УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И АВТОМОРФИЗМЫ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ. II

Рассмотрение различных классов систем линейных дифференциальных уравнений сведено к рассмотрению гомоморфизмов группы действительных чисел в группы автоморфизмов специально построенных абстрактных векторных расслоений. Доказана эквивалентность некоторых определений показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений.

В [1] изложены элементы теории показателей Ляпунова различных классов линейных систем дифференциальных уравнений. Напомним описание этих классов.

Пусть на метрическом пространстве D задано непрерывное действие f^t группы действительных чисел R. Через S обозначаем множество непрерывных отображений $A(\cdot): D \to \operatorname{End}(E^n)$, где $\operatorname{End}(E^n)$ — множество линейных отображений n-мерного евклидова пространства E^n в себя. Для всяких $A \in S$, $x \in D$ рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = A(f^t x)u, \tag{1}$$

где $u \in E^n$.

В [2] по динамической системе f^t построен гомоморфизм H группы R в группу автоморфизмов некоторого абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. При этом в [2] вместо E^n рассматривалось R^n (или C^n), т. е. векторное пространство без скалярного произведения. Теперь мы можем обогатить структуру построенного в [2] абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, превратив его в метризованное абстрактное векторное расслоение, т. е. задав на нем некоторую риманову метрику. С этой целью положим

$$\langle \xi,\ \eta \rangle = (F_b \xi,\ F_b \eta) \tag{2}$$

для всяких $b \in B$, $\xi \in p^{-1}(b)$, $\eta \in p^{-1}(b)$, где $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение в E^n, а F_b — биекция слоя $p^{-1}(b)$ на пространство E^n, определенная формулой (6) статьи [2]. Формула (2) задает на каждом слое $p^{-1}(b)$ скалярное произведение, поскольку при всяком $b \in B$ отображение $F_b : p^{-1}(b) \to E^n$ есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство E^n (см. формулы (6), (7) [2]).

Для гомоморфизма H группы действительных чисел R в группу автоморфизмов метризованного векторного расслоения $((E,\ p,\ B),\ \langle \cdot,\ \cdot \rangle)$ определен показатель Ляпунова $\lambda(H,\ \xi)$ во всякой точке $\xi \in E$.

Напомним, что это определение дается формулой

$$\lambda(H,\ \xi) = \varlimsup_{t \to +\infty} t^{-1} \ln |X^t \xi|, \tag{3}$$

где $|\eta| = \langle \eta,\ \eta \rangle^{1/2}$ для всякого $\eta \in E$, а X^t — первый элемент пары $(X^t,\ \chi^t)$, являющейся образом точки $t \in R$ при гомоморфизме H. По определению, $\ln 0 = -\infty$, откуда, в частности, следует, что $\lambda(H,\ 0_b) = -\infty$, где 0_b — нулевой вектор слоя $p^{-1}(b)$ для всякого $b \in B$.

Формула (3) с точностью до обозначений совпадает с формулой (1) [3], определяющей показатель Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения в точке $\xi \in E$; то, что здесь обозначается через X^t (χ^t), в более общей ситуации, рассмотренной в [3], обозначено через X_t (соответственно через χ_t).

Определение 1 ([3], формула (37)). Для всяких $k \in \{1, \dots, n\}$, $b \in B$ показатель Ляпунова определяется формулой

$$\lambda_k(H, b) = \inf_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in R^{n-k+1}} \lambda(H, \xi),$$

где $G_q(p^{-1}(b))$ — множество q-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Определение 2. Пусть дано $b \in B$. Расположив в порядке неубывания по включению все различные значения отображения

$$\lambda \to \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(H, \xi) \leqslant \lambda\}$$

расширенной числовой прямой $\overline{R}$ в множество векторных подпространств пространства $p^{-1}(b)$ и написав первое из них столько раз подряд, какова его размерность, а затем каждое следующее столько раз подряд, какова разность его размерности с размерностью предыдущего, получим цепочку нестрогих включений $E_1(H, b) \subset \dots \subset E_n(H, b)$.
Положим $\lambda_k(H, b) = \sup_{\xi \in E_{n-k+1}(H, b)} \lambda(H, \xi)$.

Это определение совпадает с определением, приведенным в п. 5, 6 § 2 [3], и совпадает с совокупностью определений 3, 4 [4]. Напомним, что в п. 2, 3 [3] доказано, что множество $\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(H, \xi) \leqslant \lambda\}$ при всяких $b \in B$, $\lambda \in \overline{R}$ есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$.

В силу теоремы [3] определения 1 и 2 эквивалентны.

Определение 3. Пусть дано $b \in B$. Базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ называется н о р м а л ь н ы м б а з и с о м слоя $p^{-1}(b)$ (для гомоморфизма H), если для всякого базиса $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ того же пространства, расположенного в порядке невозрастания показателей $\lambda(H, \eta_1) \geqslant \dots \geqslant \lambda(H, \eta_n)$, при всяком $k \in \{1, \dots, n\}$ выполнено неравенство $\lambda(H, \eta_k) \geqslant \lambda(H, \xi_k)$. Для всяких $k \in \{1, \dots, n\}$, $b \in B$ положим $\lambda_k(H, b) = \lambda(H, \xi_k)$, где $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ — нормальный базис слоя $p^{-1}(b)$ (для гомоморфизма H).

Прежде чем доказывать корректность этого определения, сформулируем другое определение, несколько отличающееся от предыдущего по своей форме.

Определение 3′. Пусть дано $b \in B$. Базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$, расположенный в порядке невозрастания показателей $\lambda(H, \xi_1) \geqslant \dots \geqslant \lambda(H, \xi_n)$ называется н о р м а л ь н ы м б а з и с о м слоя $p^{-1}(b)$ (для гомоморфизма H), если для всякого базиса $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ того же пространства, расположенного в порядке невозрастания показателей $\lambda(H, \eta_1) \geqslant \dots \geqslant \lambda(H, \eta_n)$, при всяком $k \in \{1, \dots, n\}$ выполнено неравенство $\lambda(H, \eta_k) \geqslant \lambda(H, \xi_k)$.

При всяких $k \in \{1, \dots, n\}$, $b \in B$ положим $\lambda_k(H, b) = \lambda(H, \xi_k)$, где $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ — нормальный базис слоя $p^{-1}(b)$ (для гомоморфизма H).

Корректность определения 3′ и его эквивалентность определению 2 доказаны в [4] (см. теорему 1 цитируемой статьи).

Остается доказать эквивалентность определения 3 определению 3′, и попарная эквивалентность определений 1—3 будет установлена. Все различие в определениях 3 и 3′ состоит в том, что во втором из них на порядок расположения векторов $\xi_1, \dots, \xi_n$ накладывается требование:

эти векторы должны располагаться в порядке невозрастания показателей Ляпунова. В действительности это требование не является ограничением, а вытекает из остальных свойств нормального базиса. Для доказательства этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — точки расширенной числовой прямой $\overline{R}$ и пусть взаимно однозначное отображение $k \to m_k$ множества $\{1, \ldots, n\}$ на себя таково, что $\lambda_{m_k} \geqslant \lambda_k$ при всех $k \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\lambda_k = \lambda_{m_k}$ при всех $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Монотонно возрастающим отображением расширенной прямой $\overline{R}$ на отрезок $[0, 1]$ лемма сводится к своему частному случаю, в котором $\lambda_k \in [0, 1]$ для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть в этом частном случае лемма неверна, т. е. хоть одно из неравенств $\lambda_{m_k} \geqslant \lambda_k$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) является строгим. Сложив эти неравенства, получим тогда строгое неравенство для сумм: $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{m_k} > \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. В действительности же эти две суммы равны, поскольку отображение $k \to m_k$ есть биекция множества $\{1, \ldots, n\}$ на себя. Полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть теперь $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — нормальный базис слоя $p^{-1}(b)$ (для гомоморфизма H) в смысле определения 3. Взяв такую биекцию $k \to m_k$ множества $\{1, \ldots, n\}$ на себя, для которой

$$\lambda(H, \xi_{m_1}) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(H, \xi_{m_n}), \tag{4}$$

и положив $\eta_k = \xi_{m_k}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$), получим $\lambda(H, \xi_{m_k}) \geqslant \lambda(H, \xi_k)$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) в силу определения 3. Отсюда, согласно лемме 1, следуют равенства $\lambda(H, \xi_k) = \lambda(H, \xi_{m_k})$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$). В силу этих равенств из (4) вытекает цепочка неравенств $\lambda(H, \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(H, \xi_n)$. Поэтому $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — нормальный базис слоя $p^{-1}(b)$ (для гомоморфизма H) также и в смысле определения 3′. Эквивалентность определений 3 и 3′ доказана.

Вернемся к метризованному абстрактному векторному расслоению $((E, p, B), \langle\cdot, \cdot\rangle)$, определенному в начале этой статьи исходя из абстрактного векторного расслоения (E, p, B), построенного в [2].

Рассмотрим гомоморфизм $H: R \to \mathrm{Aut}(E, p, B)$, построенный в [2] по системе (1). Через $\mathrm{Aut}(E, p, B)$ здесь обозначена группа автоморфизмов абстрактного векторного расслоения (E, p, B). В дальнейшем изложении будем пользоваться обозначениями и терминами из [2].

Лемма 2. Для всяких $t \in R$, $A \in S$, $x \in D$ имеет место равенство $F_{\chi^t b} X^t[b] = X(t, 0; A, x) F_b$, где $b = (A, x)$.

Доказательство. Пусть даны $t \in R$, $A \in S$, $x \in D$. Положим $b = (A, x)$, тогда $b \in B = S \times D$. Для всякого $u \in E^n$, согласно формуле (8) [2], служащей определением отображения X^t, имеем $X^t((A, x), u) = ((A, f^t x), X(t, 0; A, x) u)$. Так как $(A, f^t x) = \chi^t(A, x)$ в силу формулы (9) [2], служащей определением отображения χ^t, то из предыдущего равенства следует $X^t(b, u) = (\chi^t b, X(t, 0; A, x) u)$.

Воспользуемся равенствами $F_b(b, u) = u$, $F_{\chi^t b}(\chi^t b, X(t, 0; A, x) u) = X(t, 0; A, x) u$. Первое из этих равенств есть в точности формула (6)′ [2], второе получается из формулы (6) [2], если заменить в последней b на $\chi^t b$, а u — на $X(t, 0; A, x) u$, что можно сделать, поскольку в цитированной формуле $b \in B$ и $u \in E^n$ произвольны. Из трех последних равенств следует, что

$$F_{\chi^t b} X^t(b, u) = X(t, 0; A, x) F_b(b, u) \tag{5}$$

для всякого $u \in E^n$. Так как $X^t[b]$ по определению есть сужение отображения X^t на слой $p^{-1}(b)$, то из (5) следует формула

$$F_{\chi^t b} X^t[b] = X(t,\ 0;\ A,\ x)\, F_b.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Для всяких $A \in S$, $x \in D$, $\xi \in p^{-1}(b)$, где $b = (A,\ x)$, имеет место равенство $\lambda(H,\ \xi) = \lambda(A,\ x;\ F_b \xi)$.

Пояснение. Правая часть написанного равенства определена формулой

$$\lambda(A,\ x;\ u) = \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, t^{-1} \ln |\, X(t,\ 0;\ A,\ x)\, u\,|, \tag{6}$$

а левая — формулой (3).

Доказательство леммы 3. Пусть даны $A \in S$, $x \in D$, $\xi \in p^{-1}(b)$, где $b = (A,\ x) \in B$. В силу леммы 2 для всякого $t \in R$ имеем

$$F_{\chi^t b} X^t \xi = X(t,\ 0;\ A,\ x)\, F_b \xi,$$

откуда

$$|\, X^t \xi\,| = |\, X(t,\ 0;\ A,\ x)\, F_b \xi\,|| \tag{7}$$

при всяком $t \in R$, так как $F_{\chi^t b}$ — изоморфизм евклидова пространства $p^{-1}(b)$ на E^n. Из (7) следует равенство $\overline{\lim_{t \to +\infty}}\, t^{-1} \ln |\, X^t \xi\,| = \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, t^{-1} \ln |\, X(t,\ 0;\ A,\ x)\, F_b \xi\,|$. Левая часть последнего равенства в силу (3) равна $\lambda(H,\ \xi)$, а правая — $\lambda(A,\ x;\ F_b \xi)$ в силу формулы, получаемой из (6) заменой $u = F_b \xi$. Лемма доказана.

Теорема 1. Для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $A \in S$, $x \in D$ имеет место равенство

$$\lambda_k(A,\ x) = \lambda_k(H,\ (A,\ x)).$$

Пояснение. Показатели $\lambda_k(A,\ x)$ введены определением m статьи [1], где $m \in \{1,\ 2,\ 3\}$, а показатели $\lambda_k(H,\ b)$ — определением с тем же номером m настоящей статьи. Таким образом, эта теорема состоит из трех утверждений — номером утверждения является $m \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

Доказательство. Пусть даны $A \in S$, $x \in D$. Положим $b = (A,\ x)$, тогда $b \in B = S \times D$. В силу леммы 3 изоморфизм F_b^{-1} векторного пространства E^n на векторное пространство $p^{-1}(b)$ сохраняет показатели Ляпунова в том смысле, что для всякого $u \in E^n$ имеет место равенство $\lambda\,(A,\ x;\ u) = \lambda\,(H,\ F_b^{-1} u)$.

Отсюда следует, что для всякого $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ показатель $\lambda_k(A,\ x)$, введенный определением m [1] (где $m \in \{1,\ 2,\ 3\}$), равен показателю $\lambda_k(H,\ (A,\ x))$, введенному определением m настоящей статьи. Теорема доказана.

Теорема 2 [1]. Определения 1—3 [1] попарно эквивалентны.

Доказательство. Утверждение теоремы следует в силу теоремы 1 из доказанной попарной эквивалентности определений 1—3 настоящей статьи. Теорема доказана.

В определении 2 [1] введены подпространства $E_k(A,\ x)$ ($k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$) пространства E^n, а в определении 2 настоящей статьи — подпространства $E_k(H,\ b)$ слоев метризованного абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. Эти подпространства для гомоморфизма H, построенного в [2], связаны друг с другом следующим образом.

Теорема 3. Для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $A \in S$, $x \in D$ имеет место равенство

$$E_k(A,\ x) = F_{(A,\ x)}\, E_k(H,\ (A,\ x)).$$

Доказательство. Пусть даны $A \in S$, $x \in D$. В силу леммы 3 изоморфизм $F_{(A,\,x)}$ векторного пространства $p^{-1}((A,\, x))$ на векторное пространство E^n «сохраняет показатели Ляпунова», т. е.

$$\lambda\,(H,\ \xi) = \lambda\,(A,\ x;\ F_{(A,\,x)}\xi)$$

для всякого $\xi \in p^{-1}((A,\, x))$.

Отсюда следует, что $E_k(A,\, x)$, введенное в определении 2 [1], равно $F_{(A,\,x)}\, E_k(H,\ (A,\, x))$, где $E_k(H,\ b)$ введено в определении 2 настоящей статьи. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1986. № 1. С. 36—40.
2. *Миллионщиков В. М.* Линейные системы дифференциальных уравнений и автоморфизмы векторных расслоений. I // Там же. № 3.
3. *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения / Мат. заметки. 1985. Т. 38. № 1. С. 92—109.
4. *Миллионщиков В. М.* Нормальные базисы семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Там же. № 5. С. 691—708.

Резюме

Макалада сызыкты дифференциалдык тендеулер системаларыныц Ляпунов корсет-кiштерiнiн кейбiр аныктамаларынын эквивалентна дэлелденген.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила 28 октября 1985 г.