УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. XVII

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть V^n — n-мерное связное дифференцируемое (класса C^3) многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика $\delta(\cdot,\cdot)$ (класса C^2). Через $\left(TV^n,\pi,V^n\right)$ далее обозначается касательное расслоение многообразия V^n (TV^n — пространство этого векторного расслоения, стандартным образом наделенное структурой дифференцируемого многообразия (класса C^2)). С помощью фиксированной выше римановой метрики $\delta(\cdot,\cdot)$ многообразие V^n стандартным образом наделяется структурой метрического пространства, которое обозначается далее через $\left(V^n,\rho\right)$, где $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние в этом метрическом пространстве.

Потребуем, чтобы метрическое пространство $\left(V^n,\rho\right)$ было полным.

2. Через S обозначаем множество всех диффеоморфизмов f класса C^1, биективно отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию

$$\max\left\{\left\|df\right\|,\left\|\left(df\right)^{-1}\right\|\right\}<+\infty; \tag{В.1}$$

здесь

$$\left\|df\right\|\underset{def}{=}\sup_{x\in V^n}\left\|df_x\right\|, \tag{В.2}$$

$$\left\|\left(df\right)^{-1}\right\|\underset{def}{=}\sup_{x\in V^n}\left\|\left(df_x\right)^{-1}\right\|, \tag{В.3}$$

df_x — производная отображения f в точке x, $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой $\delta(\cdot,\cdot)$.

3. Для всякого $j\in S$ через S_j обозначаем подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x\in V^n}\rho\left(fx,jx\right)<+\infty.$$

При всяком $j\in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния $d_1(\cdot,\cdot)$, определяемого для всяких $f\in S_j$, $g\in S_j$ формулой (в [1] формула (55))

$$d_1\left(f,g\right)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G\left(fx,gx\right)}\left\{s\left(u\right)+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|+\left\|(\varphi_u dg_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\right\|\right\}; \tag{В.4}$$

здесь: 1) для всяких $y\in V^n$, $z\in V^n$ через $G\left(y,z\right)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; при этом под кусочно-гладким путем u, идущим в многообразии V^n из точки z в точку y, понимается непрерывное, имеющее кусочно-непрерывную производную, отображение u отрезка [0, 1] в многообразии V^n, причем значение u_0 этого отображения в точке 0 равно *z*, а его значение u_1 в точке 1 равно *y* (через u_t обозначаем значение отображения *u* в точке *t*);

2)

$$s(u) \underset{def}{=} \int_0^1 \left[\delta\left(\dot{u}_t, \dot{u}_t\right)\right]^{\frac{1}{2}} dt \tag{B.5}$$

— длина пути *u*;

3) $\varphi_u : \pi^{-1}(z) \to \pi^{-1}(y)$ — параллельный перенос вдоль пути $u \in G(y,z)$.

При всяком $j \in S$ *метрическое пространство* (S_j, d_1) *полно* [2, предложение 2].

4. При всяком $j \in S$ множество S_j наделяется также другой структурой метрического пространства заданием расстояния $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, определяемого для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ формулой (в [1] формула (56))

$$\tilde{d}_1(f,g) \underset{def}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx, gx)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u dg_x - df_x \right\| \right\}. \tag{B.6}$$

При всяком $j \in S$ *расстояние* $d_1(\cdot,\cdot)$ *и расстояние* $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$ *индуцируют на* S_j *одну и ту же топологию* (см. [1] п. 5).

5. Множество J_1V^n струй первого порядка (или 1-струй), т. е. троек (x,y,L), где $x \in V^n$, $y \in V^n$, L — линейное отображение $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(y)$, наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния $\rho_1(\cdot,\cdot)$, определяемого для всяких $(x_1,y_1,L_1) \in J_1V^n$, $(x_2,y_2,L_2) \in J_1V^n$ формулой

$$\rho_1\left((x_1,y_1,L_1),(x_2,y_2,L_2)\right) \underset{def}{=} \inf_{\substack{u \in G(x_2,x_1) \\ \upsilon \in G(y_1,y_2)}} \left\{ s(u) + s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon L_2 \varphi_u - L_1 \right\| \right\} \tag{B.7}$$

(см. предложение [3]).

Определив отображение $p_1 : J_1V^n \to V^n$ формулой

$$p_1(x,y,L) \underset{def}{=} x, \tag{B.8}$$

получают тройку $\left(J_1V^n, p_1, V^n\right)$, называемую *расслоением 1-струй над* V^n*, отображение* $p_1 : \left(J_1V^n, \rho_1\right) \to \left(V^n, \rho\right)$*, определенное формулой (B.8), равномерно непрерывно* (см. [4] предложение 1).

6. Через S^u обозначаем множество всех тех диффеоморфизмов $f \in S$, 1-струйные расширения которых равномерно непрерывны; при этом 1-струйным расширением дифференцируемого отображения $f : V^n \to V^n$ называется отображение $jet_1 f : \left(V^n, \rho\right) \to \left(J_1V^n, \rho_1\right)$, определяемое формулой

$$(jet_1 f)x = \left(x, fx, df_x\right) \quad (x \in V^n). \tag{B.9}$$

При всяком $j \in S^u$ через S_j^u обозначаем множество всех тех диффеоморфизмов $f \in S_j$, 1-струйные расширения которых равномерно непрерывны; иными словами,

$$S_j^u \underset{def}{=} S_j \cap S^u \tag{B.10}$$

при всяком $j \in S^u$; *при всяком множество* $j \in S^u$ *замкнуто в* S_j^u *метрическом пространстве* (S_j, d_1) *и метрическое пространство* (S_j^u, d_1) *полно* (см. [4] предложения 5, 6).

§ 1

1. При всяком $j \in S$ наделим множество S_j (см. п. 3 введения) структурой метрического пространства, задав расстояние $\tilde{d}_{jet_1}(\cdot,\cdot)$, определяемое для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ формулой

$$\tilde{d}_{jet_1}(f,g) \underset{def}{=} \sup_{z \in V^n} \rho_1\left(\left(jet_1 f\right)z, \left(jet_1 g\right)z\right); \tag{1}$$

правая часть (1) конечна вследствие (54); за разъяснением смысла использованных здесь обозначений следует обратиться к формулам (В.7), (В.9).

В п. 4 будет доказано, что при некотором дополнительном условии, накладываемом на V^n и $\delta(\cdot,\cdot)$ в п. 2, при всяком $j \in S$ метрика $\tilde{d}_{jet_1}(\cdot,\cdot)$ индуцирует на S_j ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, определенная формулой (В.6).

2. Наложим на V^n и $\delta(\cdot,\cdot)$ дополнительное условие. Потребуем, чтобы риманово многообразие (V^n,δ) было *равномерно картографируемым,* т. е. чтобы нашлись числа $\sigma_1 \in R_*^+$, $\sigma \in R_*^+$, такие, что для всякой точки $x \in V^n$ найдется карта*) $\left\{U_\sigma(x); h_x : U_\sigma(x) \to R^n\right\}$, такая, что**)

$$h_x x = 0, \tag{2}$$

$$\left|g_{ij}(x;\hat{y})\right| + \left|g^{ij}(x;\hat{y})\right| + \left|\frac{\partial g_{ij}(x;\hat{y})}{\partial \hat{y}^k}\right| \leqslant \sigma_1 \tag{3}$$

для всяких $x \in V^n$, $\hat{y} \in h_x U_\sigma(x)$,

$i \in \{1,...,n\}$, $j \in \{1,...,n\}$, $k \in \{1,...,n\}$.

Заметим, что замкнутые римановы многообразия, а также *n*-мерное евклидово пространство равномерно картографируемы.

3. а) Через R^n обозначается пространство строк из *n* вещественных чисел, стандартным образом наделенное структурой векторного пространства над *R*. Пространство R^n стандартным образом наделяется структурой дифференцируемого многообразия: множество $\mathfrak{F}$ всех бесконечно дифференцируемых функций*) $g(\cdot): V \to R$ $\left(V \in \mathfrak{D}R^n\right)$ объявляется дифференцируемой структурой (структурой дифференцируемого многообразия класса C^∞) на R^n. Через $\left(TR^n, \hat{\pi}, R^n\right)$ обозначается касательное расслоение многообразия R^n, $\hat{\pi}$ — проекция этого расслоения, $\hat{\pi}^{-1}(\hat{y})$ — касательное пространство в точке $\hat{y}$.

Для всякого $\hat{y} \in R^n$ отображение «отождествления»

---

*) Через $U_\sigma(x)$ обозначается σ-окрестность точки *x* в римановом многообразии $\left(V^n,\delta\right)$, т. е. $U_\sigma(x) = \left\{y \in V^n : \rho(y,x) < \sigma\right\}$, где $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние на V^n, индуцированное римановой метрикой $\delta(\cdot,\cdot)$.

**) Через $g_{ij}(x;\hat{y})$ обозначаются компоненты метрического тензора в карте $\left\{U_\sigma(x), h_x : U_\sigma(x) \to R^n\right\}$ в точке $\hat{y} \in h_x U_\sigma(x)$, через обозначается (g^{ij}) матрица, обратная к матрице $\left(g_{ij}\right)$. Определение компонент метрического тензора воспроизведено ниже в п.36).

*) $\mathfrak{D}M$ — множество всех открытых множеств пространства *M*.

$$\tau_{\hat{y}} = \tau_{\hat{y}}^{[n]} : \hat{\pi}^{-1}(\hat{y}) \to R^n \tag{4}$$

определяется следующим образом: для всякого $\mathfrak{h} \in \pi^{-1}(\hat{y})$ вектор $\tau_{\hat{y}}^{[n]}\mathfrak{h}$ есть по определению такой вектор пространства R^n, что кривая (путь) ψ, определенная формулой

$$\psi_t \underset{def}{=} (\hat{y}) + t\tau_{\hat{y}}^{[n]}\mathfrak{h} \tag{5}$$

(при всяком $t \in R$), является представителем класса $\mathfrak{h}$ (мы пользуемся определением касательного вектора в точке как класса эквивалентности гладких кривых, проходящих через эту точку, по некоторому определенному отношению эквивалентности, см., например, [5], глава II, § 5).

Хорошо известно (и легко доказывается), что отображение (4) является изоморфизмом векторного пространства $\hat{\pi}^{-1}(\hat{y})$ на векторное пространство R^n.

б) В п. 1 введения на многообразии V^n была зафиксирована риманова метрика $\delta(\cdot,\cdot)$ (класса C^2). Риманова метрика $\delta(\cdot,\cdot)$ многообразия V^n индуцирует при всяком $x \in V^n$ риманову метрику $\delta_x(\cdot,\cdot)$ на

$$G_x \underset{def}{=} h_x U_\sigma(x), \tag{6}$$

определяемую формулой

$$\delta_x(a,b) \underset{def}{=} \delta\left(d\left(h_x^{-1}\right)_{\hat{\pi}a} a, \quad d\left(h_x^{-1}\right)_{\hat{\pi}b} b\right) \tag{7}$$

для всяких $a \in TG_x$, $b \in TG_x$, таких, что $\hat{\pi}a = \hat{\pi}b$ (поясним обозначения; выше мы условились обозначать касательное расслоение многообразия R^n через $(TR^n, \hat{\pi}, R^n)$, условимся теперь обозначать сужение этого векторного расслоения на открытое множество $G \subset R^n$ через $(TG, \hat{\pi}, G)$).

С помощью отображений «отождествления» $\tau_{\hat{y}}$ (см. формулу (4)) риманова метрика $\delta_x(\cdot,\cdot)$ для всякого $x \in V^n$ может быть, как хорошо известно (и легко доказывается), записана в виде

$$\delta_x(a,b) = g_{\alpha\beta}(x;\hat{\pi}a)(\tau_{\hat{\pi}a}a)^\alpha (\tau_{\hat{\pi}b}b)^\beta \tag{8}$$

для всяких $a \in TG_x$, $b \in TG_x$, таких, что, где $\hat{\pi}a = \hat{\pi}b$ при всяких $x \in V^n$, $\alpha \in \{1,...,n\}$, $\beta \in \{1,...,n\}$ функция дважды $g_{\alpha\beta}(x;\cdot) : G_x \to R$ непрерывно дифференцируема, причем матрица $(g_{\alpha\beta}(x;z))$ симметрическая, а соответствующая ей квадратичная форма положительно определенная при всяком $z = (z^1,...,z^n) \in G_x$. В правой части равенства (8) по повторяющимся (вверху и внизу) индексам α и β подразумевается суммирование от 1 до n.

в) Для всякого[**)] $L \in Hom(R^n, R^n)$ полагаем по определению

$$\|L\|_c = \sup_{a \in R_*^n}\left(|La|_c |a|_c^{-1}\right) \tag{9}$$

где

$$|a|_c \underset{def}{=} \left(\sum_{i=1}^n (a^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

[**)] Через $Hom(R^n, R^n)$ обозначается множество всех линейных отображений R^n в R^n.

для всякого $a=\left(a^1,...,a^n\right)\in R^n$.

Для всякого $L\in Hom\left(R^n,R^n\right)$, для всяких $x\in V^n$, $y\in V^n$, $z\in h_xU_\sigma\left(x\right)$; $\omega\in h_yU_\sigma y$ полагаем по определению

$$\left\|L\right\|_{x,z}^{y,\omega}\underset{def}{=}\sup_{a\in R_*^n}\left(\left|La\right|_{y,\omega}\left|a\right|_{x,z}^{-1}\right).,\tag{11}$$

где для всяких $\overline{x}\in V^n$, $\overline{z}\in h_{\overline{x}}U_\sigma\left(\overline{x}\right)$ для всякого $a=\left(a^1,...,a^n\right)\in R^n$ норма $\left|a\right|_{\overline{x},\overline{z}}$ определяется формулой

$$\left|a\right|_{\overline{x},\overline{z}}\underset{def}{=}\left[g_{\alpha\beta}\left(\overline{x};\overline{z}\right)a^\alpha a^\beta\right]^{\frac{1}{2}}\underset{(8)}{=}\left[\delta_{\overline{x}}\left(\left(\tau_{\overline{z}}\right)^{-1}a,\left(\tau_{\overline{z}}\right)^{-1}a\right)\right]^{\frac{1}{2}}\underset{(7)}{=}$$

$$\underset{(7)}{=}\left[\delta\left(d\left(h_{\overline{x}}^{-1}\right)_{\overline{z}}\left(\tau_{\overline{z}}\right)^{-1}a,\quad d\left(h_{\overline{x}}^{-1}\right)_{\overline{z}}\left(\tau_{\overline{z}}\right)^{-1}a\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[\delta\left(\left(d\left(h_{\overline{x}}\right)_{h_{\overline{x}}^{-1}\overline{z}}\right)^{-1}\left(\tau_{\overline{z}}\right)^{-1}a,\left(d\left(h_{\overline{x}}\right)_{h_{\overline{x}}^{-1}z}\right)^{-1}\left(\tau_{\overline{z}}\right)^{-1}a\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{12}$$

Для всяких $L\in Hom\left(R^n,R^n\right)$, $x\in V^n$, $z\in h_xU_\sigma\left(x\right)$ полагаем

$$\left\|L\right\|_{(c)}^{x,z}\underset{def}{=}\sup_{a\in R_*^n}\left(\left|La\right|_{x,z}\left|a\right|_c^{-1}\right),\tag{13}$$

$$\left\|L\right\|_{x,z}^{(c)}\underset{def}{=}\sup_{a\in R_*^n}\left(\left|La\right|_c\left|a\right|_{x,z}^{-1}\right).\tag{14}$$

г) Из фразы, содержащей формулу (3), следует существование чисел $\overline{d}\in R_*^n$, $d\in R_*^n$, таких, что для всяких $x\in V^n$,

$$z=\left(z^1,...,z^n\right)\in G_x\underset{(6)}{=}h_xU_\sigma\left(x\right),$$

$a=\left(a^1,...,a^n\right)\in R^n$ имеют место неравенства

$$g_{\alpha\beta}\left(x;z\right)a^\alpha a^\beta\geqslant d^2\left(\left|a\right|_c\right)^2,\tag{15}$$

$$\overline{d}^2\left(\left|a\right|_c\right)^2\geqslant g_{\alpha\beta}\left(x;z\right)a^\alpha a^\beta.\tag{16}$$

Лемма 1. *Для всяких* $x\in V^n$, $y\in U_\sigma\left(x\right)$ *имеют место неравенства*

$$\left\|1_{R^n}\right\|_{(c)}^{x,h_xy}\leqslant\overline{d},\tag{17}$$

$$\left\|1_{R^n}\right\|_{x,h_xy}^{(c)}\leqslant d^{-1}.\tag{18}$$

Доказательство. Неравенство (17) следует из формул (12), (13), (16). Неравенство (18) следует из формул (12), (14), (15). Лемма 1 доказана.

д) Пусть $z\in V^n$ и пусть $\left\{U_\sigma\left(z\right),h_z:U_\sigma\left(z\right)\to R^n\right\}$ — соответствующая карта (см. п. 2). Пусть $y_1\in U_\sigma\left(z\right)$, $y_2\in U_\sigma\left(z\right)$ и пусть путь $u\in G\left(y_1,y_2\right)$ лежит*) в множестве $U_\sigma\left(z\right)$.

Введем обозначение

$$\left(\hat{u}\left(z\right)\right)_t\underset{def}{=}h_zu_t\left(t\in\left[0,1\right]\right).\tag{19}$$

*) Под словами: «путь u лежит в множестве *M*», где $M\subset V^n$, понимается следующее: «все значения отображения $u:\left[0,1\right]\to V^n$ принадлежат множеству *M*».

Так как путь u лежит в $U_\sigma(z)$, то путь $\hat{u}(z)$, определенный формулой (19), лежит в $h_z U_\sigma(z) \underset{(6)}{=} G_z$; так как отображение $h_z : U_\sigma(z) \to R^n$ принадлежит*) классу C^3, то из того, что путь u кусочно-гладкий, следует, что путь $\hat{u}(z)$ кусочно-гладкий; так как $u_0 = y_2$, $u_1 = y_1$, то, $\hat{u}_0(z) \underset{(19)}{=} h_z u_0 = h_z y_2$, $\hat{u}_1(z) \underset{(19)}{=} h_z u_1 = h_z y_1$; следовательно,

$$\hat{y}(z) \in G(h_z y_1, h_z y_2). \tag{20}$$

Для всяких двух точек $\hat{y}_1 \in G_z$, $\hat{y}_2 \in G_z$ для всякого пути $\upsilon \in G(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ лежащего в G_z, в классических руководствах по римановой геометрии и тензорному анализу определено отображение $\hat{\varphi}_\upsilon$, ставящее в соответствие всякому вектору $a \in R^n$ вектор $\hat{\varphi}_\upsilon a \in R^n$, являющийся результатом параллельного перенесения вектора a вдоль пути υ (в силу римановой связности, индуцированной римановой метрикой (8)). Если $\upsilon = \hat{u}(z)$ где путь $\hat{u}$ определен через некоторый путь $u \in G(y_1, y_2)$, лежащий в $U_\sigma(z)$, формулой (19), то, как известно,

$$\hat{\varphi}_{\hat{u}(z)} = \hat{\varphi}_u, \tag{21}$$

где отображение $\hat{\varphi}_u$ определено формулой:

$$\hat{\varphi}_u \underset{def}{=} \tau_{h_z y_1} d(h_z)_{y_1} \varphi_u \left(d(h_z)_{y_2}\right)^{-1} \left(\tau_{h_z y_2}\right)^{-1}. \tag{22}$$

е) Лемма 2. *Пусть риманово многообразие* (V^n, δ) *равномерно картографируемо. Тогда найдутся числа* $\overline{c} \in R^+$, $d \in R_*^+$, *такие, что для всякого* $z \in V^n$ *для всяких* $\hat{y}_1 \in G_z \underset{(6)}{=} h_z U_\sigma(z)$, $\hat{y}_2 \in G_z$ *для всякого пути* $\upsilon \in G(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$, *лежащего в* G_z, *имеет место неравенство*

$$\left\| \hat{\varphi}_\upsilon - 1_{R^n} \right\|_c \leqslant s(\upsilon)\overline{c} d^{-1} n^{\frac{5}{2}} \exp\left(\overline{c} d^{-1} n^2 s(\upsilon)\right).$$

Доказательство. Пусть $x \in V^n$. Как известно, отображение $\hat{\varphi}_\upsilon : R^n \to R^n$, упомянутое в подпункте д), может быть описано следующим образом. Пусть $y_1 \in G_x$, $y_2 \in G_x$ и пусть путь $\upsilon \in G(y_1, y_2)$ лежит в G_x. Пусть $a_0 = (a_0^1, ..., a_0^n) \in R^n$. Тогда вектор $\hat{\varphi}_\upsilon a_0$ равен значению при $t = 1$ решения следующей задачи Коши**):

$$\frac{da^\gamma}{dt} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \left(x; \upsilon_t^1, ..., \upsilon_t^n\right) \frac{d\upsilon_t^\alpha}{dt} a^\beta \tag{23}$$

$$\left(\gamma \in \{1, ..., n\}\right), \quad a(0) = a_0, \tag{24}$$

где $\left(\upsilon_t^1, ..., \upsilon_t^n\right) = \upsilon_t \left(t \in [0,1]\right)$, а символы Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ определены известной формулой

---

*) Напомним, что координатные отображения принадлежат тому же классу гладкости, что и многообразие V^n, в данном случае, следовательно, они принадлежат классу C^3 (это условие наложено в п. 1 введения).

**) Для числовой функции $\xi(\cdot)$, значение которой в точке t может обозначаться не только через $\xi(t)$, но и через ξ_t, принято стандартное обозначение (вместо $\frac{d\xi}{dt}$ может быть написано $\frac{d\xi_t}{dt}$):

$$\frac{d\xi}{dt} = \lim_{\vartriangle t \to 0} (\vartriangle t)^{-1} \left[\xi(t + \vartriangle t) - \xi(t)\right].$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\left(x;z^1,\dots,z^n\right) \underset{def}{=} \frac{1}{2} g^{\gamma\xi}\left(x;z^1,\dots,z^n\right)\times$$
$$\times\left[\frac{\partial g_{\alpha\xi}\left(x;z^1,\dots,z^n\right)}{\partial z^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\xi}\left(x;z^1,\dots,z^n\right)}{\partial z^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}\left(x;z^1,\dots,z^n\right)}{\partial z^{\xi}}\right]. \qquad (25)$$

В правых частях равенств (23) и (25) по всякому дважды (вверху и внизу) встречающемуся индексу подразумевается суммирование от 1 до *n.* Через $(g^{\alpha\beta})$ обозначается матрица, обратная матрице $(g_{\alpha\beta})$.

Так как при всяком $x \in V^n$ при всяких $\alpha \in \{1,\dots,n\}$, $\beta \in \{1,\dots,n\}$ функция $g_{\alpha\beta}\left(x;\cdot\right): G_x \to R$ принадлежит классу C^2, то при всяком $x \in V^n$ при всяких $\alpha \in \{1,\dots,n\}$, $\beta \in \{1,\dots,n\}$, $\gamma \in \{1,\dots,n\}$ функция $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\left(x;\cdot\right): G_x \to R$ определенная формулой (25), непрерывна.

Из фразы, содержащей формулу (3), следует, что найдется $\overline{c} \in R^+$ такое, что при всяких $\alpha \in \{1,\dots,n\}$, $\beta \in \{1,\dots,n\}$, $\gamma \in \{1,\dots,n\}$, $x \in V^n$, $z = \left(z^1,\dots,z^n\right) \in G_x \underset{(6)}{=} h_x U_{\sigma}\left(x\right)$ имеет место неравенство

$$\left|\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\left(x;z\right)\right| \leqslant \overline{c}\,. \qquad (26)$$

Пусть $x \in V^n$, $\hat{y}_1 \in G_x$, $\hat{y}_2 \in G_x$ и пусть путь $\upsilon \in G\left(\hat{y}_1,\hat{y}_2\right)$ лежит в G_x.

Линейную систему дифференциальных уравнений (23) перепишем в виде

$$\frac{da^{\gamma}}{dt} = B^{\gamma}_{\beta}\left(x;t\right)a^{\beta} \quad \left(\gamma \in \{1,\dots,n\}\right), \qquad (27)$$

где

$$B^{\gamma}_{\beta}\left(x;t\right) \underset{def}{=} -\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\left(x;\upsilon^1_t,\dots,\upsilon^n_t\right)\frac{d\upsilon^{\alpha}_t}{dt} \qquad (28)$$
$$\left(\beta \in \{1,\dots,n\}, \gamma \in \{1,\dots,n\}\right).$$

(сохраняется обычное соглашение о суммировании по дважды (вверху и внизу) встречающимся индексам).

При всяких $x \in V^n$, $\beta \in \{1,\dots,n\}$, $\gamma \in \{1,\dots,n\}$, $t \in [0,1]$ имеем

$$\left|B^{\gamma}_{\beta}\left(x;t\right)\right| \underset{(28)}{\overset{(26)}{\leqslant}} \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{c}\left|\frac{d\upsilon^{\alpha}_t}{dt}\right|,$$

следовательно,

$$\left[B^{\gamma}_{\beta}\left(x;t\right)\right]^2 \leqslant \left(\overline{c}\right)^2 n^2 \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{d\upsilon^{\alpha}_t}{dt}\right)^2. \qquad (29)$$

Далее, при всяких $x \in V^n$, $\gamma \in \{1,\dots,n\}$, $\tau \in [0,1]$ имеем

$$\sum_{\beta=1}^{n}\left[B^{\gamma}_{\beta}\left(x;\tau\right)\right]^2 \underset{(29)}{\leqslant} \left(\overline{c}\right)^2 n^3 \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{d\upsilon^{\alpha}_{\tau}}{d\tau}\right)^2 \underset{(15)}{\overset{(10)}{\leqslant}} \left(\overline{c}\right)^2 n^3 d^{-2} g_{\alpha\beta}\left(x;\upsilon_{\tau}\right)\frac{d\upsilon^{\alpha}_{\tau}}{d\tau}\frac{d\upsilon^{\beta}_{\tau}}{d\tau}. \qquad (30)$$

В силу леммы Гронуолла для всякого решения $a\left(t\right) = \left(a^1\left(t\right),\dots,a^n\left(t\right)\right)$ линейной системы дифференциальных уравнений (27) при всяком $t \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$\left|a\left(t\right)\right|_c \leqslant \left|a\left(0\right)\right|_c \exp\int_0^t\left(\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\left[B^{\gamma}_{\beta}\left(x;\tau\right)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \underset{(30)}{\leqslant}$$

$$\underset{(30)}{\leqslant}\left|a(0)\right|_c \exp\left\{\overline{c}n^2 d^{-1}\int_0^1\left[g_{\alpha\beta}\left(x;\upsilon_\tau\right)\frac{d\upsilon_\tau^\alpha}{d\tau}\frac{d\upsilon_\tau^\beta}{d\tau}\right]^{\frac{1}{2}} d\dot{\tau}\right\}. \tag{31}$$

Поскольку длина пути υ по определению равна

$$s(\upsilon)\underset{def}{=}\int_0^1\left[g_{\alpha\beta}\left(x;\upsilon_\tau\right)\frac{d\upsilon_\tau^\alpha}{d\tau}\frac{d\upsilon_\tau^\beta}{d\tau}\right]^{\frac{1}{2}} d\tau, \tag{32}$$

то из формулы (31) при всяком $t\in[0,1]$ следует неравенство

$$\left|a(t)\right|_c \leqslant \left|a(0)\right|_c \exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2 s(\upsilon)\right). \tag{33}$$

Для всякого решения $a(t)=\left(a^1(t),...,a^n(t)\right)$ системы (27) при всяком $t\in[0,1]$ имеем

$$a^\gamma(t)-a^\gamma(0)=\int_0^t B_\beta^\gamma(x;\tau)a^\beta(\tau)\,d\tau \quad \left(\gamma\in\{1,...,n\}\right), \tag{34}$$

$$\left|a(1)-a(0)\right|_c \underset{(10)}{\leqslant} \sum_{\gamma=1}^n\left|a^\gamma(1)-a^\gamma(0)\right| \underset{(34)}{\leqslant} \sum_{\gamma=1}^n\int_0^1 |B_\beta^\gamma(\tau)|\cdot|a^\beta(\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\gamma=1}^n\int_0^1\left[\sum_{\beta=1}^n\left|B_\beta^\gamma(x;\tau)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{\beta=1}^n\left|a^\beta(\tau)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} d\tau \underset{(10)}{=}$$

$$\underset{(10)}{=}\int_0^1\left\{\sum_{\gamma=1}^n\left[\sum_{\beta=1}^n\left|B_\beta^\gamma(x;\tau)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\left|a(\tau)\right|_c d\tau \underset{(33)}{\leqslant}$$

$$\underset{(33)}{\leqslant}\left|a(0)\right|_c\left\{\exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2 s(\upsilon)\right)\right\}\int_0^1\sum_{\gamma=1}^n\left[\sum_{\beta=1}^n\left[B_\beta^\gamma(x;\tau)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}} d\tau \leqslant$$

$$\overset{(30)}{\underset{(32)}{\leqslant}}\left|a(0)\right|_c\left\{\exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2 s(\upsilon)\right)\right\}\overline{c}d^{-1}n^{\frac{5}{2}}s(\upsilon). \tag{35}$$

В силу равенства $a(1)=\hat{\varphi}_\upsilon a(0)$ (см. начало доказательства леммы 2) из формулы (35) следует неравенство

$$\left|\hat{\varphi}_\upsilon a-a\right|_c \leqslant \left|a\right|_c\left\{\exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2 s(\upsilon)\right)\right\}\overline{c}d^{-1}n^{\frac{5}{2}}s(\upsilon) \tag{36}$$

для всякого $a\in R^n$.

Итак, доказано следующее. *Найдутся числа* $\overline{c}\in R^+$, $d\in R_*^+$, *такие, что для всякого* $z\in V^n$ для всяких $\hat{y}_1\in G_z$, $\hat{y}_2\in G_z$ *для всякого пути* $\upsilon\in G\left(\hat{y}_1,\hat{y}_2\right)$, *лежащего в* G_z, *имеет место неравенство*

$$\left\|\hat{\varphi}_\upsilon-1_{R^n}\right\|_c \underset{(36)}{\leqslant} s(\upsilon)\overline{c}d^{-1}n^{\frac{5}{2}}\exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2 s(\upsilon)\right). \tag{37}$$

Лемма 2 доказана.

ж) Напомним формулу

$$\dot{\upsilon}_t \underset{def}{=} d\upsilon_t\left(\tau_t^{[1]}\right)^{-1}1, \tag{38}$$

где $\upsilon:[0,1]\to R^n$ (или $\upsilon\cdot[0,1]\to V^n$) — кусочно-гладкое отображение, $d\upsilon_t$ — его производная в точке *t*, понимаемая как отображение касательного пространства многообразия *R* в точке *t* в касательное пространство многообразия R^n (или V^n) в точке υ_t, где υ_t — значение отображения υ в точке *t*; для $\upsilon:[0,1]\to R^n$ имеем

$$\tau_{\upsilon_t} d\upsilon_t \left(\tau_t^{[1]}\right)^{-1} 1 = \left(\frac{d\upsilon^1}{dt}, \dots, \frac{d\upsilon^n}{dt}\right) \tag{39}$$

(формула (39) — хорошо известное равенство; смысл, вкладываемый в его правую часть, разъяснен выше при пояснении формулы (23): $\frac{d}{dt}$ понимается как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю).

Отметим, что обозначение $\dot{u}_t$ (или $\dot{\upsilon}_t$) часто встречается в этой статье; везде смысл, вкладываемый в это обозначение, один и тот же — он расшифровывается формулой (38).

Пусть теперь $x \in V^n$, $y_1 \in U_\sigma(x)$, $y_2 \in U_\sigma(x)$ и пусть путь $u \in G(y_1, y_2)$ лежит в $U_\sigma(x)$. Тогда (см. п. д)) путь $\hat{u}(x)$, определенный формулой (19) $(z = x)$, кусочно-гладкий и лежит в $G_x \underset{(6)}{=} h_x U_\sigma(x)$.

Имеем

$$s(\hat{u}(x)) = \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta}(x; \hat{u}_t(x)) \frac{d\hat{u}_t^\alpha(x)}{dt} \frac{d\hat{u}_t^\beta(x)}{dt} \right]^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$\underset{(39)}{\overset{(38)}{=}} \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta}(x; \hat{u}_t(x)) \left(\tau_{\hat{u}_t(x)} \dot{\hat{u}}_t(x)\right)^\alpha \left(\tau_{\hat{u}_t(x)} \dot{\hat{u}}_t(x)\right)^\beta \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(8)}{=}$$

$$\underset{(8)}{=} \int_0^1 \left[\delta_x\left(\dot{\hat{u}}_t(x), \dot{\hat{u}}_t(x)\right) \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(7)}{=}$$

$$\underset{(7)}{=} \int_0^1 \left[\delta\left(d\left(h_x^{-1}\right)_{\hat{u}_t(x)} \dot{\hat{u}}_t(x), d\left(h_x^{-1}\right)_{\hat{u}_t(x)} \dot{\hat{u}}_t(x) \right) \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(38)}{\overset{(19)}{=}}$$

$$\underset{(38)}{\overset{(19)}{=}} \int_0^1 \left[\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t) \right]^{\frac{1}{2}} dt = s(u).. \tag{40}$$

з) Для всяких $x \in V^n$, $y \in U_\sigma(x)$ для всякого пути $u \in G(y, y)$, лежащего в $U_\sigma(x)$, имеют место равенства

$$\varphi_u \underset{(22)}{=} \left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} \hat{\varphi}_u \tau_{h_x y} d(h_x)_y, \tag{41}$$

$$\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)} \underset{(41)}{=} \left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} \hat{\varphi}_u \tau_{h_x y} d(h_x)_y -$$

$$-\left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} \tau_{h_x y} d(h_x)_y \underset{(21)}{=} \left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} \left(\hat{\varphi}_{\hat{u}(x)} - 1_{R^n}\right) \tau_{h_x y} d(h_x)_y, \tag{42}$$

$$\left\| \varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)} \right\| \underset{def}{=} \sup_{\mathfrak{h} \in \pi_*^{-1}(y)} \left\{ \left[\delta\left(\left(\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)}\right)\mathfrak{h}, \left(\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)}\right)\mathfrak{h} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= \sup_{b \in R_*^n} \left\{ \left[\delta\left(\left(\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)}\right) \left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} b, \left(\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)}\right) \left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} b \right) \right]^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\delta\left(\left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} b, \left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} b \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \underset{(42)}{=}$$

$$\underset{(42)}{=} \sup_{b \in R_*^n} \left\{ \left[\delta\left(\left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} \left(\hat{\varphi}_{\hat{u}(x)} - 1_{R^n}\right) b, \left(d(h_x)_y\right)^{-1} \left(\tau_{h_x y}\right)^{-1} \left(\hat{\varphi}_{\hat{u}(x)} - 1_{R^n}\right) b \right) \right]^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\times\left[\delta\left(\left(d\left(h_x\right)_y\right)^{-1}\left(\tau_{h_xy}\right)^{-1}b,\left(d\left(h_x\right)_y\right)^{-1}\left(\tau_{h_xy}\right)^{-1}b\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\}\underset{(12)}{=}$$

$$\underset{(12)}{=}\sup_{b\in R_*^n}\left\{\left|\left(\hat{\varphi}_{\hat{u}(x)}-1_{R^n}\right)b\right|_{x,h_xy}\left(\left|b\right|_{x,h_xy}\right)^{-1}\right\}\underset{(11)}{=}\left\|\hat{\varphi}_{\hat{u}(x)}-1_{R^n}\right\|_{x,h_xy}^{x,h_xy}\underset{(11)}{\overset{(9)}{\leqslant}}$$

$$\underset{(11)}{\overset{(9)}{\leq}}\left\|1_{R^n}\right\|_{(c)}^{x,h_xy}\left\|\hat{\varphi}_{\hat{u}(x)}-1_{R^n}\right\|_c\left\|1_{R^n}\right\|_{x,h_xy}^{(c)}, \tag{43}$$

где

$$\left\|1_{R^n}\right\|_{(c)}^{x,z}\underset{(13)}{=}\sup_{a\in R_*^n}\left\{\left|a\right|_{x,z}\left|a\right|_c^{-1}\right\}, \tag{44}$$

$$\left\|1_{R^n}\right\|_{x,z}^{(c)}\underset{(14)}{=}\sup_{a\in R_*^n}\left\{\left|a\right|_c\left|a\right|_{x,z}^{-1}\right\} \tag{45}$$

(при всяком $x\in V^n$, при всяком $z\in h_xU_\sigma\left(x\right)$); напомним, что норма $\left|a\right|_{x,z}$ определена формулой (12).

При написании второго равенства цепочки (43) использовано равенство*): $\left(d\left(h_x\right)_y\right)^{-1}\left(\tau_{h_xy}\right)^{-1}R_*^n=\pi_*^{-1}\left(y\right)$, вытекающее из невырожденности при всяких $z\in R^n$, $x\in V^n$, $z\in U_\sigma\left(x\right)$ линейных отображений $\tau_{\hat{z}}:\hat{\pi}^{-1}\left(\hat{z}\right)\to R^n$, $d\left(h_x\right)_z:\pi^{-1}\left(z\right)\to\hat{\pi}^{-1}\left(h_xz\right)$.

и) Для всяких $z\in V^n$, $y\in U_\sigma\left(z\right)$ имеем в силу леммы 1

$$\left\|1_{R^n}\right\|_{(c)}^{z,h_zy}\leqslant\overline{d}\,, \tag{46}$$

$$\left\|1_{R^n}\right\|_{z,h_zy}^{(c)}\leqslant\overline{d}^{-1}, \tag{47}$$

причем для всякого пути $u\in G\left(y,y\right)$, лежащего в $U_\sigma\left(z\right)$,

$$\left\|\varphi_u-1_{\pi^{-1}(y)}\right\|\underset{(43)}{\leqslant}\left\|1_{R^n}\right\|_{(c)}^{z,h_zy}\left\|\hat{\varphi}_{\hat{u}(z)}-1_{R^n}\right\|_c\left\|1_{R^n}\right\|_{z,h_zy}^{(c)}\underset{(47)}{\overset{(46)}{\leqslant}}$$

$$\underset{(47)}{\overset{(46)}{\leqslant}}\overline{d}d^{-1}\left\|\hat{\varphi}_{\hat{u}(z)}-1_{R^n}\right\|_c\underset{лемма2}{\leqslant}s\left(\hat{u}\left(z\right)\right)\overline{c}\overline{d}d^{-2}n^{\frac{5}{2}}\exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2s\left(\hat{u}\left(z\right)\right)\right)\underset{(40)}{=}$$

$$\underset{(40)}{=}s\left(u\right)\overline{c}\overline{d}d^{-2}n^{\frac{5}{2}}\exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2s\left(u\right)\right). \tag{48}$$

к) Лемма 3. *Пусть риманово многообразие* $\left(V,\delta\right)$ *равномерно картографируемо. Тогда для всякого***) $\varepsilon\in R_*^+$ *существует* $\eta(\varepsilon)\in R_*^+$ *такое, что для всякого* $x\in V^n$ *для всякого пути* $u\in G\left(x,x\right)$, *имеющего длину* $s\left(u\right)<\eta(\varepsilon)$), *выполнено неравенство* $\left\|\varphi_u-1_{\pi^{-1}(x)}\right\|<\varepsilon$.

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon\in R_*^+$. Возьмем $\eta(\varepsilon)\in\left(0,\sigma\right)$ такое, что

$$\eta\left(\varepsilon\right)\overline{c}\overline{d}d^{-2}n^{\frac{5}{2}}\exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2\eta\left(\varepsilon\right)\right)<\varepsilon \tag{49}$$

(напомним, что число $\sigma\in R_*^+$ определено в п. 2 § 1).

Для всякого $x\in V^n$ всякий путь $u\in G\left(x,x\right)$, имеющий длину

$$s\left(u\right)<\eta(\varepsilon)\in\left(0,\sigma\right), \tag{50}$$

---

*) Через $\pi^{-1}\left(y\right)$ обозначается множество всех ненулевых векторов касательного пространства $\pi^{-1}\left(y\right)$.

**) Через R_*^+ обозначается множество положительных вещественных чисел.

лежит в $U_\sigma(x)$; в самом деле, для всякого $\theta \in [0,1]$ имеем

$$\rho(u_\theta, x) = \inf_{\omega \in G(u_\theta, x)} s(\omega) \leqslant s\left(\omega^{[\theta]}\right), \tag{51}$$

где путь $\omega^{[\theta]} \in G(u_\theta, x)$ определен формулой

$$\omega_t^{[\theta]} \underset{def}{=} u_{\theta t} \left(t \in [0,1]\right); \tag{52}$$

далее,

$$s\left(\omega^{[\theta]}\right) \underset{(52)}{=} \int_0^1 \left[\delta\left((u_{\theta t}); (u_{\theta t})^\cdot\right)\right]^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)\right]^{\frac{1}{2}} dt \leqslant \int_0^1 \left[\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)\right]^{\frac{1}{2}} dt = s(u) \underset{(50)}{<} \eta\,, \tag{53}$$

$$\rho(u_\theta, x) \underset{(51)}{\leqslant} s\left(\omega^{[\theta]}\right) \underset{(53)}{<} \eta \underset{(50)}{<} \sigma\,.$$

В силу доказанного в подпункте и) отсюда следует, что для всякого $x \in V^n$ для всякого пути $u \in G(x,x)$, имеющего длину $s(u) < \eta(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$$\left\|\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(x)}\right\| \underset{(48)}{\leqslant} s(u)\overline{c}\overline{d}d^{-2}n^{\frac{5}{2}} \exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2 s(u)\right) <$$

$$< \eta(\varepsilon)\overline{c}\overline{d}d^{-2}n^{\frac{5}{2}} \exp\left(\overline{c}d^{-1}n^2 \eta(\varepsilon)\right) \underset{(49)}{<} \varepsilon\,.$$

Лемма 3 доказана.

4. Предложение. *Если риманово многообразие* (V^n, δ) *равномерно картографируемо*[*)]*, то при всяком* $j \in S$ *метрика* $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$*, определенная формулой (B.6), индуцирует на* S_j *ту же топологию, что и метрика* $\tilde{d}_{jet_1}(\cdot,\cdot)$*, определенная (формулой (1).*

Доказательство. Пусть дано $j \in S$.

1) При всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ имеет место неравенство

$$\tilde{d}_{jet_1}(f,g) \leqslant \tilde{d}_1(f,g) \tag{54}$$

(равномерная картографируемость в этом месте не используется).

В самом деле, пусть даны $f \in S_j$, $g \in S_j$. При всяком $z \in V^n$ путь $u[z]$, определенный формулой $u[z]_t \equiv z \quad (t \in [0,1])$, принадлежит множеству $G(z,z)$ и удовлетворяет равенствам $s(u[z]) = 0$, $\varphi_{u[z]} = 1_{\pi^{-1}(z)}$ (применяемые здесь обозначения разъяснены в п. 3 введения). Поэтому при всяком $z \in V^n$ имеем

$$\rho_1\left((jet_1 f)z, (jet_1 g)z\right) \underset{(B.9)}{=} \rho_1\left((z, fz, df_z), (z, gz, dg_z)\right) \underset{(B.7)}{=}$$

$$\underset{(B.7)}{=} \inf_{\substack{u \in G(z,z) \\ \upsilon \in G(fz, gz)}} \left\{s(u) + s(\upsilon) + \left\|\varphi_\upsilon dg_z \varphi_u - df_z\right\|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\upsilon \in G(fz, gz)} \left\{s(u[z]) + s(\upsilon) + \left\|\varphi_\upsilon dg_z \varphi_{u[z]} - df_z\right\|\right\} =$$

$$= \inf_{\upsilon \in G(fz, gz)} \left\{s(\upsilon) + \left\|\varphi_\upsilon dg_z - df_z\right\|\right\}.$$

Следовательно, имеет место неравенство

[*)] См. п. 2.

$$\sup_{z\in V^n}\rho_1\left(\left(jet_1 f\right)z,\left(jet_1 g\right)z\right)\leqslant\sup_{z\in V^n}\inf_{\upsilon\in G(fz,gz)}\left\{s\left(\upsilon\right)+\left\|\varphi_\upsilon dg_z-df_z\right\|\right\},$$

левая часть которого в силу (1) равна $\tilde{d}_{jet_1}\left(f,g\right)$, а правая — в силу (B.6) равна $\tilde{d}_1\left(f,g\right)$.

2) В силу леммы 3 из равномерной картографируемости риманова многообразия $\left(V^n,\delta\right)$ следует, что для всякого $\varepsilon\in R_*^+$ существует $\eta(\varepsilon)\in R_*^+$ такое, что для всякой точки $z\in V^n$ для всякого пути $u\in G\left(z,z\right)$, имеющего длину $s\left(u\right)<\eta(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$$\left\|\varphi_u-1_{\pi^{-1}(z)}\right\|<\varepsilon .$$

3) Пусть дано $f\in S_j$. Для всякого $g\in S_j$ для всякой точки $z\in V^n$ для всякого пути $u\in G\left(z,z\right)$ и всякого пути $\upsilon\in G\left(fz,gz\right)$ имеем

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_\upsilon dg_z-df_z\right\|&=\left\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u-df_z\varphi_u\right\|\leqslant\left\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u-df_z\right\|+\left\|df_z-df_z\varphi_u\right\|\leqslant\\&\leqslant\left\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u-df_z\right\|+\left\|df_z\right\|\cdot\left\|\varphi_u-1_{\pi^{-1}(z)}\right\|\underset{(B.2)}{\leqslant}\\&\underset{(B.2)}{\leqslant}\left\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u-df_z\right\|+\left\|\left|df\right|\right\|\cdot\left\|\varphi_u-1_{\pi^{-1}(z)}\right\|\end{aligned}\tag{55}$$

(в написанной цепочке равенство следует из того, что φ_u — изоморфизм евклидова пространства).

Пусть дано $\varepsilon\in R_*^+$. Пользуясь написанным в п. 2), возьмем $\xi\in R_*^+$ такое, что для всякой точки $z\in V^n$ для всякого пути $u\in G\left(z,z\right)$, имеющего длину $s\left(u\right)<\xi$, выполнено неравенство

$$\left\|\varphi_u-1_{\pi^{-1}(z)}\right\|<\varepsilon\left(2\left\|\left|df\right|\right\|\right)^{-1}.\tag{56}$$

Пусть $g\in S_j$ удовлетворяет неравенству

$$\tilde{d}_{jet_1}\left(f,g\right)<\min\left\{\frac{\varepsilon}{4},\xi\right\}.\tag{57}$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\sup_{z\in V^n}\inf_{\substack{u\in G(z,z)\\ \upsilon\in G(fz,gz)}}\left\{s\left(u\right)+s\left(\upsilon\right)+\left\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u-df_z\right\|\right\}\underset{(B.7)}{=}\\&\underset{(B.7)}{=}\sup_{z\in V^n}\rho_1\left(\left(z,fz,df_z\right),\left(z,gz,dg_z\right)\right)\underset{(B.9)}{=}\sup_{z\in V^n}\rho_1\left(\left(jet_1 f\right)z,\left(jet_1 g\right)z\right)\underset{(1)}{=}\\&\underset{(1)}{=}\tilde{d}_{jet_1}\left(f,g\right)\underset{57}{<}\min\left\{\frac{\varepsilon}{4},\xi\right\},\end{aligned}$$

откуда следует, что для всякого $z\in V^n$ выполнено неравенство

$$\inf_{\substack{u\in G(z,z)\\ \upsilon\in G(fz,gz)}}\left\{s\left(u\right)+s\left(\upsilon\right)+\left\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u-df_z\right\|\right\}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{4},\xi\right\}.$$

Следовательно, для всякого $z\in V^n$ найдутся $u\in G\left(z,z\right)$, $\upsilon\in G\left(fz,gz\right)$ такие, что

$$s\left(u\right)+s\left(\upsilon\right)+\left\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u-df_z\right\|<\min\left\{\frac{\varepsilon}{4},\xi\right\}.\tag{58}$$

Отсюда следует, что $s\left(u\right)<\xi$, откуда в свою очередь следует (56).

Для всякого $z\in V^n$ для путей $u\in G\left(z,z\right)$, $\upsilon\in G\left(fz,gz\right)$, удовлетворяющих неравенству (58), имеем поэтому

$$s\left(\upsilon\right)+\left\|\varphi_\upsilon dg_z-df_z\right\|\underset{(55)}{\leqslant}s\left(\upsilon\right)+\left\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u-df_z\right\|+\left\|\left|df\right|\right\|\cdot\left\|\varphi_u-1_{\pi^{-1}(z)}\right\|\underset{(56)}{<}$$

$$\underset{(56)}{<} s(\upsilon)+\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u - df_z\| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s(u)+s(\upsilon)+$$
$$+\|\varphi_\upsilon dg_z\varphi_u - df_z\| + \frac{\varepsilon}{2} \underset{(58)}{<} \frac{3}{4}\varepsilon .$$

Тем самым доказано, что для всякого $z \in V^n$ найдется путь $\upsilon \in G(fz, gz)$ такой, что $s(\upsilon)+\|\varphi_\upsilon dg_z - df_z\| < \frac{3}{4}\varepsilon$, следовательно, для всякого $z \in V^n$ имеет место неравенство

$$\inf_{\upsilon\in G(fz,gz)} \left\{ s(\upsilon)+\|\varphi_\upsilon dg_z - df_z\| \right\} < \frac{3}{4}\varepsilon . \tag{59}$$

Имеем

$$\tilde{d}_1(f,g) \underset{(B.6)}{=} \sup_{z\in V^n} \inf_{\upsilon\in G(fz,gz)} \left\{ s(\upsilon)+\|\varphi_\upsilon dg_z - df_z\| \right\} \underset{(59)}{\leqslant} \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon .$$

Подведем итог этого пункта. В этом пункте доказано, что *для всякого* $f \in S_j$ *для всякого* $\varepsilon \in R_*^+$ *найдется* $\eta \in R_*^+$ $\left(\eta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \xi\right\}\right)$ *такое, что для всякого* $g \in S_j$, *удовлетворяющего неравенству* $\tilde{d}_{jet_1}(f,g) < \eta$, *выполнено неравенство* $\tilde{d}_1(f,g) < \varepsilon$.

4) Из неравенства (54), доказанного в п. 1), следует, что отображение 1_{S_j} метрического пространства $(S_j, \tilde{d}_1)$ в метрическое пространство $(S_j, \tilde{d}_{jet_1})$ (у этих пространств одно и то же множество точек S_j, поэтому тождественное отображение 1_{S_j} можно рассматривать как отображение любого из этих метрических пространств на любое из них) непрерывно. Итог п. 3) состоит в том, что отображение 1_{S_j} метрического пространства $(S_j, \tilde{d}_{jet_1})$ в метрическое пространство $(S_j, \tilde{d}_1)$ непрерывно.

Следовательно, 1_{S_j} — гомеоморфизм метрических. пространств $(S_j, \tilde{d}_1)$ и $(S_j, \tilde{d}_{jet_1})$. Предложение доказано.

5. Лемма 4. *Пусть риманово многообразие* (V^n, δ) *равномерно картографируемо*[1]. *Тогда существует* $d_1 \in R_*^+$ *такое, что для всяких* $\gamma \in (0,\sigma)$, $z \in V^n$ *для всякого* $\hat{y} \in R^n$, *удовлетворяющего неравенству* $|\hat{y}|_c < d_1\gamma$, *имеет место включение* $\hat{y} \in h_z U_\gamma(z)$.

Доказательство. Для всякого $z \in V^n$ для всякого пути υ, лежащего в $h_z U_\sigma(z)$, имеет место формула

$$s(\upsilon) \underset{(40)}{=} \int_0^1 \left[\delta\left(d\left(h_z^{-1}\right)_{\upsilon_t} \dot{\upsilon}_t, d\left(h_z^{-1}\right)_{\upsilon_t} \dot{\upsilon}_t \right) \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(12)}{=} \int_0^1 \left| \tau_{\upsilon_t} \dot{\upsilon}_t \right|_{z,\upsilon_t} dt \underset{(44)}{\leqslant}$$
$$\underset{(44)}{\leqslant} \int_0^1 \left\| 1_{R^n} \right\|_{(c)}^{z,\upsilon_t} \left| \tau_{\upsilon_t} \dot{\upsilon}_t \right|_c dt \underset{(46)}{\leqslant} \overline{d} \int_0^1 \left| \tau_{\upsilon_t} \dot{\upsilon}_t \right|_c dt \underset{(39)}{\overset{(38)}{=}} \overline{d} \int_0^1 \left| \frac{d\upsilon_t}{dt} \right|_c dt.. \tag{60}$$

Пусть дано

$$\gamma \in (0,\sigma). \tag{61}$$

Положим

---

[1] См. п. 2. В формулировке леммы 4 используются обозначения, разъясненные в п. 2. Через $U_r(z)$ обозначается $\left\{ y \in V^n : \rho(y,z) < r \right\}$.

$$\xi(\gamma) \underset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\bar{d}\right)^{-1}\gamma . \tag{62}$$

Пусть дано $z \in V^n$ и дано $\hat{y} \in R^n$, удовлетворяющее неравенству

$$\left|\hat{y}\right|_c < \xi(\gamma). \tag{63}$$

Так как $0 \underset{(2)}{=} h_z z \in h_z U_\gamma(z)$, а множество $h_z U_\gamma(z)$ открыто в R^n, то множество $\left\{t \in [0,1] : t\hat{y} \in h_z U_\gamma(z)\right\}$ есть открытая окрестность нуля в [0, 1], следовательно, его дополнение в [0, 1], т. е. множество

$$F \underset{def}{=} \left\{t \in [0,1] : t\hat{y} \notin h_z U_\gamma(z)\right\} \tag{64}$$

замкнуто в [0, 1] и не содержит нуля.

Предположим, что

$$F \neq \varnothing , \tag{65}$$

тогда (в силу предыдущей фразы)

$$t^* \underset{def}{=} \inf F \in (0,1] \cap F . \tag{66}$$

Так как $t\hat{y} \in h_z U_\gamma(z)$ для всякого $t \in \left[0,t^*\right)$ (вследствие формул (64), (66)), то для всяких

$$\tau \in \left[0,t^*\right),\ \theta \in \left[0,t^*\right) \tag{67}$$

гладкий путь $\upsilon(\theta,\tau)$ в R^n, определенный формулой

$$\upsilon(\theta,\tau)_t = \left(t\theta + (1-t)\tau\right)y \quad \left(t \in [0,1]\right), \tag{68}$$

лежит в множестве $h_z U_\gamma(z) \underset{61}{\subset} h_z U_\sigma(z)$. Следовательно,

$$s\left(\upsilon(\theta,\tau)\right) \underset{(60)}{\leqslant} \bar{d}\int_0^1 \left|\frac{d\upsilon(\theta,\tau)_t}{dt}\right|_c dt \underset{(68)}{=} \bar{d}\int_0^1 \left|(\theta-\tau)\hat{y}\right|_c dt = \bar{d}\left|(\theta-\tau)\hat{y}\right|_c =$$

$$= \bar{d}\left|\theta-\tau\right|\left|\cdot\right|\hat{y}\big|_c . \tag{69}$$

Так как при всяких $\tau \in \left[0,t^*\right)$, $\theta \in \left[0,t^*\right)$ гладкий путь $\upsilon(\theta,\tau)$ лежит в открытом множестве $h_z U_\gamma(z) \underset{61}{\subset} h_z U_\sigma(z)$, а $h_z^{-1} : h_z U_\sigma(z) \to U_\sigma(z)$ — диффеоморфизм, то при всяких $\tau \in \left[0,t^*\right)$, $\theta \in \left[0,t^*\right)$ путь $u(\theta,\tau) \underset{def}{=} h_z^{-1}\upsilon(\theta,\tau)$, определенный формулой

$$\left(h_z^{-1}\upsilon(\theta,\tau)\right)_t = h_z^{-1}\upsilon(\theta,\tau)_t \quad \left(t \in [0,1]\right), \tag{70}$$

гладкий и лежит в множестве $U_\gamma(z)$, причем

$$u(\theta,\tau) \overset{(68)}{\underset{(70)}{=}} G\left(h_z^{-1}(\theta\hat{y}), h_z^{-1}(\tau\hat{y})\right). \tag{71}$$

Так как

$$\hat{u}(\theta,\tau)(z) \overset{(19)}{\underset{(70)}{=}} \upsilon(\theta,\tau), \tag{72}$$

то

$$s\left(u(\theta,\tau)\right) \underset{(40)}{=} s\left(\upsilon(\theta,\tau)\right) \tag{73}$$

(при всяких $\tau \in \left[0,t^*\right)$, $\theta \in \left[0,t^*\right)$). Пусть $\left\{t_k\right\}_{k\in N}$ — некоторая последовательность точек интервала $(0,t^*)$, стремящаяся к t^*. Из (69), (73) имеем

$$s\left(u\left(t_k;t_m\right)\right) \underset{\min\{k,m\}\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{74}$$

откуда следует, что последовательность точек $h_z^{-1}(t_k\hat{y})$ фундаментальна в метрическом пространстве (V^n,ρ), так как

$$\rho\left(h_z^{-1}(\theta\hat{y}),h_z^{-1}(\tau\hat{y})\right)\underset{def}{=}\inf_{u\in G\left(h_z^{-1}(\theta\hat{y}),h_z^{-1}(\theta\hat{y})\right)} s(u)\underset{(71)}{\leqslant} s\left(u(\theta,\tau)\right) \tag{75}$$

при всяких $\theta\in\left[0,t^*\right)$, $\tau\in\left[0,t^*\right)$.

Так как метрическое пространство (V^n,ρ) полно (это условие наложено в п. 1 введения), то существует $y^*\in V^n$ такое, что

$$h_z^{-1}(t_k\hat{y})\underset{k\to\infty}{\to} y^*. \tag{76}$$

При этом

$$\rho\left(y^*,z\right)\underset{(76)}{=}\lim_{k\to\infty}\rho\left(h_z^{-1}(t_k\hat{y}),z\right)\leqslant\frac{1}{2}\gamma<\gamma, \tag{77}$$

так как при всяком $k\in N$ имеем

$$\rho\left(h_z^{-1}(t_k\hat{y}),z\right)\underset{(2)}{=}\rho\left(h_z^{-1}(t_k\hat{y}),h_z^{-1}0\right)\underset{def}{=}$$

$$\underset{def}{=}\inf_{u\in G\left(h_z^{-1}(t_k\hat{y}),h_z^{-1}0\right)} s(u)\underset{(71)}{\leqslant} s\left(u(t_k,0)\right)\underset{(73)}{=}s\left(\upsilon(t_k,0)\right)\underset{(69)}{\leqslant}$$

$$\underset{(69)}{\leqslant}\bar{d}\bar{t}_k\left|\hat{y}\right|_c<\bar{d}t^*\left|\hat{y}\right|_c\underset{(66)}{\leqslant}\bar{d}\left|y\right|_c\underset{(63)}{<}\bar{d}\xi(\gamma)\underset{(62)}{=}\frac{1}{2}\gamma.$$

Из формулы (77) следует неравенство $\rho\left(y^*,z\right)\leqslant\gamma$, означающее, что

$$y^*\in U_\gamma(z)\underset{(61)}{\subset}U_\sigma(z). \tag{78}$$

Так как координатное отображение $h_z:U_\sigma(z)\to R^n$ непрерывно, то из (76), (78) следует

$$t_k\hat{y}=h_zh_z^{-1}(t_k\hat{y})\underset{k\to\infty}{\to}h_zy^*. \tag{79}$$

Так как $t_k\underset{k\to\infty}{\to}t^*$, то из (79) следует

$$t^*\hat{y}=h_zy^*\underset{(78)}{\in}h_zU_\gamma(z).$$

В то же время из формулы (66) имеем $t^*\in F$, т. е. (см. формулу (64)) $t^*\hat{y}\notin h_zU_\gamma(z)$.

Это противоречие выведено из предположения непустоты множества F (см. формулу (65)). Следовательно, $F=\varnothing$, т. е. (см. формулу (64)) $t\hat{y}\in h_zU_\gamma(z)$ при всяком $t\in[0,1]$. В частности, $\hat{y}\in h_zU_\gamma(z)$.

Таким образом, доказано существование $d_1\in R_*^+$,

$$d_1\underset{def}{=}\frac{1}{2}\left(\bar{d}\right)^{-1} \tag{80}$$

(см. формулу (62)), такого, что для всяких $z\in V^n$, $\gamma\in(0,\sigma)$, для всякого $g\in R^n$, удовлетворяющего неравенству $\left|\hat{y}\right|_c<d_1\gamma$ (см. формулы (62), (63), (80)), имеет место включение

$$\hat{y}\in h_zU_\gamma(z).$$

Лемма 4 доказана.

Литература

1. Миллионщиков В. М. //Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 804—821.
2. Миллионщиков В. М. //Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 6. С. 957— 978.
3. Миллионщиков В. М. //Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 223— 236.

4. Миллионщиков В. М. //Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С. 771—776.
5. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
14 апреля 1983 г.