УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. XVI

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Пусть (E,p,B)— векторное расслоение со слоем R^n и базой B (B— полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot,\cdot)$). На (E,p,B) фиксируем некоторую риманову метрику.

1.2. Пусть G есть группа R или группа Z и пусть $\mathfrak{H}\in Hom(G,Aut(E,p,B))$, где через $Hom(G,Aut(E,p,B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы G в группу автоморфизмов векторного расслоения (E,p,B) обозначаемую через $Aut(E,p,B)$. Напомним, что образом $\mathfrak{H}t$ точки $t\in G$ при гомоморфизме $\mathfrak{H}$ является пара (X^t,χ^t), где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем

а) $pX^t=\chi^t p$ при всяком $t\in G$;

б) при всяких $b\in B$, $t\in G$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi^t b)$;

в) $X^{t+s}=X^tX^s$, $\chi^{t+s}=\chi^t\chi^s$, при всяких $t\in G$, $s\in G$.

Вместо X^1 будем писать X, вместо $\chi^1-\chi$.

Потребуем от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, чтобы для некоторой функции $a(\cdot):B\to R+$, удовлетворяющей при всяких $b\in B$, $t\in G$ равенству

$$a\left(\chi^t b\right)=a(b), \tag{В.1.1}$$

при всяких $b\in B$, $t\in G$ выполнялось неравенство

$$\left\|X^t[b]\right\|\leqslant\exp\left(|t|a(b)\right). \tag{В.1.2}$$

Так как

$$\left(X^t[b]\right)^{-1}=X^{-t}\left[\chi^t b\right](b\in B, t\in G),$$

то наложенное условие перейдет в эквивалентное, если вместо «при всяких $b\in B$, $t\in G$ выполнялось неравенство (В. 1.2)» написать: «при всяких[*)] $b\in B$, $t\in G_*^+$ выполнялось неравенство

$$\max\left\{\left\|X^t[b]\right\|,\left\|X^t[b]^{-1}\right\|\right\}\leqslant\exp\left(ta(b)\right)». \tag{В.1.2′}$$

1.3. Для всякого[**)] $\theta\in G_*$ определяется гомоморфизм $\mathfrak{H}_\theta\in Hom(Z,Aut(E,p,B))$ формулой

$$\mathfrak{H}_\theta s=\mathfrak{H}(s\theta)=\left(X^{s\theta},\chi^{s\theta}\right)(s\in Z). \tag{В.1.3}$$

Так как по условию при всяком $t\in G$ выполнено неравенство

---

*) $G_*^+=R_*^+$, если $G=R$; $G_*^+=N$, если $G=Z$; $R_*^+(N)$ — множество всех вещественных (целых) чисел > 0; G^+ — множество всех неотрицательных элементов G.

**) $G_*=G\setminus\{0\}$

$$\left\| X^{t}[b] \;\right\| \leqslant \exp\left(|t|\, a(b)\right),$$

то при всяком $s \in Z$ выполнено неравенство

$$\left\| X^{s\theta}[b] \;\right\| \leqslant \exp\left(|s| \cdot |\theta|\, a(b)\right),$$

т.е. гомоморфизм $\mathfrak{H}_{\theta}$ удовлетворяет условию п. 1.2 (см. фразу, содержащую формулы (В.1.1), (В.1.2)) с функцией $a_{\theta}(\cdot): B \to R^{+}$ (вместо $a(\cdot): B \to R^{+}$*),* определенной формулой

$$a_{\theta}(b) \underset{def}{=} |\theta|\, a(b) \;\; (b \in B).$$

1.4. Гомоморфизм***) $\mathfrak{H} \in Hom\left(G, Aut\left(E, p, B\right)\right)$ называется *насыщенным*****)*, если для всякой точки $b \in B$, такой, что $\chi^{\theta} b \neq b$ при всяком $\theta \in G_{*}$ для всякой окрестности $W(b)$ точки b (в пространстве B*),* для всякого базиса $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i\,)$ точек $\xi_i (i \in \{1, ..., n\})$ (в пространстве E*)*

найдется $\overline{\delta} \in R^{+}_{*}$ такое, что для всякого $t \in N$ и всяких невырожденных*****) линейных операторов

$$\begin{gathered} Y_m : p^{-1}\left(\chi^{m-1} b\right) \to p^{-1} \chi^{m} b \\ \left(m \in \{1, ..., t\}\right), \end{gathered} \tag{B.1.4}$$

удовлетворяющих при всяком $m \in \{1, ..., t\}$ неравенству

$$\left\| Y_m (X\left[\chi^{m-1} b\right])^{-1} - I \right\| + \left\| X\left[\chi^{m-1} b\right] Y_m^{-1} - I \right\| < \overline{\delta}, \tag{B.1.5}$$

найдутся точка

$$b^{'} \in W(b) \tag{B.1.6}$$

и изоморфизмы слоев (как евклидовых пространств)

$$\psi_k : p^{-1}(\chi^{k} b^{'}) \to p^{-1}(\chi^{k} b) \left(k \in \{0, ..., t\}\right), \tag{B.1.7}$$

такие, что

i) $\psi_0^{-1} \xi_1 \in U(\xi_i)$ при всяком $i \in \{1, ..., n\}$;

ii) при всяком $m \in \{1, ..., t\}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}\left(\chi^{m-1} b^{'}\right) & \xrightarrow[X\left[\chi^{m-1} b^{'}\right]]{} & p^{-1}\left(\chi^{m} b^{'}\right) \\ \downarrow \; \psi_{m-1} & & \downarrow \; \psi_m \\ p^{-1}\left(\chi^{m-1} b\right) & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}\left(\chi^{m} b\right) \end{array} \tag{B.1.8}$$

коммутативна.

***) Вместо «гомоморфизм $\mathfrak{H} \in Hom\left(G, Aut\left(E, p, B\right)\right)$» здесь пишем иногда «автоморфизм $\left(X, \chi\right): \left(E, p, B\right) \to \left(E, p, B\right)$ (удовлетворяющий условию, сформулированному в первой фразе п. 4. введения статьи [1])» или «семейство морфизмов

$$\left(X(m), \chi(m)\right): \left(E, p, B\right) \to \left(E, p, B\right) \left(m \in N\right),$$

удовлетворяющее требованиям а) — в) § 3 [2]».

****) Это есть определение насыщенного семейства морфизмов $\left(X(m), \chi(m)\right): \left(E, p, B\right) \to \left(E, p, B\right) \left(m \in N\right)$ (см. § 3 [2]), понимаемое с уточнением, сформулированным в п. 5 введения статьи [3].

*****) То есть имеющих нулевые ядра.

П о я с н е н и е о б о з н а ч е н и й. Через $\{1,...,s\}$ всюду в статье обозначается множество натуральных чисел, не превосходящих числа $s \in N$. Через $\{0,...,s\}$ всюду в статье обозначается множество целых неотрицательных чисел, не превосходящих целого неотрицательного числа s. Тождественное отображение произвольного множества M обозначается либо через $1_м$, либо через *1*.

2.1. Пусть $\left(V^n,\delta\right)$ — полное связное $n-$мерное риманово многообразие *(V^n — дифференцируемое многообразие класса C^3, $\delta(\cdot,\cdot)$ — риманова метрика класса C^2а V^n).* Через $\rho(\cdot,\cdot)$ обозначается расстояние в этом римановом многообразии. Через $\left(TV^n,\pi,V^n\right)$ обозначается касательное расслоение дифференцируемого многообразия V^n (π— проекция, TV^n — пространство этого расслоения).

2.2. Через S обозначаем множество всех диффеоморфизмов f класса C^1, биективно отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию

$$\max\left\{\|df\|,\left\|(df)^{-1}\right\|\right\}<+\infty; \tag{B.2.1}$$

здесь

$$\|df\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\sup\|df_x\|, \tag{B.2.2}$$

$$\left\|(df)^{-1}\right\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\left\|(df_x)^{-1}\right\|, \tag{B.2.3}$$

df_x — производная отображения f в точке x, $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой $\delta(\cdot,\cdot)$.

2.3. Для всякого $j \in S$ через S_j обозначаем подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов, удовлетворяющих неравенству $\sup_{x\in V^n}\rho(fx,jx)<+\infty.$.

При всяком $j \in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния $d_1(\cdot,\cdot)$, определяемого для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ формулой (в [4] формула (55))

$$d_1(f,g) \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{s(u)+\|\varphi_u dg_x-df_x\|+\left\|(\varphi_u dg_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\right\|\right\}. \tag{B.2.4}$$

Здесь 1) для всяких $y \in V^n$, $z \in V^n$ через $G(y,z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; при этом под кусочно-гладким путем, идущим в многообразии V^n из точки z в точку y понимается непрерывное, имеющее кусочно-непрерывную производную отображение u отрезка [0, 1] в многообразие V^n, причем значение u_0 этого отображения в точке 0 равно z, а его значение u_1 в точке 1 равно y (через u_t обозначаем значение отображения u в точке $t \in [0,1]$);

2) $s(u) \underset{def}{=} \int_0^1\left[\delta(\dot{u}_t,\dot{u}_t)\right]^{\frac{1}{2}}dt$ — длина пути u;

3) $\varphi_u:\pi^{-1}(z)\to\pi^{-1}(y)$ — параллельный перенос вдоль пути $u \in G(y,z)$.

2.4. Для всякого $j \in S$ множество наделяется S_j также другой структурой метрического пространства заданием расстояния $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, определяемого для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ формулой (в [4] формула (56)):

$$\tilde{d}_1(f,g) \underset{def}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx,gx)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u dg_x - df_x \right\| \right\}. \qquad (B.2.5)$$

При всяком $j \in S$ *расстояние* $d_1(\cdot,\cdot)$ *и расстояние* $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$ *индуцируют на* S_j *одну и ту же топологию* (см. [4], п. 5).

2.5. Через S^u обозначаем множество всех тех диффеоморфизмов $f \in S$, 1-струйные расширения которых равномерно непрерывны; напомним, что 1-струйным расширением дифференцируемого отображения $f: V^n \to V^n$ называется отображение $jet_1 f: V^n \to J_1 V^n$, определяемое формулой

$$jet_1 fx = \left(x, fx, df_x\right) \quad \left(x \in V^n\right), \qquad (B.2.6)$$

а расстояние в множестве $J_1 V^n$ 1-струй, т. е. в множестве всех троек вида *(x, y, L),* где[*)] $x \in V^n$, $y \in V^n$, $L \in Hom\left(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)\right)$, определяется формулой

$$\rho_1\left(\left(x_1, y_1, L_1\right), \left(x_2, y_2, L_2\right)\right) \underset{def}{=}$$
$$\underset{def}{=} \inf_{\substack{u \in G(x_2, x_1) \\ \upsilon \in G(y_2, y_1)}} \left\{ s(u) + s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon L_2 \varphi_u - L_1 \right\| \right\}. \qquad (B.2.7)$$

2.6. При всяком $j \in S^u$ через $S_j^{\,u}$ обозначаем множество всех тех диффеоморфизмов $f \in S_j$, 1-струйные расширения которых равномерно непрерывны; таким образом,

$$S_j^{\,u} \underset{def}{=} S_j \cap S^u \qquad (B.2.8)$$

при всяком $j \in S^u$.

При всяком $j \in S^u$ *множество* $S_j^{\,u}$ *замкнуто в метрическом пространстве* $(S_j\ ,d_1)$ *и метрическое пространство полно* $(S_j^{\,u}, d_1)$ (см. [5], предложения 5, 6).

2.7. При всяком $j \in S^u$ рассмотрим метрическое пространство $(B_j^{\,u} d_{B_j^u})$, где

$$B_j^u \underset{def}{=} S_j^u \times V^n, \qquad (B.2.9)$$

$$d_{B_j^u}\left(\left(f,x\right),\left(g,y\right)\right) \underset{def}{=} d_1\left(f,g\right) + \rho\left(x,y\right) \qquad (B.2.9')$$

для всяких $f \in S_j^{\,u}$, $g \in S_j^{\,u}$, $x \in V^n$, $y \in V^n$.

Хорошо известно (и легко доказывается), что из полноты метрических пространств $(S_j^{\,u}, d_1)$ и (V^n, ρ) следует полнота метрического пространства $B_j^u, d_{B_j^u}$.

При всяком $j \in S^u$ множество B_j^u наделяется также другой структурой метрического пространства заданием расстояния $\tilde{d}_{B_j^u}(\cdot,\cdot)$ формулой

$$\tilde{d}_{B_j^u}(\left(f,x\right),\left(g,y\right)) \underset{def}{=} \tilde{d}_1\left(f,g\right) + \rho\left(x,y\right) \qquad (B.2.10)$$

[*)] Через $Hom\left(V_1, V_2\right)$ обозначается множество всех линейных отображений векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2.

для всяких $f \in S_j^{\ u}$, $g \in S_j^{\ u}$, $x \in V^n$, $y \in V^n$. Так как при всяком $j \in S$ расстояния $d_1(\cdot,\cdot)$ и $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$ индуцируют на S_j одну и ту же топологию, то *при всяком* $j \in S^u$ *расстояния* $d_{B_j^u}(\cdot,\cdot)$ *и* $\tilde{d}_{B_j^u}(\cdot,\cdot)$ *индуцируют на* B_j^u *одну и ту же топологию.*

2.8. При всяком $j \in S^u$ положим $E_j^u \underset{def}{=} S_j^u \times TV^n$ (произведение топологических пространств). Отображение $p_j^u \underset{def}{=} 1_{S_j^u} \times \pi : E_j^u \to B_j^u$ непрерывно (это вытекает из определения топологии на E_j^u, определения расстояния $d_{B_j^u}(\cdot,\cdot)$ и непрерывности отображения $\pi : TV^n \to V^n$).

2.9. При всяком $j \in S^u$ так определенное расслоение естественным образом наделяется структурой *векторного расслоения со слоем* R^n, а именно векторное расслоение (E_j^u, p_j^u, B_j^u) определяется как векторное расслоение, индуцированное отображением $pr_2 : S_j^u \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и векторным расслоением (TV^n, π, V^n) (библиографические указания см. в [6, п. 66) § 1]).

2.10. При всяком $j \in S^u$ на так определенном векторном расслоении E_j^u, p_j^u, B_j^u задается риманова метрика $\Delta_j^u(\cdot,\cdot)$ положим для всяких $\xi \in E_j^u, \eta \in E_j^u$, таких, что, $p_j^u \xi = p_j^u \eta$ по определению

$$\Delta_j^u(\xi,\eta) \underset{def}{=} \delta\left(pr_2\xi, pr_2\eta\right), \tag{B.2.11}$$

Где pr_2 — проекция произведения $E_j^u = S_j^u \times TV^n$ на второй сомножитель.

2.11. При всяком $j \in S^u$ при всяком $t \in Z$ положим

$$\mathfrak{H}_j^{(u)} t \underset{def}{=} \left(\left(X_j^{(u)}\right)^t, \left(\chi_j^{(u)t}\right)\right), \tag{B.2.12}$$

где отображения $X_j^{(u)} : E_j^u \to E_j^u$, $\chi_j^{(u)} : B_j^u \to B_j^u$ определены формулами

$$X_j^{(u)}\left(f, \mathfrak{x}\right) \underset{def}{=} \left(f, df\mathfrak{x}\right), \tag{B.2.13}$$

$$\chi_1^{(u)}\left(f, x\right) \underset{def}{=} \left(f, fx\right), \tag{B.2.14}$$

При всяком $j \in S^u$ *формулы (B.2.12) — (B.2.14) определяют гомоморфизм* $\mathfrak{H}_j^{(u)} \in Hom\left(Z, Aut\left(E_j^u, p_j^u, B_j^u\right)\right)$ (это доказано в п. 6 г) § 1 [6]), *который удовлетворяет условиям п. 1.2 введения с функцией* $a(\cdot) : B_j^u \to R^+$, *определенной формулой*

$$a(\left(f, x\right) \underset{def}{=} \ln \sup_{y \in V^n} \max\left\{\left\|df_y\right\|, \left\|\left(df_y\right)^{-1}\right\|\right\} \tag{B.2.15}$$

(последнее доказано в п. 6 д) § 1 [6]).

§ 1

Лемма. *Для всякого* $j \in S^u$ *гомоморфизм* $\mathfrak{H}_j^{(u)} \in Hom\left(Z, Aut\left(E_j^u, p_j^u, B_j^u\right)\right)$, *определенный формулами (B.2.12) — (B.2.14), является насыщенным*[*)].

Доказательство. Пусть дано $j \in S^u$.

[*)] Определение насыщенного гомоморфизма см. в п. 1.4 введения.

1. Пусть дана точка $b \in B_j^u$, такая, что при всяком[**)] $m \in N$ имеет место неравенство $\chi^m b \neq b$; так как $B_j^u \underset{(B.2.8)}{=} S_j^u \times V^n$, то

$$b = (f, x), \tag{1}$$

где[*)] $f \in S_j^u$, $x \in V^n$. Из определения отображения $\chi_j^{(u)}$ (см. формулу (B.2.14)) следует, что для всякого $k \in Z^+$

$$\left(\chi_j^{(u)}\right)^k (f, k) = \left(f, f^k x\right). \tag{2}$$

Из того, что при всяком $m \in N$ выполнено неравенство $\chi^m b \neq b$, вытекает в силу формулы (2), что при всяком $m \in N$ выполнено неравенство $f^m x \neq x$. Отсюда следует, что точки $x, fx, ..., f^m x, ...,$ *все различны* (в самом деле, из равенства $f^{m1} x = f^{m2} x$ (где $m_1 \geqslant m_2$ — некоторые натуральные числа) вытекает равенство $\left(f^{-1}\right)^{m_2} f^{m1} x = \left(f^{-1}\right)^{m_2} f^{m2} x$, т. е. $f^{m1-m_2} x = x$; так как при $m_1 - m_2 \in N$ этого быть не может, а $m_1 - m_2 \in Z^+$, то $m_1 = m_2$).

2. Пусть дана окрестность $W(b)$ точки b в пространстве B_j^u. Возьмем $\bar{\varepsilon} \in R_*^+$ такое, что

$$W_{\bar{\varepsilon}}(b) \underset{def}{=} \left\{ \bar{b} \in B_j^u : \tilde{d}_{B_j^u}\left(\bar{b}, b\right) < \bar{\varepsilon} \right\} \subset W(b).$$

Пусть дан базис $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ векторного пространства $\left(p_j^u\right)^{-1}(b)$ и даны окрестности $U(\xi_i)$ точек (в $\xi_i (i \in \{1, ..., n\})$ пространстве E_j^u). В силу определения векторного расслоения $\left(E_j^u, p_j^u, B_j^u\right)$ имеем

$$\left(p_j^u\right)^{-1}(b) = \left(f, \pi^{-1}(x)\right), \tag{3}$$

$$\xi_i\left(f, \mathfrak{x}_i\right)\left(i \in \{1, ..., n\}\right), \tag{4}$$

причем векторы $\mathfrak{x}_i \in \pi^{-1}(x)\left(i \in \{1, ..., n\}\right)$ образуют базис векторного пространства $\pi^{-1}(x)$.

Возьмем $\varepsilon_1 \in R_*^+$ такое, что для всякого $g \in S_j^u$, удовлетворяющего неравенству $\tilde{d}_1(f, g) < \varepsilon_1$, для всякого $i \in \{1, ..., n\}$ имеет место включение $\left(g, \mathfrak{x}_i\right) \in U\left(\xi_i\right) \underset{4}{=} U\left(\left(f, \mathfrak{x}_i\right)\right)$; такое существует, ε_1 так как $E_j^u = S_j^u \times TV^n$ (произведение топологических пространств), а топология на S_j^u индуцируется расстоянием $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$.

Положим

$$\bar{\delta} \underset{def}{=} \min\left\{ \left(321 \left\| df \right\| \cdot \left\| (df)^{-1} \right\| \right)^{-1}, \left(80 \left\| df \right\|\right)^{-1} \min\left\{\varepsilon, \varepsilon_1\right\} \right\}. \tag{5}$$

Так как $f \in S_j^u \underset{(B.2.8)}{\subset} S^u \subset S$, то выполнено неравенство (B.2.1), следовательно, $\bar{\delta} \underset{5}{\in} R_*^+$.

3. Пусть дано $\bar{t} \in N$ и даны невырожденные линейные операторы

$$Y_m : \left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b\right) \to \left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m} b\right) \quad \left(m \in \{1, ..., \bar{t}\}\right), \tag{6}$$

**) Через N всюду в этом цикле статей обозначается множество всех натуральных чисел: $N = \{1, 2, ...\}; Z^+ = \{0\} \cup N$;.

*) Подчеркнем, что, начиная с этого места до конца доказательства леммы, $b = (f, x)$ — данная фиксированная точка пространства B_j^u (следовательно, $f \in S_j^u$ и $x \in V^n$ фиксированы).

Удовлетворяющие при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ неравенству (В. 1.5) с $X_j^{(u)}$ вместо X и $\chi_j^{(u)}$ вместо χ.

При всяком $t \in Z^+$ имеем

$$\left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^t b\right) \underset{(1)}{=} \left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^t\right)(f,x) \underset{(2)}{=} \left(p_j^u\right)^{-1}\left(f, f^t x\right) = \left(f, \pi^{-1}\left(f^t x\right)\right) \quad (7)$$

Подставив в (7) $t = m-1,\ t = m,$ перепишем при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ формулу (6) в виде

$$Y_m : \left(f, \pi^{-1}\left(f^{m-1}x\right)\right) \to \left(f, \pi^{-1}\left(f^m x\right)\right) \quad \left(m \in \{1,...,\bar{t}\}\right). \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что определены отображения

$$Z_m : \pi^{-1}\left(f^{m-1}x\right) \to \pi^{-1}\left(f^m x\right) \quad \left(m \in \{1,...,\bar{t}\}\right), \quad (9)$$

такие, что

$$Y_m\left(f, \mathfrak{x}\right) = \left(f, Z_m \mathfrak{x}\right) \quad (10)$$

при всяких $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}\left(f^{m-1}x\right), m \in \{1,...,\bar{t}\}$, т. е.

$$Y_m 1_{\{f\}} \times Z_m \qquad \left(m \in \{1,...,\bar{t}\}\right). \quad (11)$$

В силу определения векторного расслоения $\left(E_j^u, p_j^u, B_j^u\right)$ (см. пп. 2.8, 2.9 введения) из линейности отображения (6) (или, что то же, (8)) следует, что отображения (9) линейны.

В силу формулы (В.2.13) имеем

$$X_j^{(u)}\left(f, \mathfrak{x}\right) = \left(f, df\,\mathfrak{x}\right) \quad (12)$$

для всяких $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}\left(f^{m-1}x\right)$, $m \in N$. Используя формулу (7) при $t = m-1,$, получаем из формулы (12)

$$X_j^{(u)}\left[\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b\right] = 1_{\{f\}} \times df_{fm-1x} \quad (m \in N) \quad (13)$$

При всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ имеем

$$Y_m\left(X_j^{(u)}\left[\left(\chi_j^u\right)^{m-1} b\right]\right)^{-1} \underset{(13)}{\overset{(11)}{=}} 1_{\{f\}} \times Z_m\left(df_{fm-1x}\right)^{-1}, \quad (14)$$

$$X_j^{(u)}\left[\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b\right] Y^{-1}{}_m \underset{(13)}{\overset{(11)}{=}} 1_{\{f\}} \times df_{fm-1x} Z_m^{\ -1}. \quad (15)$$

Согласно построению римановой метрики векторного расслоения $\left(E_j^u, p_j^u, B_j^u\right)$ (см. формулу (В.2.11)), из формулы (14) следует равенство

$$\left\| Y_m\left(X_j^{(u)}\left[\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b\right]\right)^{-1} - I \right\| = \left\| Z_m\left(df_{fm-1x}\right)^{-1} - I \right\| \left(m \in \{1,...\bar{t}\}\right), \quad (16)$$

а из формулы (15) следует равенство

$$\left\| X_j^{(u)}\left[\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b\right] Y_m^{-1} - I \right\| = \left\| \left(df_{fm-1x}\right) Z_m^{-1} - I \right\|$$
$$\left(m \in \{1,...\bar{t}\}\right). \quad (17)$$

В силу формул (16), (17) неравенство (В. 1.5) с $X_j^{(u)}$, $\chi_j^{(u)}$ вместо X, χ переписывается в виде

$$\left\| Z_m\left(df_{fm-1x}\right)^{-1} - I \right\| + \left\| \left(df_{fm-1x}\right) Z_m^{-1} - I \right\| < \bar{\delta} \quad (18)$$

4. Все условия § 1 [8] у нас выполнены: фиксированы $j \in S^u$, $f \in S^u$, $\bar{\delta} \in R_*^+$, удовлетворяющие равенству (5) (из которого следует неравенство (1) [8]), точка $x \in V^n$, такая, что точки $x, fx, ..., f^m x, ...$ все различны, $\bar{t} \in N$ и невырожденные линейные отображения (9), удовлетворяющие неравенству (18). Поэтому в силу леммы 6 [8] существует $\omega \in \left(0, \bar{s}\right)$ такое, что формула (52) [7] при $r = \omega$ определяет отображение $g_\omega \in S_j^u$, удовлетворяющее неравенству

$$\tilde{d}_1\left(f, g_\omega\right) < 80\bar{\delta}\left\|df\right\| \underset{(5)}{\leqslant} \min\left\{\bar{\varepsilon}, \varepsilon_1\right\}.$$

Из этого неравенства, положив

$$b' \underset{def}{=} \left(g_\omega, x\right) \tag{19}$$

(тогда $b' \in S_j^u \times V^n \underset{(B.2.9)}{=} B_j^u$), получаем

$$\tilde{d}_{B_j^u}\left(b, b'\right) \overset{(1)}{\underset{(19)}{=}} \tilde{d}_{B_j^u}\left(\left(f, x\right), \left(g_\omega, x\right)\right) \underset{(B.2.10)}{=}$$
$$\underset{(B.2.10)}{=} \tilde{d}_1\left(f, g_\omega\right) < \min\left\{\bar{\varepsilon}, \varepsilon\right\}; \tag{20}$$

следовательно,

$$b' \in W_{\bar{\varepsilon}}(b) \subset W(b) \tag{21}$$

(см. п. 2).

В силу определения отображения $\chi_j^{(u)} : B_j^u \to B_j^u$ (см. формулу (B.2.14)) имеем

$$\left(\chi_j^{(u)}\right)^k b' \underset{(19)}{=} \left(\chi_j^{(u)}\right)^k \left(g_\omega, x\right) = \left(g_\omega, g_\omega^k x\right) \tag{22}$$

для всякого $k \in Z^+$. В силу леммы 2 [9] для всякого $k \in \left\{0, ..., \bar{t}\right\}$ имеет место равенство

$$g_\omega^k x = f^k x. \tag{23}$$

Для всякого $k \in \left\{0, ..., \bar{t}\right\}$ имеем

$$\left(\chi_j^{(u)}\right)^k b' \underset{(22)}{=} \left(g_\omega, g_\omega^k x\right) \underset{(23)}{=} \left(g_\omega, f^k x\right), \tag{24}$$

$$\left(\chi_j^{(u)}\right)^k b \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \left(f, f^k x\right). \tag{25}$$

Так как $p_j^u = 1_{S_j^u} \times \pi$, то при всяком $k \in \left\{0, ..., \bar{t}\right\}$ имеют место равенства

$$\left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^k b'\right) \overset{24}{=} \left(g_\omega, \pi^{-1}\left(f^k \lambda\right)\right), \tag{26}$$

$$\left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^k b\right) \underset{25}{=} \left(f, \pi^{-1}\left(f^k x\right)\right). \tag{27}$$

При всяких $k \in \left\{0, ..., \bar{t}\right\}$, $\mathfrak{y} \in \pi^{-1}\left(f^k x\right)$ положим

$$\psi_k\left(g_\omega, \mathfrak{y}\right) \underset{(def)}{=} \left(f, \mathfrak{y}\right); \tag{28}$$

так как при всяком $k \in \left\{0, ..., \bar{t}\right\}$ имеют место равенства (26), (27), то формула (28) определяет при всяком $k \in \left\{0, ..., \bar{t}\right\}$ отображение

$$\psi_k : \left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^k b'\right) \to \left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^k b\right). \tag{29}$$

Из формул (26) — (28) следует в силу определения векторного расслоения $\left(E_j^u, p_j^u, B_j^u\right)$ и римановой метрики Δ_j^u на нем, приведенного в пп. 2.9, 2.10 введения, что *при всяком* $k \in \left\{0,...,\bar{t}\right\}$ *отображение (29), определенное формулой (28), является изоморфизмом слоя* $\left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^k b'\right)$ *(как евклидова пространства) на слой* $\left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^k b\right)$ *(как евклидово пространство).*

При всяком $i \in \{1,...,n\}$ имеем

$$\psi_0^{-1}\xi_i \underset{(4)}{=} \psi_0^{-1}\left(f, \mathfrak{x}_i\right) \underset{(28)}{=} \left(g_\omega, \mathfrak{x}_i\right). \tag{30}$$

Так как $\tilde{d}_1\left(f, g_\omega\right) \underset{(20)}{<} \varepsilon_1$, то в силу определения числа ε_1 (см. п. 2) при всяком $i \in \{1,...,n\}$ имеет место включение

$$\left(g_\omega, x_i\right) \in U\left(\xi_i\right). \tag{31}$$

При всяком $i \in \{1,...,n\}$ *имеет место включение*

$$\psi_0^{-1}\xi_i \overset{(30)}{\underset{(31)}{\in}} U\left(\xi_i\right). \tag{32}$$

В силу определения отображения $X_j^{(u)} : E_j^u \to E_j^u$ (см. формулу (В.2.13)) при всяком $m \in \left\{1,...,\bar{t}\right\}$ для сужения на $X_j^{(u)}\left[\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b'\right]$ слой $\left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b'\right) \underset{26}{=} \left(g_\omega, \pi^{-1}\left(f^{m-1}x\right)\right)$ отображения $X_j^{(u)}$ имеет место формула

$$X_j^{(u)}\left[\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b'\right]\left(g_\omega, \mathfrak{x}\right) = X_j^{(u)}\left(g_\omega, \mathfrak{x}\right) = \left(g_\omega, dg_\omega \mathfrak{x}\right) \tag{33}$$

для всякого $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}\left(f^{m-1}x\right)$. В силу леммы 2 [9] и формулы (9) при всяких $m \in \left\{1,...,\bar{t}\right\}$, $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}\left(f^{m-1}x\right)$ имеем

$$dg_\omega \mathfrak{x} = Z_m \mathfrak{x} \in \pi^{-1}\left(f^m x\right), \tag{34}$$

$$\psi_m X_j^{(u)}\left[\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b'\right]\left(g_\omega, \mathfrak{x}\right) \underset{(33)}{=} \psi_m\left(g_\omega, dg_\omega \mathfrak{x}\right) \underset{(34)}{=} \left(f, dg_\omega \mathfrak{x}\right). \tag{35}$$

При всяких $m \in \left\{1,...,\bar{t}\right\}$, $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}\left(f^{m-1}x\right)$ имеем

$$Y_m \psi_{m-1}\left(g_\omega, \mathfrak{x}\right) \underset{(28)}{=} Y_m\left(f, \mathfrak{x}\right) \underset{(10)}{=} \left(f, Z_m \mathfrak{x}\right) \underset{(34)}{=} \left(f, dg_\omega \mathfrak{x}\right). \tag{36}$$

Так как при всяком $k \in \left\{0,...,\bar{t}\right\}$ имеет место равенство (26), то из того, что при всяких $m \in \left\{1,...,\bar{t}\right\}$, $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}\left(f^{m-1}x\right)$ имеют место равенства (35), (36), следует, что *при всяком* $m \in \left\{1,...,\bar{t}\right\}$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b'\right) & \xrightarrow[X_j^{(u)}\left[\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b'\right]]{} & \left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m} b'\right) \\ \downarrow \psi_{m-1} & & \downarrow \psi_m \\ \left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m-1} b\right) & \xrightarrow[Y_m]{} & \left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(\chi_j^{(u)}\right)^{m} b\right) \end{array} \tag{37}$$

коммутативна.

Подведем итог. *Указана точка* $b' \in W(b)$ (см. формулы (19), (21)). *Для всякого* $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ *построен изоморфизм слоев* (как евклидовых пространств) *(29), причем выполнены следующие требования:*

i) $\psi_0^{-1}\xi_i \in U(\xi_i)$ *при всяком* (см. $i \in \{1,...,n\}$ фразу, содержащую формулу (32));

ii) при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ *диаграмма (37) коммутативна.*

Лемма доказана.

§ 2

Теорема[*)]. *Для всякого* $j \in S^u$ *в пространстве* $S_j^u \times V^n$ *имеется всюду плотное множество* $\mathfrak{D}_j^u$ *типа* G_δ, *обладающее свойствами:*

а) при всяких $(f,x) \in \mathfrak{D}_j^u$, $k \in \{1,...,n\}$ *функция* $\Omega_k(\cdot): S_j^u \times V^n \to R$ *полунепрерывна сверху в точке* (f,x);

б) при всяких $(f,x) \in \mathfrak{D}_j^u$, $k \in \{1,...,n\}$ *имеет место равенство* $\lambda_k((f,x)) = \Omega_k((f,x)) = \Omega^{(k)}((f,x))$;

в) при всяких $(f,x) \in \mathfrak{D}_j^u$, $k \in \{0,...,n-1\}$ *имеет место альтернатива: либо*

$$\lambda_{n-k}((f,x)) = \lambda_{n-k+1}((f,x)),$$

либо подпространство

$$E_k(f,x) \underset{def}{=} \{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda(f,\mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{n-k+1}((f,x))\}$$

экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения в пространстве $\pi^{-1}(x)$, *т. е. для всякого алгебраического дополнения* l^{n-k} *подпространства* $E_k(f,x)$ *(в векторном пространстве* $\pi^{-1}(x)$,*) существуют числа* $\alpha \in R_*^+$, $\beta \in R_*^+$, *такие, что для всяких* $\mathfrak{x} \in l^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in E_k(f,x)$ *и всяких целых чисел* $t \geqslant s \geqslant 0$ *выполнено неравенство*

$$|df^t\mathfrak{x}| \cdot |df^s\mathfrak{y}| \geqslant \alpha |df^t\mathfrak{x}| \cdot |df^t\mathfrak{y}| \exp(\beta(t-s)).$$

Доказательство. Пусть дано $j \in S^u$.

А. В силу теоремы [10] и леммы 2 [6] в пространстве $B_j^u \underset{(B.2.9)}{=} S_j^u \times V^n$ найдется всюду плотное множество $\mathfrak{D}_j^{(u,1)}$ типа G_δ, такое, что при всяких $(f,x) \in \mathfrak{D}_j^{(u,1)}$, $k \in \{0,...,n\}$ функция $\Omega_k(\cdot): S_j^u \times V^n \to R$ полунепрерывна сверху в точке (f,x).

Б. В силу леммы § 1 гомоморфизм $\mathfrak{H}_j^{(u)} \in Hom(Z, Aut(E_j^u, p_j^u, B_j^u))$, определенный формулами (В.2.12) — (В.2.14), является *насыщенным.* Поэтому в силу теоремы [11] в пространстве $B_j^u = S_j^u \times V^n$ найдется всюду плотное множество $\mathfrak{D}_j^{(u,2)}$ типа G_δ, обладающее свойствами:

а) при всяких $(f,x) \in \mathfrak{D}_j^{(u,2)}$, $k \in \{1,...,n\}$ имеет место цепочка равенств

$$\lambda_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)) = \Omega_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)) = \Omega^k(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)),$$

которая в силу лемм 1 — 3 [6] эквивалентна цепочке равенств

$$\lambda_k((f,x)) = \Omega_k((f,x)) = \Omega^k((f,x)); \tag{2.1}$$

б) при всяких $(f,x) \in \mathfrak{D}_j^{(u,2)}$, $k \in \{0,...,n-1\}$ имеет место альтернатива: либо выполнено равенство

[*)] Обозначения см. в [6, § 1, пп. 1 — 3].

$$\lambda_{n-k}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)\right)=\lambda_{n-k+1}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)\right),$$

которое в силу леммы 1 [6] эквивалентно равенству

$$\lambda_{n-k}((f,x))=\lambda_{n-k+1}((f,x)), \tag{2.2}$$

либо *гомоморфизм* $\mathfrak{H}_j^{(u)}$ *экспоненциально разделен с индексом* k *в точке* (f,x), т. е. выполнена следующая совокупность условий:

i) имеет место строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)\right)>\lambda_{n-k+1}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)\right),$$

которое в силу леммы 1 [6] эквивалентно строгому неравенству

$$\lambda_{n-k}\left((f,x)\right)>\lambda_{n-k+1}\left((f,x)\right); \tag{2.3}$$

ii) для всякого алгебраического дополнения

$$R^{n-k}=\left(p_j^u\right)^{-1}\left((f,x)\right)\theta R_0^k\left(\mathfrak{H}_i^{(u)},(f,x)\right) \tag{2.4}$$

векторного подпространства $R_0^k\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)\right)$ слоя $\left(p_j^u\right)^{-1}((f,x))$ существуют числа $\alpha\in R_*^+$, $\beta\in R_*^+$ такие, что для всяких ненулевых векторов, $\xi\in R^{n-k}$, $\eta\in R_0^k\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)\right)$ для всяких $t\in Z^+$, $s\in Z^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$\left|\left(X_j^{(u)}\right)^t\xi\right|\cdot\left|\left(X_j^{(u)}\right)^s\xi\right|^{-1}\geqslant\alpha\left|\left(X_j^{(u)}\right)^t\eta\right|\cdot\left|\left(X_j^{(u)}\right)^s\eta\right|^{-1}\exp\left(\beta\left(t-s\right)\right). \tag{2.5}$$

Напомним, что если выполнено строгое неравенство $\lambda_{n-k}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},b\right)>\lambda_{n-k+1}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},b\right)$, то через $R_0^k\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},b\right)$ обозначается векторное пространство

$$E_k\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},b\right)\underset{def}{=}\left\{\xi\in\left(p_j^u\right)^{-1}(b):\lambda\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},\xi\right)\leqslant\lambda_{n-k+1}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},b\right)\right\}, \tag{2.6}$$

где

$$\lambda\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},\xi\right)\underset{def}{=}\begin{cases}\overline{\lim\limits_{\substack{t\to+\infty\\ t\in N}}}\dfrac{1}{t}\ln\left|\left(X_j^{(u)}\right)^t\xi\right| npu\left|\xi\right|\neq 0,\\ -\infty npu\left|\xi\right|=0\end{cases} \tag{2.7}$$

(напомним, что $|\eta|=\left(\Delta_j^u(\eta,\eta)\right)^{\frac{1}{2}}$ для всякого $\eta\in E$).

Так как отображение $pr_{2,(f,x)}$ (сужение на слой $\left(p_j^u\right)^{-1}\left((f,x)\right)$проекции pr_2 произведения $S_j^u\times V^n$ на второй сомножитель) при всяком $(f,x)\in B$ есть изоморфизм векторного пространства $\left(p_j^u\right)^{-1}((f,x))$ на векторное пространство $\pi^{-1}(x)$, то формула (2.4) эквивалентна формуле

$$pr_{2,(f,x)}R^{n-k}=\pi^{-1}(x)\theta\, pr_{2,(f,x)}R_0^k\left(\hbar_j^{(u)},(f,x)\right). \tag{2.8}$$

При всяких $f\in S_j^u$, $x\in V^n, k\in\{1,...,n\}$, для которых выполнена (2.3), имеем

$$\begin{gathered}R_0^k\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)\right)\underset{(2.3)}{=}E_k\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)\right)\underset{2.6}{=}\\ \underset{(2.6)}{=}\left\{\xi\in\left(p_j^u\right)^{-1}\left((f,x)\right):\lambda\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},\xi\right)\leqslant\lambda_{n-k+1}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},(f,x)\right)\right\}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

При всяких $f\in S_j^u$, $x\in V^n$, $k\in\{1,...,n\}$ в силу леммы 1 [6] имеет место равенство

$$\lambda_{n-k+1}\left(\hbar_j^{(u)},(f,x)=\lambda_{n-k+1}((f,x))\right). \tag{2.10}$$

В силу формул (B.2.11), (B.2.13), (2.7) при всяком $\xi\in E_j^u$ имеет место равенство

$$\lambda\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},\xi\right)=\lambda\left(f,pr_2\xi\right), \tag{2.11}$$

где $\lambda\left(f,\mathfrak{x}\right)$ при всяких $f\in S_j^u$, $\mathfrak{x}\in TV^n$ определено формулой

$$\lambda\left(f,\mathfrak{x}\right)\underset{def}{=}\begin{cases}\overline{\lim\limits_{\substack{t\to+\infty\\ t\in N}}}\dfrac{1}{t}\ln\left|df^t\mathfrak{x}\right| npu \left|\mathfrak{x}\right|\neq 0,\\ -\infty npu\left|\mathfrak{x}\right|=0\end{cases} \tag{2.12}$$

(напомним, что $\left|\mathfrak{y}\right|\underset{def}{=}\left(\delta\left(\mathfrak{y},\mathfrak{y}\right)\right)^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{y}\in TV^n$).

В силу равенств (2.10), (2.11) при всяких $f\in S_j^u$, $x\in V^n$ имеем

$$\begin{gathered}\left\{\xi\in\left(p_j^u\right)^{-1}\left(\left(f,x\right)\right):\lambda\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},\xi\right)\leqslant\lambda_{n-k-1}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},\left(f,x\right)\right)\right\}=\\ =\left(pr_{2,(f,x)}\right)^{-1}\left\{\mathfrak{x}\in\pi^{-1}\left(x\right):\lambda\left(f,\mathfrak{x}\right)\leqslant\lambda_{n-k+1}\left(\left(f,x\right)\right)\right\}.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Из формул (2.9), (2.13) следует, что при всяких $f\in S_j^u$, $x\in V^n$, $k\in\{1,...,n-1\}$, для которых выполнено строгое неравенство (2.3), имеем

$$pr_{2,(f,x)}R_0^{\ k}\left(\mathfrak{H}_j^{(u)},\left(f,x\right)\right)=\left\{\mathfrak{x}\in\pi^{-1}\left(x\right)\leqslant\lambda_{n-k+1}\left(\left(f,x\right)\right)\right\}. \tag{2.14}$$

В силу равенства (2.14) формула (2.8) переписывается в виде

$$pr_{2,(f,x)}R^{n-k}=\pi^{-1}\left(x\right)\theta\left\{\mathfrak{x}\in\pi^{-1}\left(x\right):\lambda\left(f,\mathfrak{x}\right)\leqslant\lambda_{n-k+1}\left(\left(f,x\right)\right)\right\}.$$

Поэтому условие *ii)* можно переписать в виде: для всякого алгебраического дополнения $l^{n-k}=\pi^{-1}\left(x\right)\theta E_k\left(f,k\right)$ векторного подпространства $E_k\left(f,x\right)\underset{def}{=}\left\{\mathfrak{x}\in\pi^{-1}\left(x\right):\lambda\left(f,\mathfrak{x}\right)\leqslant\lambda_{n-+1}\left(\left(f,x\right)\right)\right\}$ (в векторном пространстве $\pi^{-1}(x)$) существуют числа $\alpha\in R_*^+$, $\beta\in R_*^+$, такие, что для всяких ненулевых векторов $\mathfrak{x}\in l^{n-k}$, $\mathfrak{y}\in E_k\left(f,x\right)$ для всяких, таких, $t\in Z^+$ что $s\in Z^+$, $t\geqslant s$ имеет место неравенство

$$\left|\left(X_j^{(u)}\right)^i\left(f,\mathfrak{x}\right)\right|\cdot\left|\left(X_j^{(u)}\right)^s\left(f,\mathfrak{x}\right)\right|^{-1}\geqslant\alpha\left|\left(X_j^{(u)}\right)^t\left(f,\mathfrak{y}\right)\right|\cdot\left|\left(X_j^{(u)}\right)^s\left(f,\mathfrak{y}\right)\right|^{-1}\exp\left(\beta\left(t-s\right)\right)$$

(напомним, что $\left|\xi\right|\underset{def}{=}\left(\Delta_j^u\left(\xi,\xi\right)\right)^{1/2}$ для всякого $\xi\in E_j^u$), которое с помощью формул (B.2.11), (B.2.13) переписывается в виде

$$\left|df^t\mathfrak{x}\right|\cdot\left|df^s\mathfrak{x}\right|^{-1}\geqslant\alpha\left|df^t\mathfrak{y}\right|\cdot\left|df^s\mathfrak{y}\right|^{-1}\exp\left(\beta\left(t-s\right)\right)$$

(напомним, что $\left|\mathfrak{z}\right|\underset{def}{=}\left(\delta\left(\mathfrak{z},\mathfrak{z}\right)\right)^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{z}\in TV^n$). Последнее неравенство при $\left|\mathfrak{x}\right|\neq 0$, $\left|\mathfrak{y}\right|\neq 0$ эквивалентно неравенству

$$\left|df^t\mathfrak{x}\right|\cdot\left|df^s\mathfrak{y}\right|\geqslant\alpha\left|df^s\mathfrak{x}\right|\cdot\left|df^t\mathfrak{y}\right|\exp\left(\beta\left(t-s\right)\right). \tag{2.15}$$

Если $\left|\mathfrak{x}\right|=0$ или $\left|\mathfrak{y}\right|=0$, то левая и правая части нестрогого неравенства (2.15) равны нулю, следовательно, неравенство (2.15) верно и в том случае, когда выполнено хоть одно из равенств $\left|\mathfrak{x}\right|=0$, $\left|\mathfrak{y}\right|=0$.

Поэтому из условия *u)* следует: *для всякого алгебраического дополнения* l^{n-k} *векторного подпространства* $E_k\left(f,x\right)\underset{def}{=}\left\{\mathfrak{x}\in\left(\pi\right)^{-1}\left(x\right):\lambda\left(f,\mathfrak{x}\right)\leqslant\lambda_{n-k+1}\left(f,\mathfrak{x}\right)\right\}$ *(в векторном пространстве* $\pi^{-1}(x)$*) существуют числа* $\alpha\in R_*^+$, $\beta\in R_*^+$, *такие, что для всяких* $\mathfrak{x}\in l^{n-k}$, $\mathfrak{y}\in E_k\left(f,x\right)$ *для всяких целых чисел* $t\geqslant s\geqslant 0$ *выполнено неравенство (2.15).*

В. Положим $\mathfrak{D}_j^u = \mathfrak{D}_j^{(u,1)} \bigcap \mathfrak{D}_j^{(u,2)}$ (множество $\mathfrak{D}_j^{(u,1)}$ введено в подпункте А, множество $\mathfrak{D}_j^{(u,2)}$ — в начале подпункта Б). Так как и $\mathfrak{D}_j^{(u,1)}$ $\mathfrak{D}_j^{(u,2)}$ — всюду плотные множества типа G^δ в полном (см. п. 2.7 введения) метрическом пространстве $B_j^u, d_{B_j^u}$, то в силу теоремы Бэра множество $\mathfrak{D}_j^u = \mathfrak{D}_j^{(u,1)} \bigcap \mathfrak{D}_j^{(u,2)}$ есть всюду плотнее множество типа G^δ в метрическом пространстве $B_j^u, d_{B_j^u}$, а следовательно (см. п. 2.7 введения), и в метрическом пространстве $(B_j^u, \tilde{d}_{B_j^u})$.

Имеем: а) при всяких $(f,x) \in \mathfrak{D}_j^u = \mathfrak{D}_j^{(u,1)} \bigcap \mathfrak{D}_j^{(u,2)}$, $k \in \{1,\dots,n\}$ функция $\Omega_k(\cdot): S_j^u \times V^n \to R$ полунепрерывна сверху в точке (f,x) (доказано в подпункте А);

б) при всяких $(f,x) \in \mathfrak{D}_j^u = \mathfrak{D}_j^{(u,1)} \bigcap \mathfrak{D}_j^{(u,2)}$, $k \in \{1,\dots,n\}$ имеет место равенство $\lambda_k((f,x)) = \Omega_k((f,x)) = \Omega^{(k)}(f,x)$ (см. равенство (2.1));

в) при всяких $(f,x) \in \mathfrak{D}_j^u = \mathfrak{D}_j^{(u,1)} \bigcap \mathfrak{D}_j^{(u,2)}$, $k \in \{1,\dots,n-1\}$ имеет место альтернатива: либо выполнено равенство

$$\lambda_{n-k}((f,x)) = \lambda_{n-k+1}((f,x))$$

(см. равенство (2.2)), либо (см. последнюю фразу подпункта Б) подпространство

$$E_k\left((f,x)\right) \underset{def}{=} \left\{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x) : \lambda(f,\mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{n-k+1}\left((f,x)\right)\right\},$$

где

$$\lambda(f,\mathfrak{x}) \underset{def}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{\substack{t\to+\infty \\ t\in N}}} \dfrac{1}{t} \ln\left|df^t \mathfrak{x}\right| npu \left|\mathfrak{x}\right| \neq 0, \\ -\infty npu \left|\mathfrak{x}\right| = 0 \end{cases}$$

векторного пространства $\pi^{-1}(x)$ обладает следующим свойством: для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} подпространства $E_k((f,x))$ (в векторном пространстве $\pi^{-1}(x)$) существуют числа $\alpha \in R_*^+$, $\beta \in R_*^+$, такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in E_k(f,x)$ для всяких целых чисел $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$df^t\mathfrak{x}\left|\cdot\right|\left|df^s\mathfrak{y}\right| \geqslant \alpha \left|df^s\mathfrak{x}\right| \cdot \left|df^t\mathfrak{y}\right| \exp\left(\beta(t-s)\right).$$

Теорема доказана.

П р и м е ч а н и е. В работе [2] на с. 433 (строка 15 снизу) вместо $X(m,b)$ должно быть $\left|X(m,b)\xi\right|$, на с. 434 (строка 6 снизу) вместо» «неравенство» должно быть «равенство», на с. 443 (строка 9 снизу) у второй буквы C плохо пропечатался нижний индекс ε, на с. 454 (строка 14 сверху) вместо «фиксируем» должно быть «фиксируем указанное в предыдущей фразе», на с. 461 в строке 8 снизу нужно убрать две запятые (перед многоточием и сразу после него), на с. 464 (строка 1 снизу, не считая сноски) вместо $\left[p^{(k)}\right]^{-1} \setminus V_1$ должно быть $\left[p^{(k)}\right]^{-1}(b_0) \setminus V_1$.

В работе [3] на с. 1398 (строка 9 сверху) вместо fx должно быть $f^s x$; на с. 1399 формула (16) должна быть такой:

$$\left\|W_m\left[\mathfrak{X}(m,m-1)\right]^{-1} - 1\right\| + \left\|\mathfrak{X}(m,m-1)W_m^{-1} - I\right\| < \delta;$$

на с. 1401 (строка 8 сверху) вместо последнего плюса должен быть минус.

В работе [7] на с. 1490 (строки 1 — 2 сверху) вместо p в четырех местах должно быть π; на с. 1493 в сноске вместо R_n^* должно быть R_*^n; на с. 1494 в предпоследней строке формулы (35) перед закрывающейся квадратной скобкой пропущено выражение

$\left(d\left(h_m\right)_{f^{m_x}}\right)^{-1}$; на с. 1495 в формуле (43) в фигурной скобке вместо 0 должно быть 1; на с. 1496 в формуле (44) вместо индекса 0 должен быть индекс 1, а в формуле (50) в левой части первого неравенства вместо s должно быть z; на с. 1497 (строка 16 снизу) вместо $\widehat{g}_{m,r}$ должно быть $\widehat{g}_{m,r}, y$.

В работе [9] на с. 1906 в строке 9 сверху и в последних двух строках п. б) вместо «принадлежит» должно быть «принадлежат», на с. 1908 в формуле (14) вместо $d\left(h^{-1}{}_m\right)$ должно быть $d\left(h^{-1}{}_m\right)_0$; на с. 1909 в формуле (30) над v (в строке, но не в индексе) должна быть точка.

В работе [12] на с. 1516 в формуле (53) (в фигурной скобке) и в формуле (54) (в индексе) вместо 0 должно быть 1; на с. 1517 в формуле (60) в левой части первого неравенства вместо s должно быть z; на с. 1519 (строка 9 сверху) вместо $\overline{\in}$ должно быть $\in$; на с. 1523 в формуле (104) левая часть первого равенства должна быть такой: $\eta_{n,h_{m^{vt}}} \upsilon_t$; на с. 1535 строка 3 снизу, не считая сносок) вместо V_m должно быть V_{m-1}, на с. 1537 (строка 9 снизу) вместо g_r должен быть такой текст: $g_r, \left(\hat{f}_m\right)^{-1} u$ на $y, f^{-1} h_m^{-1} u$ на $h_{m-1}^{-1} y$; на той же с. 1537 строку 5 снизу нужно заменить таким текстом: последнее равенство в формуле, полученной из (173) указанными заменами, следует из (62).

Литература

1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 2. С. 196 — 214.
2. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 3. С. 431 — 468.
3. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 8. С. 1394 — 1410.
4. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 804 — 821.
5. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С 771 — 776.
6. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 6. С. 946 — 955.
7. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 9. С. 1489 — 1498.
8. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 4. С. 607 — 618.
9. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 11. С. 1905 — 1915.
10. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1503 — 1510.
11. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 5. С. 753 — 77S.
12. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1507 — 1548.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 7 апреля 1983 г.