УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. XIV

ВВЕДЕНИЕ

Пусть (V^n,δ) — полное связное n-мерное. риманово многообразие (V^n — многообразие класса $C^3, \delta(\cdot,\cdot)$ — риманова метрика класса C^2). Через $\rho(\cdot,\cdot)$ обозначается расстояние между точками этого риманова многообразия, через (TV^n,π,V^n) — касательное расслоение.

Для отображения $g:V^n\to V^n$ класса C^1 вводятся обозначения: dg_x — производная отображения g в точке $x\in V^n$,

$$|||\, dg\, ||| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n} \|\, dg_x \,\|$$

и (если производная отображения g в каждой точке не выраждена)

$$|||\,(dg)^{-1}\,||| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n} \|\,(dg_x)^{-1}\,\|.$$

Пусть дано*) $j\in S^u$. Пусть дано $f\in S^u_j$. Пусть $\overline{\delta}\in R^+_*$ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\delta} \leqslant (321\,|||\,df\,|||\cdot|||\,(df)^{-1}\,|||)^{-1}. \tag{B.1}$$

Пусть точка $x\in V^n$ такова, что точки $x, fx,\dots, f^m x,\dots$ все различны. Пусть дано $\bar{t}\in N$ и даны невырожденные линейные отображения $Z_m:\pi^{-1}(f^{m-1}x)\to\pi^{-1}(f^m x)$ $(m\in\{1,\dots,\bar{t}\})$, удовлетворяющие неравенству

$$\|\, Z_m (df_{f^{m-1}x})^{-1} - I\,\| + \|\,(df_{f^{m-1}x}) Z_m^{-1} - I\,\| < \overline{\delta}.$$

В [1] построено отображение $g_r:V^n\to V^n$ (для всякого $r\in(0,\bar{s})$, где $\bar{s}$ — некоторое положительное число (определенное формулой (49) [1])). В [2] изучены некоторые свойства отображения g_r. В этой статье продолжается изучение свойств этого отображения.

§ 1.

Л е м м а. *Найдется* $\overline{\overline{\alpha}}\in R^+_*$, *такое, что при всяком* $r\in(0,\overline{\overline{\alpha}})$ *отображение* $g_r:V^n\to V^n$, *определенное формулой (52)* [1], *есть инъекция***) V^n *в* V^n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $z_1\in V^n, z_2\in V^n$ и пусть при некотором $r\in(0,\bar{s})$ имеет место равенство

$$g_r z_1 = g_r z_2. \tag{1}$$

Тогда

$$\rho(z_1,z_2) \leqslant |||\,(df)^{-1}\,|||\,\rho(fz_1,fz_2) \leqslant$$
$$\leqslant |||\,(df)^{-1}\,|||\cdot[\rho(g_r z_1, fz_1) + \rho(g_r z_2, fz_2)] \leqslant$$

---

*) Обозначения S^u, S^u_j объяснены в пп. 4, 5 введения [1], R^+_* — множество положительных вещественных чисел.

**) То есть отображение g_r таково, что из равенства $g_r z_1 = g_r z_2$ следует равенство $z_1 = z_2$

$$\leqslant 2 \, ||| (df)^{-1} ||| \sup_{z \in V^n} \rho(g_r z, fz); \tag{2}$$

первое неравенство этой цепочки хорошо известно (впрочем, его доказательство приведено в [3, с. 1339]), второе следует из неравенства треугольника в силу равенства (1).

2. Возьмем $\alpha \in (0, \bar{s})$, такое, что для всякого $r \in (0, \alpha)$ выполнено неравенство*)

$$\sup_{z \in V^n} \rho(g_r z, fz) < \frac{1}{4} \bar{r} \, ||| (df)^{-1} |||^{-1} \tag{3}$$

(такое α существует в силу леммы 3 [2]).

Пусть при некоторых $r \in (0, \alpha), z_1 \in V^n, z_2 \in V^n$ имеет место равенство (1). Тогда

$$\rho(z_2, z_1) \underset{(3)}{\overset{(2)}{<}} \frac{1}{2} \bar{r}. \tag{4}$$

Если при этом

$$g_r z_1 = fz_1, g_r z_2 = fz_2, \tag{5}$$

то $fz_1 \underset{(5)}{\overset{(1)}{=}} fz_2$, откуда следует равенство $z_1 = z_2$ (напомним, что и, $f \in S$ следовательно, f есть биекция V^n на V^n).

Если хоть одно из двух равенств (5) не выполнено, то без ограничения общности (изменив, если нужно, нумерацию точек z_1, z_2) можно считать, что не выполнено первое из них, т. е. что имеет место неравенство

$$g_r z_1 \neq fz_1. \tag{6}$$

В силу формулы (52) [1], определяющей отображение g_r, из неравенства (6) следует, что найдется $m \in \{1, ..., \bar{t}\}$, такое, что $z_1 \in W_{m-1}$. Из неравенства (6) следует тогда, что $z_1 \in W_{m-1}^{(1)}$. В самом деле, если бы точка z_1 принадлежала множеству**) $W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)} \underset{(1.17)}{\subset} V_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}$, то (см. в [1] фразы, содержащие формулы (60) – (63)) выполнялось бы равенство $\hat{g}_{m,r} h_{m-1} z_1 \underset{(1.63)}{=} f_m h_{m-1} z_1$, из которого в силу формулы (53) [1] следует равенство $h_m^{-1} \hat{g}_{m,r} h_{m-1} z_1 = h_m^{-1} f_m h_{m-1} z_1$, которое в силу формул (28) [1], (52) [1] переписывается в виде равенства $g_r z_1 = fz_1$, которое противоречит неравенству (6). Полученное противоречие доказывает, что $z_1 \in W_{m-1}^{(1)}$, следовательно,

$$\rho(z_1, f^{m-1} x) \underset{(1.47)}{<} \frac{1}{2} \bar{r}. \tag{7}$$

Имеем: $\rho(z_2, f^{m-1}x) \leqslant \rho(z_2, z_1) + \rho(z_1, f^{m-1}x) \underset{(7)}{\overset{(4)}{<}} \bar{r} \underset{(1.45)}{\leqslant} \bar{r}_{m-1}$, следовательно, в силу определения множеств W_k (см. п. 5 [1]) $z_2 \in W_{m-1}$.

Подведем итог этого пункта. В нем доказано следующее утверждение.

Найдется $\alpha \in (0, \bar{s})$, *такое, что если при некоторых* $r \in (0, \alpha), z_1 \in V^n, z_2 \in V^n$ *выполнено равенство* $g_r z_1 = g_r z_2$, *то: либо* $z_1 = z_2$, *либо не выполнено хотя бы одно из двух равенств (5), и тогда найдется* $m \in \{1, ..., \bar{t}\}$, *такое, что* $z_1 \in W_{m-1}, z_2 \in W_{m-1}$ (эти два случая не являются взаимоисключающими, т. е. могут осуществиться сразу оба).

3. Пусть для некоторого $r \in (0, \alpha)$ (а определено в предыдущем пункте), для некоторых $z_1 \in V^n, z_2 \in V^n$ выполнено равенство

---

*) Напомним, что число $\bar{r}$, определенное формулой (45) [1], больше нуля.

**) Здесь и далее ссылка на формулу (M. N) есть краткая запись ссылки на формулу (N) статьи [M].

$$g_r z_1 = g_r z_2 \tag{8}$$

В силу утверждения, доказанного в предыдущем пункте, либо $z_1 = z_2$ либо найдется $m \in \{1,\dots,\bar{t}\}$, такое, что

$$z_1 \in W_{m-1}, z_2 \in W_{m-1}. \tag{9}$$

Во втором случае положим

$$y_1 = h_{m-1} z_1, y_1 = h_{m-1} z_2. \tag{10}$$

Так как

$$\hat{g}_{m,r} y_1 \underset{10}{=} \hat{g}_{m,r} h_{m-1} z_1 \overset{(1.52)}{\underset{(9)}{=}} h_m g_r z_1 \underset{(8)}{=} h_m g_r z_2 \overset{(1.52)}{\underset{(9)}{=}} \hat{g}_{m,r} h_{m-1} z_2 \underset{(10)}{=} \hat{g}_{m,r} y_2.$$

то имеет место равенство

$$(\hat{g}_{m,r} - f_m) y_1 - (\hat{g}_{m,r} - f_m) y_2 = f_m y_2 - f_m y_1. \tag{11}$$

Справедливо также неравенство

$$|(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m) y_1 - (\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m) y_2|_{0,m} \leqslant \{ \sup_{y \in h_{m-1} W_{m-1}} \| \hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y \|_{0,m-1}^{0,m} \} | y_1 - y_2 |_{0,m-1}. \tag{12}$$

Напомним, что за разъяснением используемых в этом неравенстве обозначений можно обратиться к формулам (39) и (42) из [2].

Для доказательства неравенства (12) напомним одно хорошо известное (и легко доказываемое) утверждение.

Пусть на R^n заданы две нормы: $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$; пусть $G \subset R^n$ — выпуклое открытое множество и пусть $F : G \to R^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда для всяких $a \in G$, $b \in G$ имеет место неравенство[*)]

$$| Fa - Fb |_2 \leqslant \{ \sup_{y \in G} \| \hat{d} F_y \|_1^2 \} | a - b |_1,$$

где принято обозначение $\| L \|_1^2 \underset{def}{=} \sup_{a \in R_*^n} \{ | La |_2 (| a |_1)^{-1} \}$ для всякого линейного отображения $L : R^n \to R^n$.

Для того чтобы из этого известного утверждения получить неравенство (12), достаточно положить: $|\cdot|_1 \underset{def}{=} |\cdot|_{0,m-1}, |\cdot|_2 \underset{def}{=} |\cdot|_{0,m}$ (тогда $\|\cdot\|_1^2 \overset{(2.39)}{\underset{(2.42)}{=}} \|\cdot\|_{0,m-1}^{0,m}$),

$$F \underset{def}{=} \sigma(r^{-1} \hat{\rho}_{m-1}(\bullet))[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0] \underset{(1.40)}{=} \hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m,$$

$$G \underset{def}{=} S^c_{\frac{q}{2}} \underset{(1.15)}{=} h_{m-1} V^{(1)}_{m-1} \underset{(1.16)}{\subset} h_{m-1} V_{m-1} \tag{13}$$

и воспользоваться тем, что, во-первых, в силу формул (9), (10) точки y_1, y_2 содержатся в множестве $h_{m-1} W_{m-1} \underset{(1.17)}{\subset} h_{m-1} V^{(1)}_{m-1} \underset{(13)}{=} G$, а, во-вторых,

$$\sup_{y \in h_{m-1} W_{m-1}} \| \hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y \|_{o,m-1}^{o,m} \underset{(1.40)}{=}$$

$$\underset{(1.40)}{=} \sup_{y \in h_{m-1} W_{m-1}} \| \hat{d} \{ \sigma(r^{-1} \hat{\rho}_{m-1}(\cdot))[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0] \}_y \|_{o,m-1}^{o,m} =$$

$$= \sup_{y \in G} \| \hat{d} \{ \sigma(r^{-1} \hat{\rho}_{m-1}(\cdot))[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0] \}_y \|_{o,m-1}^{o,m}$$

[*)] Верное во всех случаях, но содержательное лишь в том случае, когда sup в правой части есть число (а не $+\infty$).

(последнее равенство следует из того, что, как доказано в [1] в фразе, содержащей формулы (60) — (62), при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ сужение отображения $\sigma(r^{-1}\widehat{\rho}_{m-1}(\cdot))[\widehat{Z}_m - \widehat{d}(\widehat{f}_m)_0]$ на открытое множество

$$(h_{m-1}V_{m-1}) \setminus (h_{m-1}W_{m-1}^{(1)}) \underset{(13)}{\overset{(1.48)}{\supset}} G \setminus (h_{m-1}W_{m-1})$$

равно нулю).

4. Для всякого $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ возьмем, $\alpha_m^{(1)} \in R_*^+$ такое, что для всякого $y \in R^n$, удовлетворяющего неравенству $|y|_{0,m} < \alpha_m^{(1)}$, имеют место: включение

$$y \in \widehat{f}_m h_{m-1} V_{m-1} \underset{(1.28)}{\overset{(1.17),(1.19)}{\supset}} h_m f W_{m-1}$$

и неравенство $\widehat{\rho}_{m-1}((\widehat{f}_m)^{-1} y) < \min\{\alpha_m, \beta_m\}$ (напомним, что в [2] $\alpha_m \in R_*^+$, $\beta_m \in R_*^+$ определены фразами, содержащими формулы (62), (63); такое $\alpha_m^{(1)}$ существует, так как при всяких $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеет место формула (28) [1], f — гомеоморфизм V^n на V^n и при всяком $k \in \{1,...,\bar{t}\}$ имеют место утверждения: — h_k гомеоморфизм V_k на $h_k V_k \subset R^n$, W_k — окрестность точки $f_k x$, содержащаяся в V_k, и имеют место формулы (9), (17), (19), (42) работы [l]).

Для всякого $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ возьмем $\alpha_m^{(2)} \in R_*^+$, такое, что для всякого $y \in R^n$, удовлетворяющего неравенству $\widehat{\rho}_{m-1}(y) < \alpha_m^{(2)}$, имеет место неравенство $|\widehat{f}_m y|_{0,m} < \alpha_m^{(1)}$ (такое $\alpha_m^{(2)}$ существует в силу непрерывности отображения $\widehat{f}_m : h_{m-1}W_{m-1} \to R^n$, поскольку $\widehat{f}_m 0 \underset{(1.28)}{\overset{(1.9)}{=}} 0, h_{m-1}W_{m-1}$ — окрестность нуля в R^n, имеет место формула (42) [1], а координатное отображение h_{m-1} определено в окрестности точки $f^{m-1}x$, непрерывно в этой точке и отображает ее в нуль).

Положим $\alpha^{(2)} \underset{def}{=} \min\{\alpha_1^{(2)},...,\alpha_{\bar{t}}^{(2)}\}$. При этом $\alpha^{(2)} \in R_*^+$, так как $\alpha_1^{(2)} \in R_*^+,...,\alpha_{\bar{t}}^{(2)} \in R_*^+$

5. Возьмем $\bar{\alpha} \in \left(0, \min\{\alpha, \frac{1}{2}\alpha^{(2)}\}\right)$ (число определено $\alpha \in (0,\bar{s})$ в начале п. 2, число $\alpha^{(2)} \in R_*^+$ определено в п. 4), такое, что для всякого $r \in (0,\bar{\alpha})$ выполнено неравенство

$$\sup_{z \in V^n} \rho(g_r z, fz) < \frac{1}{4}\alpha^{(2)} |||(df)^{-1}|||^{-1} \tag{14}$$

(такое $\bar{\alpha}$ существует в силу леммы 3 [2,]).

Пусть при некоторых $r \in (0,\bar{\alpha})$, $z_1 \in V^n, z_2 \in V^n$ имеет место равенство $(I): g_r z_1 = g_r z_2$.

Так как $r \in (0,\bar{\alpha}) \subset (0,\alpha) \subset (0,\bar{s})$, то

$$\rho(z_2, z_1) \underset{(14)}{\overset{(1),(2)}{<}} \frac{1}{2}\alpha^{(2)}. \tag{15}$$

Кроме того, так как $r \in (0,\bar{\alpha}) \subset (0,\alpha)$, то, как доказано в п. 2, из равенства (1) следует, что либо $z_1 = z_2$, либо $g_r z_1 \neq f z_1$ (либо $g_r z_2 \neq f z_2$, но последний случай сводится к предыдущему изменением нумерации точек z_1, z_2), и тогда найдется $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, такое, что $z_1 \in W_{m-1}, z_2 \in W_{m-1}$.

Пусть

$$g_r z_1 \neq f z_1. \tag{16}$$

Возьмем $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, такое, что $z_1 \in W_{m-1}, z_2 \in W_{m-1}$. Тогда

$$\rho(z_1, f^{m-1}x) < \overline{\alpha} < \frac{1}{2}\alpha^{(2)}. \tag{17}$$

Второе неравенство цепочки (17) непосредственно следует из определения числа $\overline{\alpha}$. Докажем первое неравенство этой цепочки. Предположим противное:

$$\rho(z_1, f^{m-1}x) \geqslant \overline{\alpha} \tag{18}$$

Положив

$$y_1 \underset{def}{=} h_{m-1}z_1 \tag{19}$$

и воспользовавшись формулой (42) [1], перепишем неравенство (18) в виде

$$\widehat{\rho}_{m-1}(y_1) \geqslant \overline{\alpha}. \tag{20}$$

Так как $r < \overline{\alpha}$, то $r^{-1}\widehat{\rho}_{m-1}(y_1) \underset{(20)}{>} 1$, откуда в силу формулы (41) [1] следует равенство $\sigma(r^{-1}\widehat{\rho}_{m-1}(y_1)) = 0$, из которого в силу формулы (40) [1] следует равенство $\widehat{g}_{m,r}y_1 = f_m y_1$, откуда (напомним, что $z_1 \in W_{m-1}$)

$$h_m^{-1}\widehat{g}_{m,r}h_{m-1}z_1 \underset{(19)}{=} h_m^{-1}f_m h_{m-1}z_1,$$

и в силу формул (28) [1] и (52) [1] имеем равенство $g_r z_1 = f z_1$, противоречащее неравенству (16). Полученное противоречие доказывает, что первое неравенство цепочки (17) выполнено.

Имеем, далее,

$$\rho(z_2, f^{m-1}x) \leqslant \rho(z_2, z_1) + \rho(z_1, f^{m-1}x) \overset{(15)}{\underset{(17)}{<}} \alpha^{(2)}. \tag{21}$$

Подведем итог п. 5. В этом пункте доказано следующее утверждение.

Если для некоторого $r \in (0, \overline{\alpha})$ (число $\overline{\alpha}$ определено в первой фразе п. 5), для некоторых $z_1 \in V^n$, $z_2 \in V^n$ имеет место равенство (1), то либо $z_1 = z_2$, либо найдется $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, такое, что $z_1 \in W_{m-1}, z_2 \in W_{m-1}$ и выполнены неравенства

$$\rho(z_1, f^{m-1}x) \underset{(17)}{<} \alpha^{(2)}, \rho(z_2, f^{m-1}x) \underset{(21)}{<} \alpha^{(2)}.$$

6. Пусть $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $z_1 \in W_{m-1}, z_2 \in W_{m-1}$ таковы, что выполнены неравенства

$$\rho(z_i, f^{m-1}x) < \alpha^{(2)} \quad (i \in \{1,2\}) \tag{22}$$

(напомним, что число $\alpha^{(2)} \in R_*^+$ определено в п. 4).

Положим $y_i \underset{def}{=} h_{m-1}z_i \quad (i \in \{1,2\})$, тогда

$$\widehat{\rho}_{m-1}(y_i) \underset{(1.42)}{=} \rho(z_i, f^{m-1}x) \underset{(22)}{<} \alpha^{(2)} \quad (i \in \{1,2\}). \tag{23}$$

Воспользуемся хорошо известным утверждением, формулировка которого воспроизведена в п. 3; в данном случае для применения цитируемого утверждения положим: $a = \widehat{f}_m y_1, b = \widehat{f}_m y_2$, $|\cdot|_1 = |\cdot|_{0,m}, |\cdot|_2 = |\cdot|_{0,m-1}$ (тогда $\|\cdot\|_1^2 = \|\cdot\|_{0,m-1}^{0,m}$),

$$G = G_m \underset{def}{=} \{y \in R^n : |y|_{0,m} < \alpha_m^{(1)}, F = (f_m)^{-1} \tag{24}$$

и учтем, что, во-первых, в силу определения числа $\alpha_m^{(1)}$ (см. п. 4) и определения множества G_m (см. формулу (24)) имеет место включение

$$G_m \subset f_m h_{m-1} W_{m-1} = h_m f W_{m-1} \tag{25}$$

(следовательно, множество G_m содержится в области определения отображения $(\widehat{f}_m)^{-1}$, которое непрерывно дифференцируемо в своей области определения) и, во-вторых,

$|\widehat{f}_m y_i|_{0,m} < \alpha_m^{(1)}$ $(i \in \{1,2\})$, т. е. $\widehat{f}_m y_i \in G_m$ $(i \in \{1,2\})$ (это следует из (23) в силу определения числа $\alpha^{(2)}$ (см. п. 4)); в результате применения цитированного утверждения к этой ситуации получаем неравенство:

$$|y_1 - y_2|_{0,m-1} \leqslant \{\sup_{u \in G_m} \|(\widehat{d}((\widehat{f}_m)^{-1})_u\|_{0,m}^{0,m-1}\} |\widehat{f}_m y_1 - \widehat{f}_m y_2|_{0,m}.$$

Воспользовавшись хорошо известным тождеством $\widehat{d}((\widehat{f}_m)^{-1})_u = (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}$, перепишем полученное неравенство в виде

$$|y_1 - y_2|_{0,m-1} \leqslant \{\sup_{u \in G_m} \|(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}\|_{0,m}^{0,m-1}\} |\widehat{f}_m y_1 - \widehat{f}_m y_2|_{0,m}. \tag{26}$$

Для всякого $u \in G_m$ имеем

$$\|(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}\|_{0,m}^{0,m-1} \leqslant \|I\|^{0,m-1}_{(\widehat{f}_m)^{-1}u,m-1} \|(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}\|_{u,m}^{(\widehat{f}_m)^{-1}u,m-1} \|I\|^{u,m}_{0,m}. \tag{27}$$

Для всякого $u \in G_m \underset{(25)}{\subset} f_m h_{m-1} W_{m-1} \underset{(1.17)}{\subset} f_m h_{m-1} V_{m-1}$ в силу определения числа $\alpha_m^{(1)}$ (см. п. 4) имеет место неравенство $\widehat{\rho}_{m-1}((\widehat{f}_m)^{-1}u) < \min\{\alpha_m, \beta_m\}$, из которого следуют два неравенства:

$$\|I\|^{0,m-1}_{(\widehat{f}_m)^{-1}u,m-1} < 2 \tag{28}$$

(см. в [2] фразу, содержащую формулу (62)) и

$$\|I\|^{u,m}_{0,m} < 2 \tag{29}$$

(см. в [2] фразу, содержащую формулу (63), при применении которой нужно учесть, что $u = \widehat{f}_m((\widehat{f}_m)^{-1}u)$.

Для всякого $u \in \widehat{f}_m h_{m-1} W_{m-1} \overset{(1.17)(1.19)}{\underset{(1.28)}{\subset}} h_m V_m$ имеем

$$\|(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}\|_{u,m}^{(\widehat{f}_m)^{-1}u,m-1} \underset{(2.39)}{=} \sup_{a \in R_*^n}\{(g_{ij}^{(m-1)}((\widehat{f}_m)^{-1}u) \times$$

$$\times ((\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}a)^i ((\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}a)^j)^{\frac{1}{2}} (g_{ij}^{(m)}(u) a^i a^j)^{-\frac{1}{2}}\} \underset{(1.30)}{=}$$

$$\underset{(1.30)}{=} \sup_{a \in R_*^n}\{(\delta(\eta^{-1}_{m-1,(\widehat{f}_m)^{-1}u} (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}a, \tag{30}$$

$$\eta^{-1}_{m-1,(\widehat{f}_m)^{-1}u} (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}a))^{\frac{1}{2}} (\delta(\eta^{-1}_{m,u}a, \eta^{-1}_{m,u}a))^{-\frac{1}{2}}\},$$

$$\eta^{-1}_{m-1,(\widehat{f}_m)^{-1}u} \underset{(1.31)}{=} (d(h_{m-1})_{h^{-1}_{m-1}(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1} (\tau^{[n]}_{(\widehat{f}m)^{-1}u})^{-1}, \tag{31}$$

$$(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \underset{(2.8)}{=} \tau^{[n]}_{(\widehat{f}m)^{-1}u} (d(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1} (\tau_u^{[n]})^{-1}, \tag{32}$$

$$\eta^{-1}_{m-1,(\widehat{f}_m)^{-1}u} (\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \overset{(31)}{\underset{(32)}{=}} (d(h_{m-1})_{h^{-1}_{m-1}(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1} (d(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1} \times$$

$$\times (\tau_u^{[n]})^{-1} \underset{(1.28)}{=} (df_{f^{-1}h_m^{-1}u})^{-1} d(h_m^{-1})_u (\tau_u^{[n]})^{-1} \underset{(1.31)}{=} (df_{f^{-1}h_m^{-1}u})^{-1} \eta^{-1}_{m,u},$$

$$\|(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{(\widehat{f}_m)^{-1}u})^{-1}\|_{u,m}^{(\widehat{f}_m)^{-1}u,m-1} \overset{(30)}{\underset{(33)}{=}} \sup_{a \in R_*^n}\{(\delta((df_{f^{-1}h_m^{-1}u})^{-1} \eta^{-1}_{m,u} a, \tag{33}$$

$$(df_{f^{-1}h_m^{-1}u})^{-1} \eta^{-1}_{m,u} a))^{\frac{1}{2}} (\delta(\eta^{-1}_{m,u}a, \eta^{-1}_{m,u}a))^{-\frac{1}{2}}\} \underset{(1.31)}{=}$$

$$\underset{(1.31)}{=} \sup_{\mathfrak{x} \in \pi_*^{-1}(h_m^{-1}u)} \{(\delta((df_{f^{-1}h_m^{-1}u})^{-1} \mathfrak{x}, (df_{f^{-1}h_m^{-1}u})^{-1} \mathfrak{x}))^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times(\delta(\mathfrak{x},\mathfrak{x}))^{-\frac{1}{2}}\} = \| (df_{f^{-1}h_m^{-1}u})^{-1} \| \leqslant \||(df)^{-1}\||. \qquad (34)$$

Равенство, помеченное в цепочке (34) номером формулы (1.31), следует из равенства $\eta_{m,u}^{-1} R_*^n = \pi_*^{-1}(h_m^{-1}u)$, вытекающего из того, что формула (31) [1] при всяких $k \in \{0,...,\bar{t}\}, y \in h_k V_k$ определяет изоморфизм $\eta_{k,y}$ векторного пространства $\pi^{-1}(h_k^{-1}y)$ на векторное пространство R^n.

Для всякого $u \in G_m$ имеет место неравенство

$$\| \widehat{d}((\widehat{f}_m)^{-1})_u \|_{0,m}^{0,m-1} \leqslant 4 \||(df)^{-1}\||, \qquad (35)$$

вытекающее из неравенств (27) — (29), (34). Из неравенств (26), (35) следует неравенство

$$| y_1 - y_2 |_{0,m-1} \leqslant 4 \||(df)^{-1}\|| \cdot | \widehat{f}_m y_1 - \widehat{f}_m y_2 |_{0,m}. \qquad (36)$$

Подведем итог п. 6. В этом пункте доказано следующее утверждение. Пусть $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $z_1 \in W_{m-1}, z_2 \in W_{m-1}$ таковы, что выполнены неравенства (22). Тогда имеет место неравенство (36), где $y_i = h_{m-1} z_i \quad (i \in \{1,2\})$.

7. Напомним, что β — это такое положительное число, что при всяком $r \in (0,\beta)$ имеют место неравенства (37) [2], (38) [2] (такое число существует в силу леммы 4 [2]). Напомним также, что число $\bar{\alpha}$ определено в первой фразе п. 5.

Пусть при некотором $r \in (0, \min\{\beta,\bar{\alpha}\})$ при некоторых $z_1 \in V^n, z_2 \in V^n$ имеет место равенство $(1): g_r z_1 = g_r z_2$. Так как $r \in (0,\bar{\alpha}) \subset (0,\alpha)$, то либо $z_1 = z_2$, либо (см. п. 3) найдется, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ такое, что $z_i \in W_{m-1} \;\; (i \in \{1,2\})$ и имеют место формулы (11), (12), где y_1, y_2 определены формулой (10): $y_i = h_{m-1} z_i \;\; (i \in \{1,2\})$. Из формул (11), (12) следует неравенство

$$| \widehat{f}_m y_2 - \widehat{f}_m y_1 |_{0,m} \leqslant \{ \sup_{y \in h_{m-1} W_{m-1}} \| \widehat{d}(\widehat{g}_{m,r} - \widehat{f}_m)_y \|_{0,m-1}^{0,m} \} | y_1 - y_2 |_{0,m-1}. \qquad (37)$$

Так как $r \in (0,\beta)$, то имеет место неравенство (38) [2]. Из неравенств (38) [2], (37) следует неравенство

$$| \widehat{f}_m y_2 - \widehat{f}_m y_1 |_{0,m} \leqslant 80\bar{\delta} \||df\|| \cdot | y_1 - y_2 |_{0,m-1}. \qquad (38)$$

Так как $r \in (0,\bar{\alpha})$ и выполнено равенство (1), то, как доказано в п. 5, либо $z_1 = z_2$, либо найдется, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ такое, что[*)] $z_1 \in W_{m-1}, z_2 \in W_{m-1}$ и выполнены неравенства (22). Во втором случае, как доказано в п. 6, выполнено неравенство (36). Из неравенств (36), (38) следует неравенство

$$| y_1 - y_2 |_{0,m-1} \leqslant 320\bar{\delta} \||df\|| \cdot \||(df)^{-1}\|| \cdot | y_1 - y_2 |_{0,m-1}. \qquad (39)$$

Так как $320\bar{\delta} \||df\|| \cdot \||(df)^{-1}\|| \underset{(B1)}{<} 1$, то из неравенства (39) следует равенство

$$y_1 = y_2. \qquad (40)$$

Имеем $z_1 = h_{m-1}^{-1} y_1 \underset{(40)}{=} h_{m-1}^{-1} y_2 = z_2$.

В п. 7 доказано следующее утверждение. Найдется $\bar{\bar{\alpha}} \in R_*^+ (\bar{\bar{\alpha}} = \min\{\beta,\bar{\alpha}\})$, такое, что при всяком $r \in (0,\bar{\bar{\alpha}})$ отображение $g_r : V^n \to V^n$ определенное формулой (52) [1], есть инъекция V^n в V^n. Лемма доказана.

[*)] Так как множества $W_k (k \in \{1,...,\bar{t}\})$ попарно не пересекаются (см. формулу (18) [1]), то здесь m — то же самое, что и в предыдущих фразах этого пункта.

Литература

1. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 9, с. 1489 — 1498.

2. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 11, с 1905 — 1915.

3. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 8, с 1330 — 1345.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
16 марта 1983 г.