Доклады Академии наук СССР
1968. Том 179, № 1

УДК 517.941.92 *МАТЕМАТИКА*

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 VI 1967*)

В настоящей работе строится теория линейных систем дифференциальных уравнений, адекватная метрической теории динамических систем. Как известно, доведение траекторий динамической системы Δ, заданной гладким векторным полем на n-мерном многообразии класса C^2 (которое мы будем предполагать компактным), вблизи данной траектории $x_0(t)$ описывается системой в вариациях

$$d\delta x / dt = D_x f(x_0(t))\, \delta x. \tag{1}$$

Если траектория $x_0(t)$ фиксирована, то мы имеем дело с фиксированной линейной системой

$$\dot{x} = A(t)\, x. \tag{2}$$

(Результаты, полученные для таких систем до 1965 г., изложены в ([1], [3]).)

Однако с точки зрения метрической теории динамических систем (см. ([2]), гл. VI) существенно поведение не отдельной траектории системы Δ, а совокупностей траекторий, множество начальных точек которых имеет положительную инвариантную меру. По теореме Крылова — Боголюбова (см. ([2]), стр. 514, теорема 24) на системе Δ существует нормированная инвариантная мера. В соответствии с этим нас будут интересовать не отдельные системы (2), а некоторые их совокупности. Предположим теперь, что многообразие вложено в эвклидово пространство и векторное поле определено в его окрестности. Легко видеть, что если $x_k(t)$ — траектории системы Δ, то $\tilde{x}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(t_k + t)$ (предел равномерный на отрезках) — также траектория системы Δ, и что если система в вариациях вдоль траектории $x_k(t)$ есть $d\delta x / dt = A_k(t)\,\delta x$, то система в вариациях вдоль траектории $\tilde{x}(t)$ есть $d\delta x / dt = \tilde{A}(t)\,\delta x$, где $\tilde{A}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} A_k(t_k + t)$ (предел равномерный на отрезках). Мы получаем, таким образом, естественное непрерывное отображение динамической системы Δ в динамическую систему D сдвигов матричных функций $A(t)$ (эта система описана на стр. 533—535 в ([2]), правда, для числовых функций, но различие несущественно). Нам будет удобнее, фиксировав любую траекторию $x_0(t)$ системы Δ, рассматривать подсистему $\Delta_{x_0(t)}$ системы Δ, определенную на замыкании траектории $x_0(t)$. Первый основной шаг состоит в том, чтобы отвлечься от этой динамической системы и рассматривать динамическую систему D_A сдвигов матричной функции $A(t) \equiv D_x f(x_0(t))$ (подсистему системы D), которая является непрерывным образом системы $\Delta_{x_0(t)}$. (Заметим, что, например, из строгой эргодичности динамической системы Δ вытекает строгая эргодичность динамической системы D_A и т. п.).

Итак, пусть дана матричная функция $A(t)$, ограниченная и равномерно непрерывная на прямой. Будем изучать систему (2). (Система (2) уже может не быть системой в вариациях ни для какой динамической системы Δ, поэтому эта задача общее предыдущей.)

Одним из основных орудий при изучении системы (2) является приведение ее к треугольному виду

$$\dot{u} = P(t)\,u; \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t), & \ldots, & p_{1n}(t) \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

перроновским преобразованием $x = U(t)\,u$ (см. ([1]), стр. 261—272). Зафиксируем такое преобразование и рассмотрим динамическую систему D_P сдвигов матричной функции $P(t)$.

Сначала наша цель — изучение связей между динамическими системами D_A и $\overline{D}_P$ (их пространства обозначим соответственно R_A и R_P). Следующее легкое рассуждение объяснит, для чего это нужно. Функции $\varphi_i(\tilde{P}) \equiv \tilde{p}_{ii}(0)$, где $\tilde{P}(t) \in R_P$, непрерывны на R_P. Поэтому, согласно эргодической теореме Биркгофа (см. ([2]), стр. 480—490), для почти всех $\tilde{P} \in R_P$ (в смысле любой инвариантной меры на D_P) существуют средние

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi_i(\tilde{P}(\tau))\,d\tau = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{p}_{ii}(\tau)\,d\tau,$$

а значит, система $\dot{u} = \tilde{P}(t)\,u$ правильная (см. ([1]), стр. 141, теорема Ляпунова). Спрашивается, будут ли в D_A почти все (в смысле любой инвариантной меры на D_A) $\tilde{A}(t) \in R_A$ таковы, что система $\dot{x} = \tilde{A}(t)\,x$ — правильная? (Из теоремы 2 вытекает, в частности, положительное решение этого вопроса.)

Определим отображение F системы D_A на систему D_P так:

$$F\,(\tilde{A}(t) \equiv \lim_{k\to\infty} A(t_k + t)) = \tilde{P}(t) \equiv \lim_{k\to\infty} P(t_k + t)$$

(знак $\lim$ здесь означает не предел, а любую из предельных точек последовательности, так что это отображение — многозначное в обе стороны).

Фундаментальная роль отображения F основана на следующем предложении, доказательство которого см. в ([6]).

Л е м м а 1. *Если* $F(\tilde{A}) = \tilde{P}$, *то существует перроновское преобразование* $x = \tilde{U}(t)\,u$, *приводящее систему* $\dot{x} \neq \tilde{A}(t)\,x$ *к треугольному виду* $\dot{u} = \tilde{P}(t)\,u$.

Используя то обстоятельство, что F и F^{-1} переводят замкнутые множества в замкнутые, удается оценивать инвариантные меры множеств в D_A через инвариантные меры их образов в D_P, и наоборот, и это дает возможность доказать следующую лемму. (В дальнейшем инвариантная мера всегда предполагается нормированной регулярной мерой Каратеодори — Лебега (см. ([2]), стр. 461, аксиома V).)

Л е м м а 2. *Для всякой инвариантной меры* μ *на* D_A *для всякого множества* $M \subseteq R_A$ *такого, что* $\mu(M) > 0$ (*соответственно* $=1$), *существует инвариантная мера* ν *на* D_P *такая, что* $\nu(F(M) > 0$ (*соответственно* $=1$).

Обратно, для всякой инвариантной меры ν *на* D_P *и всякого множества* $N \subseteq R_P$ *такого, что* $\nu(N) > 0$ (*соответственно* $=1$), *существует инвариантная мера* μ *на* D_A *такая, что* $\mu(F^{-1}(N) > 0$ (*соответственно* $=1$).

О п р е д е л е н и е 1 (см. ([6])). Назовем λ в е р о я т н ы м п о к а з а т е л е м с и с т е м ы (2), если некоторое перроновское преобразование $x = U(t)\,u$ приводит систему (2) к треугольному виду (3) такому, что для некоторого i на динамической системе D_P найдется инвариантная мера ν такая, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t \tilde p_{ii}(\tau)\,d\tau=\lambda$$

для почти всякой (в смысле меры ν) $\tilde P(t)\in R_P$.

Из леммы 2 вытекает, что определение 1 эквивалентно следующему определению.

Определение 2. Назовем λ вероятным показателем системы (2), если на динамической системе D_A существует инвариантная мера μ такая, что для почти всех (в смысле меры μ) $\tilde A(t)\in R_A$ система $\dot x=\tilde A(t)\,x$ имеет λ одним из своих характеристических показателей.

Множество вероятных показателей системы (2) будем обозначать Λ_P или $\Lambda_P(A)$ и называть вероятным спектром системы (2).

Теорема 1. *Для всякого обобщенного решения системы* (2) $\tilde x(t)=\lim\limits_{k\to\infty}x_k(t_k+t)$ (*т. е. обычного*, *сдвига обычного или предельного решения*, *см.* [4]) *числа*

$$\overline{\lambda}=\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|\tilde x(t)\|}{\|\tilde x(\tau)\|},\quad \underline{\lambda}=\underline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|\tilde x(t)\|}{\|\tilde x(\tau)\|}$$

принадлежат $\Lambda_P(A)$.

Особые показатели Ω^0 и ω^0 системы (2) (см., например, [1], стр. 191) также принадлежат $\Lambda_P(A)$. Теорема вытекает из [6] и леммы 2.

Теорема 2. *В смысле любой инвариантной меры на динамической системе* D_A *почти все* $\tilde A(t)\in R_A$ *таковы*, *что система* $\dot x=\tilde A(t)\,x$ *статистически правильная* (см. [5]).

Теорема вытекает из [6] и леммы 2.

Справедлива также (см. [6], теорема 4).

Теорема 3. *Если система* (2) *статистически правильная*, *то ее наибольший характеристический показатель прочен вверх*, *а наименьший прочен вниз* (*объяснение этих терминов*, *см. в* [1], стр. 162, *определение* 13.1.1).

Определение 3. Назовем систему (2) бирегулярной, если существует перроновское преобразование $x=U(t)\,u$, приводящее ее к треугольному виду (3), такому, что существуют пределы

$$\lambda_i=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau\quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Теорема 4. *В смысле любой транзитивной инвариантной меры на* D_A *почти все* $\tilde A(t)\in R_A$ *таковы*, *что система* $\dot x=\tilde A(t)\,x$ *бирегулярна*, *и ее характеристические показатели одни и те же для почти всех* (*в смысле этой меры*) $\tilde A(t)\in R_A$.

Смысл введения бирегулярных систем (очевидно, это подкласс правильных систем) состоит в том, что для них, наряду с теоремой 4, имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть система* (2) *перроновскими преобразованиями* $x=U(t)\,u$ *и* $x=V(t)\,v$ *приводится к треугольному виду соответственно* $\dot u=P(t)\,u$, $\dot v=Q(t)\,v$, *причем*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t q_{ii}(\tau)\,d\tau=\lambda_i \tag{4}$$

$$(i=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Пусть λ_i *все различны. Тогда* $Q(t)=P(t)$.

Из теоремы 4 и 5 вытекает

Теорема 6. *Пусть* μ — *транзитивная инвариантная мера на* D_A, *и пусть почти* *все (в смысле меры* μ*)* $\tilde{A}(t) \in R_A$ *таковы, что система* $\dot{x} = \tilde{A}(t)\, x$ *не имеет кратных характеристических показателей. Тогда отображение* F*, определенное выше, почти всюду (в смысле меры* μ*) конечнозначно.*

Рассмотрим теперь важный частный случай системы (2), а именно, предположим, что динамическая система D_A строго эргодическая. (Так будет, например, если матрица $A(t)$ почти периодическая по t.)

Из леммы 2 и теоремы 4 вытекает

Т е о р е м а 7. *Пусть динамическая система* D_A *строго эргодическая. Тогда для почти каждой* $\tilde{A}(t) \in R_A$ *(в смысле той единственной инвариантной меры, которая есть на* D_A*) всякая* $P(t) = F(\tilde{A}(t))$ *(отображение* F *может быть не однозначно!) имеет одни и те же (но только, может быть, занумерованные в разном порядке!)*

$$\lambda_i = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\tau)\, d\tau \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и набор этих λ_i *совпадает с вероятным спектром* $\Lambda_P(A)$.

С л е д с т в и е 1. *Если динамическая система* D_A *строго эргодическая, то мощность вероятного спектра* $\Lambda_P(A)$ *системы* (2) *не превосходит* n *(порядка системы* (2)*).*

С л е д с т в и е 2. *Если динамическая система* D_A *строго эргодическая, и* $\Lambda_P(A)$ *состоит из* n *различных чисел, то отображение* F *почти всюду на* D_A *(в смысле инвариантной меры на* D_A*) конечнозначно (число значений* $\leqslant n$ *!).*

С л е д с т в и е 3*. *Если динамическая система* D_A *строго эргодическая, то для почти всякой* $\tilde{A}(t) \in R_A$ *(в смысле инвариантной меры на* D_A*) наибольший характеристический показатель системы* $\dot{x} = \tilde{A}(t)\, x$ *равен* Ω^0*, а наименьший равен* ω^0.

Примечание при корректуре. Нам стало известно, что в статье Оселедца ([7]) имеются утверждения, близкие к лемме 2 и теореме 4.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 12 VI 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Ф. Б ы л о в , Р. Э. В и н о г р а д и др., Теория показателей Ляпунова, «Наука», 1966. [2] В. В. Н е м ы ц к и й , В. В. С т е п а н о в , Качественная теория дифференциальных уравнений, 2-е изд., М. — Л., 1949. [3] З. П. Е р у г и н , Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, 1963. [4] В. М. М и л л и о н щ и к о в , ДАН, **161**, № 1, 43 (1965). [5] В. М. М и л л и о н щ и к о в , Матем. заметки, **2**, в. 3, 315 (1967). [6] В. М. М и л л и о н щ и к о в , Матем. сборн., **75** (**117**), в. 1, 154 (1968). [7] В. И. О с е л е д е ц , Тр. Моск. матем. общ., **19** (1968).

* Вытекает из теорем 1 и 7.