\leqslant} C \exp\,(\chi s).$$

Следовательно, для всяких $\hat{y} \in V_{\bar{\rho}}$, $s \in \mathbf{Z}^+$ выполнено неравенство

$$\rho\,((h_{f^s x})^{-1}\Xi_s(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})),\, f^s x) < C \exp\,(\chi s). \tag{92}$$

При всяком $s \in \mathbf{Z}^+$ имеем: для всякого $\hat{y} \in V_{\bar{\rho}} \underset{(85)}{\subset} V$ точка $\hat{y}+\psi\,(\hat{y})$ содержится в области определения отображения Ξ_s, поэтому для всяких $\hat{y} \in V_{\bar{\rho}}$, $s \in \mathbf{Z}^+$

$$\Xi_0(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})) = \hat{y}+\psi\,(\hat{y}), \tag{93}$$

$$\begin{aligned}\Xi_s(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})) = W_s\Xi_{s-1}(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})) &\underset{(25)}{=} f_{f^{s-1}x}\Xi_{s-1}(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})) \underset{(19)}{=} \\ &\underset{(19)}{=} h_{f^s x} f\,(h_{f^{s-1}x})^{-1}\Xi_{s-1}(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})).\end{aligned} \tag{94}$$

Из формулы (93) (начало индукции) и формулы (94) (шаг индукции) следует, что для всяких $\hat{y} \in V_{\bar{\rho}}$, $s \in \mathbf{Z}^+$ имеет место формула

$$\Xi_s(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})) = h_{f^s x} f^s (h_x)^{-1}(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})), \tag{95}$$

с помощью которой (92) переписывается в виде

$$\rho\,(f^s (h_x)^{-1}(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})),\, f^s x) < C \exp\,(\chi s). \tag{96}$$

Определим отображение $i : V_{\bar{\rho}} \to V^n$ формулой

$$i\hat{y} \underset{\text{def}}{=} (h_x)^{-1}(\hat{y}+\psi\,(\hat{y})) \tag{97}$$

для всякого $\hat{y} \in V_{\bar{\rho}}$. В силу фраз, содержащих формулы (86), (87), это определение корректно (т. е. правая часть формулы (97) имеет смысл при всяком $\hat{y} \in V_{\bar{\rho}}$).

Имеем

$$i0 \overset{(\text{B}.12)}{\underset{(80),\ (97)}{=}} x. \tag{98}$$

Так как $(h_x)^{-1}$ — диффеоморфизм, то в силу фразы, содержащей формулы (80), (81), отображение $i : V_{\bar{\rho}} \to V^n$, определенное формулой (97), есть инъективная иммерсия (взаимно однозначное погружение) многообразия $V_{\bar{\rho}}$ в многообразие V^n.

Для всяких $\hat{y} \in V_{\bar{\rho}}$, $s \in \mathbf{Z}^+$ выполнено неравенство

$$\rho\,(f^s(i\hat{y}),\, f^s s) \overset{(92)}{\underset{(96),\ (97)}{<}} C \exp\,(\chi s) \tag{99}$$

(напомним, что $-\chi \underset{(79)}{\in} \mathbf{R}^+_*$, $C \underset{(91)}{\in} \mathbf{R}^+$ — не зависят от $\hat{y} \in V_{\bar{\rho}}$, $s \in \mathbf{Z}^+$).

Напомним, что для отображения $\varphi : \mathbf{R}^q \to R^n$ имеет место формула

$$\left.\frac{d\varphi}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=z} = \tau^{[\eta]}_{\varphi z} d\varphi_z (\tau^{[q]}_z)^{-1}.$$

Имеем

$$di_0(\tau_0^{[q]})^{-1}\mathbf{R}^q \underset{(97)}{=} d\,((h_x)^{-1})_0 d\,(1_{\mathbf{R}^q}+\psi(\cdot))_0(\tau_0^{[q]})^{-1}\mathbf{R}^q =$$

$$= d\,((h_x)^{-1})_0(\tau_0^{[n]})^{-1}\left.\frac{d\,(1_{\mathbf{R}^q}+\psi(\cdot))}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\mathbf{R}^q =$$

$$= d\,((h_x)^{-1})_0(\tau_0^{[n]})^{-1}\left(1_{\mathbf{R}^q}+\left.\frac{d\psi}{d\hat{y}}\right|_{\hat{y}=0}\right)\mathbf{R}^q \underset{(81)}{=} \tag{100}$$

$$\underset{(81)}{=} d\,((h_x)^{-1})_0(\tau_0^{[n]})^{-1}\mathbf{R}^q \underset{(\text{B.12})}{=} (d\,(h_x)_x)^{-1}(\tau_0^{[n]})^{-1}\mathbf{R}^q \underset{(52)}{=} E_q(f,\,x) \underset{(16)}{=}$$

$$\underset{(16)}{=} \{\mathfrak{x}\in\pi^{-1}(x):\lambda\,(f,\,\mathfrak{x})<0\}$$

(напомним, что в формуле (52) τ_0 — сокращенное обозначение для $\tau_0^{[n]}$).

Напомним также, что в силу определения отображений отождествления $\tau_{\hat{y}}^{[q]}$ множество $(\tau_{\hat{y}}^{[q]})^{-1}\mathbf{R}^q = T_{\hat{y}}V_{\bar{\rho}}$ есть касательное пространство многообразия $V_{\bar{\rho}}$ в точке $\hat{y}$.

Подведем итог. *Указаны два числа* $\chi<0$ *(см. формулу (79)),* $C\in\mathbf{R}^+$ *(см. формулу (91)); построено (см. формулу (97)) взаимно однозначное погружение* i *(инъективная иммерсия)* q*-мерного дифференцируемого многообразия* $V_{\bar{\rho}}$ *(*q*-мерного открытого диска) в* V^n *такое, что* $w=0\in V_{\bar{\rho}}$,

$$i0 \underset{(98)}{=} x,$$

для всяких $v\in V_{\bar{\rho}}$, $s\in\mathbf{Z}^+$ *выполнено неравенство*

$$\rho\,(f^s(iv),\,f^s s) \underset{(99)}{<} C\exp\,(\chi s);$$

доказано равенство

$$di_0(T_0V_{\bar{\rho}}) \underset{(100)}{=} \{\mathfrak{x}\in\pi^{-1}(x):\lambda\,(f,\,\mathfrak{x})<0\}.$$

Теорема доказана.

Приложение

Здесь сформулированы в удобной для принятой в этой статье системы изложения форме определения и результаты из [11], использованные в этой статье.

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ задана некоторая евклидова структура. Пусть при всяком $m\in\mathbf{N}$ задано невырожденное линейное преобразование T_m пространства $\mathbf{R}^n$ в себя. Коротко будем записывать это так: $T_m\in\operatorname{Aut}\mathbf{R}^n$ ($m\in\mathbf{N}$).

Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\Theta \underset{\text{def}}{=} \sup_{m\in\mathbf{N}}\max\,\{\|T_m\|,\ \|T_m^{-1}\|\}<+\infty \tag{П.1}$$

(норма линейного оператора определяется стандартным образом через норму в $\mathbf{R}^n$, индуцированную фиксированным в $\mathbf{R}^n$ скалярным произведением, а именно $\|L\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n_*}(|L\mathfrak{x}|\cdot|\mathfrak{x}|^{-1})$ для всякого линейного оператора $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$; через $\mathbf{R}^+_*$ обозначается $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$).

Положим

$$\Pi_0 \underset{\text{def}}{=} T_0 = 1_{\mathbf{R}^n},$$

$$\Pi_m \underset{\text{def}}{=} T_m\Pi_{m-1}\ (m\in\mathbf{N}), \tag{П.2}$$

$$\Pi(m,\ k) = \Pi_m \Pi_k^{-1}\ \ (m \in \mathbf{Z}^+,\ k \in \mathbf{Z}^+).$$

Пусть $\mathbf{R}^q$ — некоторое q-мерное векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^n$ (здесь $q \in \{1,\ \ldots,\ n\}$).

Центральный показатель (см. [11], § 7, 8, 13) семейства $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ относительно подпространства $\mathbf{R}^q$ определяется формулой

$$\Omega\,(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}},\ \mathbf{R}^q) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|\, \Pi((j+1)\,\tau,\ j\tau)_{\Pi_{j\tau}\mathbf{R}^q} \|. \tag{П.3}$$

Лемма П [11]. *Предел*

$$\lim_{\tau\to+\infty} \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|\, \Pi((j+1)\,\tau,\ j\tau)_{\Pi_{j\tau}\mathbf{R}^q} \,\|$$

существует и равен $\Omega\,(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}},\ \mathbf{R}^q)$.

Согласно определению, принадлежащему *Перрону,* подпространство $\mathbf{R}^q$ пространства $\mathbf{R}^n$ $(q \in \{1,\ \ldots,\ n\})$ *экспоненциально отделено* от своего алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-q} = \mathbf{R}^n \ominus \mathbf{R}^q$ относительно семейства $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, если существуют числа*) $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^{n-q}$, $\mathfrak{y} \in \mathbf{R}^q$ для всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|\,\Pi_t \mathfrak{x}\,| \cdot |\,\Pi_s \mathfrak{y}\,| \geqslant \alpha\, |\,\Pi_t \mathfrak{y}\,| \cdot |\,\Pi_s \mathfrak{x}\,| \exp\,(\beta\,(t-s)). \tag{П.4}$$

Из этого определения следует, что при $q = n$ подпространство $\mathbf{R}^q$ экспоненциально отделено от своего алгебраического дополнения ($\mathbf{R}^n \ominus \mathbf{R}^n = \{0\}$) относительно всякого семейства $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$.

Теорема П (см. [11], теорема 15.2.1). *Пусть семейство* $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ *невырожденных линейных преобразований пространства* $\mathbf{R}^n$ *удовлетворяет условию* (П.*1*). *Пусть центральный показатель семейства* $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ *относительно некоторого подпространства* $\mathbf{R}^q$ *отрицателен:* $\Omega\,(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}},\ \mathbf{R}^q) < 0$, *и пусть подпространство* $\mathbf{R}^q$ *экспоненциально отделено от некоторого своего алгебраического дополнения* $\mathbf{R}^{n-q} = \mathbf{R}^n \ominus \mathbf{R}^q$ *относительно семейства* $\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}$.

Пусть для некоторого $r \in \mathbf{R}_*^+$ *дано семейство непрерывно дифференцируемых отображений* $W_m : \{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n : |\,\mathfrak{x}\,| < r\} \to \mathbf{R}^n$, *таких, что* $W_m 0 = 0$ $(m \in \mathbf{N})$, *удовлетворяющее условию: для всякого* $\zeta \in \mathbf{R}_*^+$ *найдется* $r_\zeta \in (0,\ r)$ *такое, что*

$$\sup_{m\in\mathbf{N}} |\,(W_m \mathfrak{x} - T_m \mathfrak{x}) - (W_m \mathfrak{y} - T_m \mathfrak{y})\,| < \zeta\, |\,\mathfrak{x} - \mathfrak{y}\,|$$

для всяких, $\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathfrak{y} \in \mathbf{R}^n$, *удовлетворяющих неравенствам* $|\,\mathfrak{x}\,| < r_\varsigma$, $|\,\mathfrak{y}\,| < r_\varsigma$.

Тогда существует окрестность V *точки* 0 *в пространстве* $\mathbf{R}^q$ *и существует непрерывно дифференцируемое отображение* $\psi(\cdot) : V \to \mathbf{R}^{n-q}$ *такое, что*

1) $\psi\,(0) = 0$;

2) $\left.\dfrac{d\psi}{dx}\right|_{x=0} = 0$;

---

*) $\mathbf{R}_*^+$ — множество всех положительных вещественных чисел; $\mathbf{Z}^+$ — множество всех неотрицательных целых чисел.

3) *для всяких* $\mathfrak{x} \in V$, $s \in \mathbf{Z}^+$ *точка* $\mathfrak{x} + \psi(\mathfrak{x})$ *содержится в области определения отображения***⁾ Ξ_s *и для всякого* $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ *найдется* $C_\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ *такое, что для всякого* $s \in \mathbf{Z}^+$ *выполнено неравенство*

$$\sup_{\mathfrak{x} \in V} |\Xi_s(\mathfrak{x} + \psi(\mathfrak{x}))| \leqslant C_\varepsilon \exp\{[\Omega(\{T_m\}_{m\in\mathbf{N}}, \mathbf{R}^q) + \varepsilon] s\}.$$

Литература

1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 5 С. 804—821.
2. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 6. С 957—978.
3. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 223—236.
4. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С. 771—776.
5. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 10. С. 1697—1711.
6. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 8. С. 1338—1350.
7. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 6. С. 946—955.
8. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 12. С. 2132—2148.
9. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 2. С. 255—267.
10. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1344—1356.
11. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 15 апреля 1983 г.

**⁾ Отображения Ξ_s определяются индукцией по $s \in \mathbf{Z}^+$ так: $\Xi_0 \underset{\text{def}}{=} 1_{\mathbf{R}^n}$, $\Xi_s \underset{\text{def}}{=} W_s \Xi_{s-1}$ ($s \in \mathbf{N}$).