УДК 517.925

Статистически правильные системы

В. М. Миллионщиков (Москва)

В настоящей работе вводится и изучается некоторый класс линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

($\|A(t)\| \leqslant a$, матрица $A(t)$ равномерно непрерывна на прямой). Системы из этого класса будем называть статистически правильными.

Всякая статистически правильная система — правильная (в смысле Ляпунова, см. [1], стр. 283—284).

С другой стороны, доказывается (см. ниже теорему 2), что для всякой системы (1) найдется статистически правильная система

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x, \tag{2}$$

где $\tilde{A}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} A(t_k + t)$ (предел равномерный на отрезках), причем таких систем много (смысл этого «много» раскрывается ниже).

Свойства статистически правильных систем (в том числе — названные выше) делают их ценным орудием при изучении общих систем вида (1). В частности, в настоящей работе с их помощью получаются некоторые результаты, относящиеся к системам с почти периодическими коэффициентами. В дальнейшем будет часто использоваться следующее

Предложение (*). *Пусть система* $\dot{x} = A(t_k + t)x$ *приводится перроновским преобразованием* $x = U_k(t)$ *и* (см. [1], стр. 261—266) *к треугольному виду* $\dot{u} = P_k(t)u$. *Тогда система* (2) *перроновским преобразованием* $x = \tilde{U}(t)$ *и приводится к треугольному виду* $\dot{u} = P_k(t)u$, *где*

$$\tilde{P}(t) = \lim_{j\to\infty} P_{k_j}(t), \quad \tilde{U}(t) = \lim_{j\to\infty} U_{k_j}(t)$$

пределы равномерные на отрезках). Кроме того, из равномерной непрерывности на прямой матрицы $A(t)$ *вытекает, что каждая матрица* $P_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots$) *равномерно непрерывна на прямой.*

Доказательство. Как известно (см. [1], стр. 263—265),

$$\|\dot{U}_k(t)\| \leqslant C \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где константа C не зависит от k и t.

Имеем

$$P_k(t) = U_k^{-1}(t)\, A(t_k + t)\, U_k(t) - U_k^{-1}(t)\, \dot{U}_k(t). \tag{3}$$

Докажем, что из равномерной непрерывности на прямой матрицы $A(t)$ вытекает, что $\dot{U}_k(t)$ непрерывна по t равномерно относительно $k = 1, 2, \ldots$ и относительно t на прямой.

В самом деле, из неравенства $\|\dot{U}_k(t)\| \leqslant C$ следует, что $U_k(t)$ непрерывна по t равномерно относительно $k = 1, 2, \ldots$ и относительно t на прямой; значит, то же верно и для $U_k^{-1}(t) = U_k(t)$. Так как, кроме того, $\|U_k^{-1}(t)\| = \|U_k(t)\| = 1$, $\|A(t)\| \leqslant a$, то и $U_k^{-1}(t)\, A(t_k + t)\, U_k(t)$ равномерно относительно всех k и t непрерывна по t. Отсюда в силу

(3) следует, что матрица $U_k^{-1}(t)\dot{U}_k(t)$ равномерно относительно всех k и t непрерывна по t (так как поддиагональные элементы этой матрицы равны соответствующим элементам матрицы $U_k^{-1}(t)\,A(t_k+t)\,U_k(t)$; матрица $P_k(t)$ — треугольная), а матрица $U_k^{-1}(t)\dot{U}_k(t)$ — кососимметричная). Значит, матрица $\dot{U}_k(t)=U_k(t)\,[U_k^{-1}(t)\,\dot{U}_k(t)]$ равномерно относительно всех k и t непрерывна по t, а из (3) вытекает, что этим же свойством обладает и матрица $P_k(t)$.

Пусть $A(t_k+t)\underset{k\to\infty}{\to}\tilde{A}(t)$ равномерно на отрезках. Так как $\|U_k(t)\|=1$, $\|\dot{U}_k(t)\|\leqslant C$, $\dot{U}_k(t)$ равномерно относительно k непрерывна по t, то по теореме Асколи (см. [2], стр. 43) из последовательности $\{t_k\}$ можно выбрать подпоследовательность (обозначим ее тоже через $\{t_k\}$), для которой последовательности $\{U_k(t)\}$ и $\{\dot{U}_k(t)\}$ сходятся равномерно на отрезках. Пусть $\tilde{U}(t)$ и $\tilde{V}(t)$ — их пределы соответственно. Имеем $\tilde{V}(t)=\dfrac{d}{dt}\tilde{U}(t)$. Перейдя к пределу в (3) (при $k\to\infty$), получаем

$$\tilde{P}(t)=\lim_{k\to\infty}P_k(t)=\tilde{U}^{-1}(t)\,\tilde{A}(t)\,\tilde{U}(t)-\tilde{U}^{-1}(t)\,\dot{\tilde{U}}(t);$$

полученная формула означает, что ортогональное преобразование $x=\tilde{U}(t)u$ приводит систему $\dot{x}=\tilde{A}(t)x$ к треугольному виду $\dot{u}=\tilde{P}(t)u$. Предложение доказано.

Пусть задана функция $f(t)$, ограниченная и равномерно непрерывная на прямой (значения $f(t)$ могут быть числами или матрицами). Через D_f обозначим динамическую систему сдвигов функции $f(t)$, заданную на множестве функций вида $\tilde{f}(t)=\lim\limits_{k\to\infty}f(t_k+t)$ (предел равномерен на отрезках) (см. [3], стр. 533—535). В силу условий, наложенных на $f(t)$, пространство R_f системы D_f — компакт (см. [3], стр. 535), а значит, на системе D_f существует инвариантная мера ([3], стр. 514, теорема 24). (Все меры, которые будут рассматриваться ниже, предполагаются нормированными.)

Определение 1. Пусть числовая функция $p(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на прямой.

Назовем λ вероятным средним функции $p(t)$, если для всякого числа $\varepsilon>0$ существует инвариантная мера μ на динамической системе D_p, такая, что если M — множество тех $\tilde{p}(t)\in R_p$, для которых

$$\lambda-\varepsilon<\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\tilde{p}(\tau)d\tau\leqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\tilde{p}(\tau)d\tau<\lambda+\varepsilon,$$

то $\mu(M)>0$.

В силу теоремы 25 и леммы (см. [3], стр. 517 и 520 соответственно), определение 1 эквивалентно следующему определению, которое будет использоваться в дальнейшем.

Определение 2. Пусть числовая функция $p(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на прямой. Назовем λ вероятным средним функции $p(t)$, если множество M тех регулярных $\tilde{p}(t)\in R_p$, для которых

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\tilde{p}(\tau)d\tau=\lambda$$

имеет $\mu_{\tilde{p}}(M)=1$, где $\mu_{\tilde{p}}$ — индивидуальная мера, соответствующая некоторой функции

$\tilde{p}(t)\in M$.

Определение 3. Пусть система (1) некоторым перроновским преобразованием приведена к треугольному виду

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= p_{11}(t)u_1 + p_{12}(t)u_2+\ldots+p_{1n}(t)u_n,\\ \dot{u}_2 &= \qquad\qquad\;\; + p_{22}(t)u_2+\ldots+p_{2n}(t)u_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{u}_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; + p_{nn}(t)u_n.\end{aligned}$$

Объединение множеств вероятных показателей функций $p_{ii}(t)$ (по всем $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) обозначим через $\Lambda_p\{U(t)\}$. Объединение множеств $\Lambda_p\{U(t)\}$ по всем перроновским преобразованиям $x=U(t)u$ обозначим через Λ_p и назовем вероятным спектром системы (1). Введем обозначения:

$$\overline{\lambda}_p=\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)d\xi,\quad \underline{\lambda}_p=\underline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)d\xi. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть* $p(t)$ *ограничена и равномерно непрерывна на прямой.*

Тогда $\overline{\lambda}_p$ *и* $\underline{\lambda}_p$ *являются вероятными средними функции* $p(t)$.

Замечание. Из доказательства леммы 1 будет видно, что $\overline{\lambda}_{\tilde{p}}$ и $\underline{\lambda}_{\tilde{p}}$ для *всякой функции* $\tilde{p}(t)\in R_p$ будут вероятными средними функции $p(t)$.

Доказательство достаточно дать для $\overline{\lambda}_p$, так как $\underline{\lambda}_p=\overline{\lambda}_{-p}$.

Искомую инвариантную меру строим так. По лемме (см. [4], подробные формулировку и доказательство см. в [6], лемма 1.8) найдется функция $q_0(t)\in R_p$, такая, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t q_0(\tau)d\tau=\overline{\lambda}_p. \tag{5}$$

Определим (неинвариантную) меру μ_1 на пространстве R_p динамической системы D_p следующим образом:

$$\mu_1(A)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad q_0\in A,\\ 0, & \text{если}\quad q_0\notin A.\end{cases} \tag{6}$$

Исходя из меры μ_1, построим инвариантную меру μ^* на динамической системе D_p так, как это делается в теореме Крылова — Боголюбова (см. [3], стр. 514—516), т. е. выбираем числовую последовательность $\{t_k\}$ так, чтобы для всякой непрерывной на R_p функции φ существовал предел

$$A\varphi=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}dt\int_{R_p}\varphi(f(q,\ t))\,\mu_1(dq); \tag{7}$$

тогда функционал $A\varphi$ задает инвариантную меру μ^* по формуле

$$A\varphi=\int_{R_p}\varphi(q)\,\mu^*(dq). \tag{8}$$

Так как функция $\varphi_0(\tilde{p})\equiv\tilde{p}(0)$ непрерывна на R_p, то из (5) — (8) следует, что

$$\int_{R_p}\varphi_0(q)\,\mu^*(dq)=\overline{\lambda}_p.$$

По эргодической теореме Биркгофа (см. [3], стр. 481 (теорема 14) и стр. 491 (теорема 16)) для почти всех (в смысле меры μ^*) функций $\tilde{p}\in R_p$ существует

$$\lambda_{\tilde{p}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{p}(\tau)d\tau = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi_0(f(\tilde{p},\ \tau))d\tau,$$

причем

$$\int_{R_p} \lambda_{\tilde{p}}\,\mu^*(d\tilde{p}) = \int_{R_p} \varphi_0(\tilde{p})\,\mu^*(d\tilde{p}) = \overline{\lambda}_p. \tag{9}$$

Так как $\lambda_{\tilde{p}} \leqslant \overline{\lambda}_p$, то из (9) следует, что $\lambda_{\tilde{p}} = \overline{\lambda}_p$ для почти всех $\tilde{p}\in R_p$ (в смысле меры μ^*). Лемма доказана.

Пусть $\tilde{x}(t)$ — обобщенное решение системы (1) (т. е. обычное, сдвиг обычного или предельное; см. [5]):

$$\tilde{x}(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t_k + t) \tag{10}$$

(предел равномерен на отрезках; $x_k(t)$ — обычные решения). (Поскольку $A(t)$ равномерно непрерывна на прямой, $\tilde{x}(t)$ является обычным решением системы (2); это легко доказать; см. [6], лемма 2.1).

Пусть $\overline{\lambda}(\tilde{x})$ — максимальный показатель решения $\tilde{x}(t)$ (см. [6], определение 1.4; а также [7]), т. е.

$$\overline{\lambda}(\tilde{x}) = \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\,\frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|\tilde{x}(t)\|}{\|\tilde{x}(\tau)\|}, \tag{11}$$

а $\underline{\lambda}(\tilde{x})$ — его минимальный показатель (см. там же), т. е.

$$\underline{\lambda}(\tilde{x}) = \underline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\,\frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|\tilde{x}(t)\|}{\|\tilde{x}(\tau)\|}. \tag{12}$$

Теорема 1. *Для всякого обобщенного решения* $\tilde{x}(t)$ *системы* (1)

$$\overline{\lambda}(\tilde{x}) \in \Lambda_p,\quad \underline{\lambda}(\tilde{x}) \in \Lambda_p,$$

Доказательство. Приведем систему $\dot{x} = A(t_k + t)x$ к треугольному виду $\dot{u} = P_k(t)u$ перроновским преобразованием $x = U_k(t)u$, причем при построении $U_k(t)$ в качестве первого вектора (см. [1], стр. 262) возьмем решение $x_k(t_k+t)$ системы $\dot{x} = A(t_k+t)x$. Тогда $\frac{d}{dt}\ln\|x_k(t_k+t)\| = p_{11}^{(k)}(t)$, где $p_{11}^{(k)}(t)$ — первый диагональный элемент матрицы $P_k(t)$.

Тогда система (2) перроновским преобразованием $x = \tilde{U}(t)u$ приводится к виду $\dot{u} = \tilde{P}(t)u$, где $\tilde{P}(t) = \lim_{j\to\infty} P_{k_j}(t)$, $\hat{U}(t) = \lim_{j\to\infty} U_{k_j}(t)$ (пределы равномерные на отрезках) (см. предложение *).

Система $\dot{u} = \tilde{P}(t)u$ имеет решение

$$\tilde{u}(t) = \left\{\exp\int_0^t \tilde{p}_{11}(\tau)d\tau,\ 0,\ \ldots,\ 0\right\}$$

($\tilde{p}_{11}(t)$ — первый диагональный элемент матрицы $\tilde{P}(t)$), причем $\tilde{x}(t) = \tilde{U}(t)\tilde{u}(t)$, откуда следует, что

$$\frac{d}{dt}\ln\|\tilde{x}(t)\| = \frac{d}{dt}\ln\|\tilde{u}(t)\| = \tilde{p}_{11}(t).$$

В силу (11), (12)

$$\overline{\lambda}(\tilde{x}) \in \overline{\lambda}_{\tilde{p}_{11}},\quad \underline{\lambda}(\tilde{x}) \in \underline{\lambda}_{\tilde{p}_{11}}.$$

В силу леммы 1 (см. также замечание к ней) и определения Λ_p, теорема доказана.

Следствие. *Для всякой системы* (1)

$$\Omega_0 \in \Lambda_p, \quad \omega_0 \in \Lambda_p,$$

где

$$\Omega_0 = \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau} \ln \| X(t)\, X^{-1}(\tau) \|$$

— верхний особый показатель системы,

$$\omega_0 = \overline{\lim_{t-\tau\to-\infty}} \frac{1}{t-\tau} \ln \| X(t)\, X^{-1}(\tau) \|$$

— нижний особый показатель системы.

Доказательство. В [61 доказано (см. в [61 теорему 1.10), что существует обобщенное решение $\tilde{x}_1(t)$ системы (1), для которого $\overline{\lambda}(\tilde{x}_1) = \Omega_0$ и существует обобщенное решение $\tilde{x}_2(t)$ системы (1), для которого $\underline{\lambda}(\tilde{x}_2) = \omega_0$; доказательство закончено.

Определение 4. Систему 1 назовем статистически правильной, если существует перроновское преобразование, приводящее ее к треугольному виду

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= p_{11}(t)u_1 + p_{12}(t)u_2 + \ldots + p_{1n}(t)u_n \\
\dot{u}_2 &= \qquad\qquad\;\; + p_{22}(t)u_2 + \ldots + p_{2n}(t)u_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{u}_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + p_{nn}(t)u_n,
\end{aligned}$$

удовлетворяющему следующим условиям:

1) существуют

$$\lambda_i = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{ii}(\tau)d\tau \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

2) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое H, что если $h \geqslant H$, то множество $S_{h,\,\varepsilon}$ тех τ, для которых не выполнено хоть одно из неравенств

$$\left| \frac{1}{h} \int_\tau^{t+h} p_{ii}(\xi)d\xi - \lambda_i \right| < \varepsilon \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{13}$$

имеет относительную меру

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\operatorname{mes} S_{h,\,\varepsilon} \bigcap [0,\ T]}{T} < \varepsilon. \tag{14}$$

Лемма 2. *Пусть* $f(t)$ *и* $g(t)$ *— две функции, ограниченные и равномерно непрерывные на прямой (значения* $f(t)$ *и* $g(t)$ *могут быть числами или векторами). Пусть* $\check{\mu}$ *— инвариантная мера на динамической системе* D_f. *Тогда на динамической системе* $D_{(f,\,g)}$ *существует инвариантная мера* μ, *обладающая свойством: для всякого множества* $A \subseteq R_f$

$$\mu(\widehat{A}) = \check{\mu}(A),$$

где $\widehat{A}$ *— множество всех тех* $(\tilde{f},\ \tilde{g}) \in R_{(f,\,g)}$, *для которых* $\tilde{f} \in A$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — σ-алгебра множеств $A \subseteq R_f$, измеримых в смысле меры μ. Тогда совокупность множеств $\widehat{A} \subseteq R_{(f,\,g)}$ образует σ-алгебру $\widehat{\mathfrak{U}}$.

Положив, по определению,

$$\mu(\widehat{A}) = \check{\mu}(A) \quad (\widehat{A} \in \widehat{\mathfrak{U}}),$$

получаем меру на $D_{(f,\,g)}$, которая, очевидно, инвариантна.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *перроновским преобразованием*

$$x = U(t)u \tag{15}$$

приводится к треугольному виду

$$\dot{u} = P(t)u. \tag{16}$$

В динамической системе D_P *почти всякая точка* $\tilde{P}(t)$ *(в смысле любой инвариантной меры на* D_P*) такова, что система* $\dot{u} = \tilde{P}(t)u$ *, а значит, и система* (2) (см. предложение *) *— статистически правильная.*

Пусть $\lambda \in \Lambda_p$*. Тогда найдется перроновское преобразование* (15), *приводящее систему* (1) *к треугольному виду* (16), *такому, что почти всякая точка* $\tilde{P}(t) \in R_P$ *(в смысле некоторой инвариантной меры на* D_P*) обладает свойством: система* $\dot{u} = \tilde{P}(t)u$ *, а значит, и система* (2) (см. предложение *)*— статистически правильная, причем* λ *— один из ее характеристических показателей.*

Доказательство. Фиксируем произвольную инвариантную меру μ на D_P. Функции $\varphi_i(\tilde{P}) \equiv \tilde{p}_{ii}(0)$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), очевидно, непрерывны на R_P. По эргодической теореме Биркгофа, для почти всякой точки $\tilde{P} \in R_P$ (в смысле меры μ) существуют

$$\lambda_i(\tilde{P}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_i[f(\tilde{P},\ \tau)]d\tau = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{p}_{ii}(\tau)d\tau \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Рассмотрим при каждом $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ последовательность функций

$$f_i^{(k)}(\tilde{P}) \equiv \frac{1}{k}\int_0^k \varphi_i[f(\tilde{P},\ \tau)]d\tau = \frac{1}{k}\int_0^k \tilde{p}_{ii}(\tau)d\tau \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как при каждом $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$f_i^{(k)}(\tilde{P}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_i(\tilde{P})$$

на множестве M, $\mu(M) = 1$, то по теореме Лебега (см. [8], стр. 106—107) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$, такое, что при $k \geqslant N$

$$\mu\ (E_{k,\,\varepsilon} : \text{хоть }\underset{(1\leqslant i\leqslant n)}{\text{для одного}}\ i\ \ |f_i^{(k)}(\tilde{P}) - \lambda_i(\tilde{P})| \geqslant \varepsilon) < \varepsilon. \tag{17}$$

Пусть $\chi_A(\tilde{P})$ — характеристическая функция множества A, а $M_{k,\,\varepsilon}$ — множество тех $\tilde{P}(t) \in R_P$, для которых существует

$$\psi_{k,\,\varepsilon}(\tilde{P}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \chi_{E_{k,\,\varepsilon}}[f(\tilde{P},\ \tau)]d\tau.$$

По эргодической теореме Биркгофа, $\mu(M_{k,\,\varepsilon}) = 1$ и

$$\int_{R_P} \psi_{k,\,\varepsilon}(\tilde{P})\mu(d\tilde{P}) = \int_{R_P} \chi_{E_{k,\,\varepsilon}}(\tilde{P})\mu(d\tilde{P}) = \mu(E_{k,\,\varepsilon}) < \varepsilon$$

при $k \geqslant N(\varepsilon)$ (в силу (17)). Пусть $L_{k,\,\varepsilon}$ — множество тех $\tilde{P} \in M_{k,\,\varepsilon}$, для которых $\psi_{k,\,\varepsilon}(\tilde{P}) \geqslant \sqrt{\varepsilon}$. Тогда при $k \geqslant N(\varepsilon)$

$$\mu(L_{k,\,\varepsilon}) < \sqrt{\varepsilon}.$$

Положим $\varepsilon_s = \dfrac{1}{s^6}$ ($s = 1,\ 2,\ \ldots$) и введем обозначения: $N_s = \max\,(s,\ N(\varepsilon_s))$,

$$W = M \setminus \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{s=m}^{\infty} \bigcup_{k=N_s}^{\infty} L_{k,\,\varepsilon_s} \right).$$

Так как ряд $(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_3} + \ldots) + (\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_3} + \ldots) + (\sqrt{\varepsilon_3} + \ldots) = \sqrt{\varepsilon_1} + 2\sqrt{\varepsilon_2} + 3\sqrt{\varepsilon_3} + \ldots$ сходится, то $\mu(W) = 1$.

Пусть $\tilde{P}^{(0)} \in W$. Тогда система $\dot{u} = \tilde{P}^{(0)}(t)u$ — статистически правильная. Докажем это. Пусть $S_{k,\,\varepsilon}$ — множество тех τ, для которых не выполнено хоть одно из неравенств

$$\left|\frac{1}{k}\int\limits_{\tau}^{\tau+k} \tilde{p}_{ii}^{(0)}(\xi)d\xi - \lambda_i(\tilde{P}^{(0)})\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{k}\int\limits_{0}^{k} \varphi_i[f(f(\tilde{P}^{(0)},\ \tau),\ \xi)]d\xi - \lambda_i(\tilde{P}^{(0)})\right| < \varepsilon \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Сопоставляя определения $S_{k,\,\varepsilon}$ и $E_{k,\,\varepsilon}$, видим, что утверждение $\tau \in S_{k,\,\varepsilon}$ эквивалентно утверждению $f(\tilde{P}^{(0)},\ \tau) \in E_{k,\,\varepsilon}$, значит,

$$\chi_{E_{k,\,\varepsilon}}[f(\tilde{P}^{(0)},\ \tau)] = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ \tau \in S_{k,\,\varepsilon}, \\ 0 \ \text{ при остальных } \ \tau. \end{cases} \tag{18}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $\tilde{P}^{(0)} \in W$, то найдется m, такое, что $\tilde{P}^{(0)} \notin L_{k,\,\varepsilon_s}$ при $k \geqslant N_s$ для всех $s \geqslant m$. Возьмем $s \geqslant m$ такое, что $\varepsilon_s < \varepsilon$. Тогда при $k \geqslant N_s$

$$\sqrt{\varepsilon} > \sqrt{\varepsilon_s} > \psi_{k,\,\varepsilon_s}(\tilde{P}^{(0)}) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\chi_{E_{k,\,\varepsilon_s}}[f(\tilde{P}^{(0)},\ \tau)]d\tau =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\operatorname{mes} S_{k,\,\varepsilon_s}\bigcap[0,\ t] \geqslant \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\operatorname{mes} S_{k,\,\varepsilon}\bigcap[0,\ t]$$

(второе равенство верно в силу (18), а последнее неравенство следует из очевидного включения $S_{k,\,\varepsilon_s} \supseteq S_{k,\,\varepsilon}$ ($\varepsilon_s < \varepsilon$)).

Здесь рассматривались лишь целые $h = k$, но это — неограничение, как показывает простое рассуждение, использующее ограниченность $P(t)$ (см., например, [3], стр. 483).

Пусть теперь $\lambda \in \Lambda_p$. Возьмем перроновское преобразование (15), приводящее систему (1) к треугольному виду (16), такому, что λ — вероятное среднее функции $p_{jj}(t)$ ($p_{ii}(t)$ — i-й диагональный элемент матрицы $P(t)$). В качестве инвариантной меры μ на D_P возьмем меру, вводимую следующим образом. D_P можно рассматривать как $D_{(f,\,g)}$, где $f(t) \equiv p_{ji}(t)$, а $g(t) \equiv \{p_{11}(t),\ \ldots,\ p_{nn}(t)\}$ (вектор, состоящий из всех элементов матрицы $P(t)$, кроме элемента $p_{jj}(t)$, выписанных в некотором порядке, одном и том же для всех t). Пусть $\check{\mu}$ — инвариантная мера на $D_{p_{jj}}$, такая, что почти все (в смысле меры $\check{\mu}$) функции $\tilde{p}_{jj}(t) \in R_{p_{jj}}$ имеют среднее, равное λ. Тогда рассмотрим на системе $D_P = D_{(f,\,g)}$ меру μ, о которой говорится в лемме 2, и для этой меры повторим (в точности) доказательство первого утверждения теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Введем еще одно понятие, тесно связанное (как будет видно из теоремы 3) с понятием статистически правильной системы.

Определение 5. Систему (1) назовем статистически почти приводимой, если для всякого $\eta > 0$ существует ляпуновское преобразование (см. [1], стр. 245) $x = L_\eta(t)\xi$, приводящее систему (1) к виду

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\xi + B_\eta(t)\xi + P_\eta(t)\xi, \tag{19}$$

где $\lambda_i = \text{const}$ — характеристические показатели системы, $P_\eta(t)$ — треугольная матрица с нулями на диагонали,

$$\| P_\eta(t) \| < \eta, \tag{19'}$$

а

$$B_\eta(t) = \begin{pmatrix} b_1^{(\eta)}(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n^{(\eta)}(t) \end{pmatrix},$$

причем

1) $\| B_\eta(t) \| \leqslant C$, где C не зависит от t и от η;

2) множество S тех τ, при которых $\| B_\eta(t) \| \geqslant \eta$, имеет относительную меру на полупрямой

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \operatorname{mes} S \bigcap [0,\ t] < \eta.$$

Замечание. Легко видеть, что определение 5 перейдет в эквивалентное, если второе условие на $B_\eta(t)$ заменить следующим:

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \| B_\eta(\tau) \| \, d\tau < \eta. \tag{20}$$

Терминологическое замечание. Статистически правильная система — правильная, но не наоборот. Статистически почти приводимая система может не быть почти приводимой.

Теорема 3. *Статистически правильная система статистически почти приводима.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Применим к системе (1) последовательно следующие преобразования:

1) перроновское преобразование, приводящее систему к треугольному виду, удовлетворяющему условиям 1), 2) определения 4;

2) H-преобразование (см. [1], стр. 250);

3) β- преобразование (см. [1], стр. 248).

Если H взять достаточно большим, а затем β — достаточно малым, то система приведется к виду (19), удовлетворяющему условиям определения 5. Теорема доказана.

Теорема 4. *Наибольший характеристический показатель статистически правильной системы «прочен вверх», наименьший — «прочен вниз».*

(Относительно употребляемых здесь терминов см. [1], стр. 162, определение 13.1.1).

Доказательство приведем для наибольшего показателя (для наименьшего — аналогично).

Пусть $\lambda' = \max(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — наибольший показатель статистически правильной системы (1), и пусть задано $\varepsilon > 0$.

Зафиксируем произвольное $\eta > 0$. (Позже мы выберем нужное нам значение η). Приведем систему (1) ляпуновским преобразованием $x = L_\eta(t)\xi$ к виду (19), удовлетворяющему условиям определения 5 (это возможно, согласно теореме 3), причем (см. замечание к определению 5) можно считать, что выполнено условие (20). Возьмем теперь $\delta(\eta) > 0$ таким, чтобы

$$\sup_t \| L_\eta(t) \| \cdot \| L_\eta^{-1}(t) \| \cdot \delta(\eta) < \eta. \tag{21}$$

Диагональная система

$$\dot{\xi}_i = \lambda_i \xi_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{22}$$

имеет фундаментальную матрицу

$$X(t) = \operatorname{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ \mathrm{e}^{\lambda_n t}],$$

для которой при $t \geqslant s$

$$\| X(t) X^{-1}(s) \| \leqslant \mathrm{e}^{\lambda'(t-s)}. \tag{23}$$

Пусть дана система

$$\dot{y} = A(t)y + \varphi(y,\ t), \tag{24}$$

Причем $\| \varphi(y,\ t) \| \leqslant g(t) \| y \|$,

$$\overline{\lim_{t\to t+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t g(\tau)d\tau < \delta(\eta).$$

Проделаем в системе (24) также преобразование $y = L_\eta(t)\xi$. Получим систему

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\xi + f(\xi,\ t), \tag{25}$$

причем

$$f(\xi,\ t) = B_\eta(t)\xi + P_\eta(t)\xi + L_\eta^{-1}(t)\,\varphi(L_\eta(t)\xi,\ t),$$

откуда, в силу (19), (20), (21), следует, что

$$\| f(\xi,\ t) \| \leqslant h(t) \| \xi \|, \tag{26}$$

причем

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t h(\tau)d\tau < 3\eta. \tag{27}$$

Широко известное рассуждение, использующее интегральное неравенство Гроноулла (см., например, [1], стр. 101, теорема 7.1.1) дает теперь: всякое решение $y(t)$ системы (24) удовлетворяет неравенству

$$\| y(t) \| \leqslant \| y(0) \| \exp\left\{\left(\lambda' + \frac{1}{t}\int_0^t h(\tau)d\tau\right)t\right\},$$

и потому, в силу (27), всякое решение системы (24) имеет характеристический показатель, не превосходящий $\lambda' + 3\eta < \lambda' + \varepsilon$, если $\eta < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь систему (1) в случае, когда матрица $A(t)$ — почти периодическая.

Теорема 5. *Пусть* $A(t)$ — *почти периодическая матрица, и пусть система* (1) — *статистически правильная. Тогда наибольший характеристический показатель системы* (1) *равен* Ω_0*, а наименьший — равен* ω_0.

Доказательство теоремы вытекает из теоремы 4 и теоремы Б. Ф. Былова ([1], стр. 195, следствие 14.1.1).

Теорема 6. *Пусть* $\dot{x} = A(t)x$ — *система второго порядка с почти периодической матрицей* $A(t)$*. Тогда*

1) ее вероятный спектр Λ_p *состоит из двух чисел* Ω_0, ω_0 (*которые могут совпадать*);

2) *если перроновским преобразованием привести систему к треугольному виду*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= p(t)u + r(t)v \\ \dot{v} &= \phantom{p(t)u + {}} q(t)v, \end{aligned}$$

то

а) *либо* $\overline{\lambda}_p = \underline{\lambda}_p$, $\overline{\lambda}_q = \underline{\lambda}_q$ (*тогда система почти приводима* (см. [1], стр. 272—273),

б) *либо* $\overline{\lambda}_p = \underline{\lambda}_q$, $\overline{\lambda}_p = \underline{\lambda}_q$ (*неизвестно, существует ли система, для которой реализуется случай* б).

Доказательство. 1) Пусть $\lambda \in \Lambda_p$. По теореме 2 найдется статистически правильная система (2), у которой один из характеристических показателей равен λ. Пусть другой характеристический показатель у нее равен λ_1. По теореме 5, если $\lambda \leqslant \lambda_1$, то $\lambda = \omega_0$, а если $\lambda \geqslant \lambda_1$, то $\lambda = \Omega_0$.

2) По лемме 1, $\overline{\lambda}_p$, $\underline{\lambda}_p$, $\overline{\lambda}_q$, $\underline{\lambda}_q \in \Lambda_p$. По уже доказанному утверждению 1) теоремы 6, Λ_p состоит из Ω_0, ω_0. Поэтому

$$\overline{\lambda}_q = \begin{cases} \text{либо } \omega_0, \\ \text{либо } \Omega_0. \end{cases}$$

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Пусть $\overline{\lambda}_q = \omega_0$. Тогда и $\underline{\lambda}_q = \omega_0$. Если при этом $\overline{\lambda}_p = \underline{\lambda}_p$, то все доказано; если $\overline{\lambda}_p \neq \underline{\lambda}_p$, то $\underline{\lambda}_p = \omega_0$. По теореме 2 найдется статистически правильная система (2), имеющая треугольный вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{p}(t)u + \tilde{r}(t)v, \\ \dot{v} &= \qquad\quad \tilde{q}(t)v, \end{aligned}$$

причем

$$\lambda_{\tilde{p}} = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{p}(\tau)d\tau = \omega_0, \quad \lambda_{\tilde{q}} = \omega_0$$

(так как $\overline{\lambda}_q = \underline{\lambda}_q = \omega_0$). Но тогда, по теореме 5, $\omega_0 = \Omega_0$; значит, $\underline{\lambda}_p = \overline{\lambda}_p$ $(=\omega_0)$.

Пусть теперь $\overline{\lambda}_q = \Omega_0$. Если при этом $\underline{\lambda}_q = \Omega_0$, то рассуждение такое же, как в случае, когда $\overline{\lambda}_q = \omega_0$. Если $\underline{\lambda}_q \neq \Omega_0$, то $\underline{\lambda}_q = \omega_0$.

Если при этом $\overline{\lambda}_p = \omega_0$, то рассуждение опять такое же, как в случае, когда $\overline{\lambda}_q = \omega_0$. Если, $\overline{\lambda}_p \neq \omega_0$ то $\overline{\lambda}_p = \Omega_0$. При этом либо $\underline{\lambda}_p = \Omega_0$, и тогда рассуждение такое же, как в случае, когда $\overline{\lambda}_q = \omega_0$, либо $\underline{\lambda}_p = \omega_0$, и все доказано.

(Поступила в редакцию 20/III 1967 г.)

Литература

1. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, Теория показателей Ляпунова, Москва, изд-во «Наука», 1966.
2. N. Bourbaki, Topologie générale, ch. 10, Espaces fonctionnels, Paris, 1949.
3. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1949
4. В. М. Миллионщиков, Об устойчивости характеристических показателей предельных решений линейных систем, ДАН СССР, **166, № 1** (1966), 34—37.
5. В. М. Миллионщиков, Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **161, № 1** (1965), 43—44.
6. В. М. Миллионщиков, К спектральной теории неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений, Канд. диссертация, МГУ, 1966.
7. В. М. Миллионщиков, Структура фундаментальных матриц R-систем с почти периодическими коэффициентами, ДАН СССР, **171**, № **2** (1966), 288—291.
8. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Москва, Гостехиздат, 1957.