УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. XIII

ВВЕДЕНИЕ

Пусть выполнены условия п. 1 введения и пп. 0—3 §1[1]. Согласно предложению [1], формула (52) [1] при всяком $r \in (0, \bar{s})$, где $\bar{s} \in R_*^+$ определено формулой (49) [1], определяет отображение $g_r : V^n \to V^n$. В этой статье изучаются некоторые свойства этого отображения.

§ 1

1. Лемма 1. *При всяком* $r \in (0, \bar{s})$ *отображение* $g_r : V^n \to V^n$, *определенное формулой (52) [1] ; принадлежит классу* C^1.

Доказательство. Пусть $r \in (0, \bar{s})$. Пусть*) $z \in W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}$ при некотором $m \in \{1, ..., \bar{t}\}$. Тогда

$$y \underset{def}{=} h_{m-1} z \in h_{m-1}(W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}) = (h_{m-1} W_{m-1}) \setminus (h_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}), \tag{1}$$

т. е. y удовлетворяет условию (59) и, следовательно (см. в [1] текст, содержащий формулы (59) — (63)),

$$\hat{g}_{m,r} y = \hat{f}_m y. \tag{2}$$

Имеем**)

$$g_r z \underset{1.52}{=} h_m^{-1} \hat{g}_{m,r} h_{m-1} z \underset{(1)}{=} h_m^{-1} \hat{g}_{m,r} y \underset{(2)}{=} h_m^{-1} \hat{f}_m y \underset{(1.28)}{=} f h_{m-1}^{-1} y \underset{(1)}{=} fz.$$

Только что доказанное означает, что при всяком $r \in (0, \bar{s})$ сужения отображений g_r и f на множество $\bigcup_{m=1}^{\bar{t}} (W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)})$ совпадают. Непосредственно из формулы (52) [1] следует, что при всяком $r \in (0, \bar{s})$ сужения отображений g_r и f на множество $V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}$ также совпадают. Следовательно, при всяком $r \in (0, \bar{s})$ совпадают сужения отображений g_r и f на множество

$$\left[\bigcup_{m=1}^{\bar{t}} (W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}) \right] \cup \left[V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1} \right] = V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}^{(1)}. \tag{3}$$

Поясним, что равенство (3) вытекает из того, что $W_k^{(1)} \underset{(1.48)}{\subset} W_k \subset V^n (k \in \{0, ..., \bar{t}\}), W_i \cap W_j = \varnothing$ при всяких $i \in \{0, ..., \bar{t}\}$, $j \in \{0, ..., \bar{t}\}$, таких, что $i \neq j$.

---

*) Окрестности $W_k (k \in \{0, ..., \bar{t}\})$ определены в [1] фразой, содержащей формулы (17)-(19). Окрестности $W_k^{(1)} (k \in \{0, ..., \bar{t}\})$ определены в [1] фразой, содержащей формулу (47).

**) Ссылка на формулу (1. *N*) есть краткая запись ссылки на формулу *(N)* статьи [1].

В п. 10 § 1 [1] доказано, что при всяком $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ множество $W_k^{(1)}$ замкнуто в V^n. Следовательно, множество $V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}^{(1)}$ открыто в V^n . При всяком $r \in (0,\bar{s})$ сужение отображения g_r на это открытое множество принадлежит классу C^1, так как оно совпадает с сужением на это множество отображения f, а отображение $f: V^n \to V^n$ принадлежит классу C^1, поскольку $f \in S^u$ (см. п. 1 §1 [1] и определение множества S_j^u [1, введение пп. 4,5]). Далее, при всяком $r \in (0,\bar{s})$ при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ сужение отображения g_r на открытое множество W_{m-1} принадлежит классу C^1 (в силу теоремы о непрерывной дифференцируемости произведения (композиции) непрерывно дифференцируемых отображений), так как, согласно формуле (52) [1], оно равно $h_m^{-1}\hat{g}_{m,r}h_{m-1}|w_{m-1}$, отображения $h_m^{-1}: h_m V_m \to V_m$, $h_{m-1}: V_{m-1} \to h_{m-1}V_{m-1}$ принадлежит классу C^1 (даже C^3, поскольку h_m и h_{m-1} — координатные отображения многообразия V^n, принадлежащего, по условию, классу C^3), а отображение $\hat{g}_{m,r}: h_{m-1}W_{m-1} \to R^n$, определенное формулой (40) [1], отображает открытое множество» $h_{m-1}W_{m-1}$ в открытое множество $h_m V_m$ (см. формулу (53) [1]) и принадлежит классу C^1, поскольку:

а) отображение $\hat{f}_m \underset{(1.28)}{=} h_m f h_{m-1}^{-1}|_{h_{m-1}W_{m-1}}: h_{m-1}W_{m-1} \to R^n$ принадлежит классу C^1 (так как отображение $f: V^n \to V^n$ принадлежит классу C^1, а отображения $h_m: V_m \to h_m V_m$, $h_{m-1}^{-1}: h_{m-1}V_{m-1} \to V_{m-1}$ принадлежат классу C^3;.

б) функция $\sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(\cdot)): h_{m-1}V_{m-1} \to R$ принадлежит классу C^1 как суперпозиция функции $\sigma((\cdot)^{1/2})R^+ \to R$, принадлежащей классу C^1 (эта следует из формулы (41) [1], определяющей эту функцию), и функции $r^{-2}\hat{\rho}^2_{m-1}(\cdot): h_{m-1}V_{m-1} \to R$, определенной формулой (42) [1] и принадлежащей классу C^1 (так как функция $\rho^2(\cdot, f^{m-1}x): V_{m-1} \to R$ (см. фразу, содержащую формулу (9) [1]) и отображение $h_{m-1}^{-1}: h_{m-1}V_{m-1} \to V_{m-1}$ принадлежит классу C^1);

в) отображение $\hat{Z}_m —\hat{d}(\hat{f}_m)_0: R^n \to R^n$ принадлежит классу C^∞, поскольку оно линейно.

Открытые множества $V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}^{(1)}$, $W_{m-1}(m \in \{1,...,\hat{t}\})$ образуют покрытие многообразия V^n. Как доказано в этом пункте, при всяком $r \in (0,\bar{s})$ сужение отображения $g_r: V^n \to V^n$ на любое из этих множеств принадлежит классу C^1. Следовательно, при всяком $r \in (0,\bar{s})$ отображение $g_r: V^n \to V^n$, определенное формулой (52) [1], принадлежит классу C^1. Лемма 1 доказана.

2. Вычислим производную отображения $g_r: V^n \to V^n$

В п. 1 доказано (см. фразу, содержащую формулу (3), и третью после нее фразу), что при всяком $r \in (0,\bar{s})$ сужения отображений g_r и f на открытое множество $V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}^{(1)}$ совпадают. Следовательно,

$$d(g_r)_z = df_z \tag{4}$$

при всяком $r \in (0,\bar{s})$ при всяком $z \in V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}^{(1)}$; следовательно, равенство (4) выполнено при всяком $r \in (0,\bar{s})$ при всяком

$$z \in V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1} \underset{(1.48)}{\subset} V^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\bar{t}} W_{m-1}^{(1)}. \qquad (5)$$

Так как при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ множество W_{m-1} открыто в V^n, то из формулы (52) [1] в силу теоремы о производной произведения (композиции) отображений, при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $z \in W_{m-1}$ следует равенство

$$d(g_r)_z = d(h_m^{-1})_{\hat{g}_{m,r} h_{m-1} z}\, d(\hat{g}_{m,r})_{h_{m-1} z}\, d(h_{m-1})_z. \qquad (6)$$

При всяких $r \in R_*^+$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $y \in h_{m-1} W_{m-1} \subset R^n$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \hat{d}(\hat{g}_{m,r})_y &\underset{(1.40)}{=} \hat{d}\left\{\hat{f}_m + \sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(\cdot))\left[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right]\right\}_y = \\ &= \hat{d}(\hat{f}_m)_y + \sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y))\left[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right] + \\ &+ \left\{\hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)}\left[r^{-1}\hat{d}(\hat{\rho}_{m-1})_y\right]\right\} - \left[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right] y. \end{aligned} \qquad (7)$$

Пояснение к формуле (7). Для произвольного дифференцируемого в точке $y \in R^k$ отображения*) $g : U \to R^l$ (где $U \subset R^k$ — окрестность точки y в пространстве R^k; $k \in N$, $l \in N$ вместо R^l пишем иногда $\mathbf{R}$) полагаем по определению

$$\hat{d}g_y \underset{def}{=} \tau_{gy}^{[l]} dg_y (\tau_y^{[k]})^{-1} : R^k \to R^l, \qquad (8)$$

где $dg_y : \hat{\pi}_k^{-1}(y) \to \hat{\pi}_l^{-1}(gy)$ — производная отображения $g : U \to R^l$ в точке $y \in U$ (R^k и R^l рассматриваются здесь как дифференцируемые многообразия; смысл обозначений $\hat{\pi}_m$, $\tau_y^{[m]}$ (при всяком $m \in N$) разъяснен в п. 6[1]). Третье слагаемое в правой части последнего равенства цепочки (7) следует понимать так. Линейное отображение $\hat{d}(\hat{\rho}_{m-1})_y : R^n \to R^1$, умноженное на число r^{-1}, умножается на линейное отображение $\hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)} : R^1 \to R^1$; получается линейное отображение

$$\mathfrak{T} \underset{def}{=} \hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)}\left[r^{-1}\hat{d}(\hat{\rho}_{m-1})_y\right] : R^n \to R^1.$$

Третье слагаемое правой части последнего равенства цепочки (7) есть линейное отображение $R^n \to R^n$, которое всякому вектору $a \in R^n$ ставит в соответствие произведение $(\mathfrak{T}\mathfrak{a})\left[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right] y$ вектора $\left[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right] y$ на число $\mathfrak{T}\mathfrak{a}$. При $y = 0$ это слагаемое равно нулю, так как $\left[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right] 0 = 0$ (потому что $\hat{Z}_m$ и $\hat{d}(\hat{f}_m)_0$ — линейные отображения). Пояснение к формуле (7) закончено.

3. Вычислим значения отображения g_r и его производной в точках $f^k x (k \in \{0,...,\bar{t}-1\})$

Лемма 2. *При всяких* $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ *имеют место равенства* $g_r f^{m-1} x = f^m x$, $d(g_r)_{f^{m-1}x} = Z_m$

*) Значение этого отображения в точке y может обозначаться не только через gy, но и через $g(y)$ (например, для $g = \hat{\rho}_{m-1}$ пишется $\hat{\rho}_{m-1}(y)$; в формуле (8) во втором случае пишем $g(y)$ вместо gy).

Доказательство. Так как $f^{m-1}x \in W_{m-1} \subset V_{m-1}$ при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ (см. в [1] фразу, содержащую формулу (17)), то при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ имеем

$$\hat{g}_{m,r} h_{m-1} f^{m-1} x \underset{(1.9)}{=} \hat{g}_{m,r} 0 \underset{(1.40)}{=} \hat{f}_m 0 \underset{(1.28)}{=} h_m f h_{m-1}^{-1} 0 \underset{(1.9)}{=} h_m f f^{m-1} x = h_m f^m x \underset{(1.9)}{=} 0, \tag{9}$$

$$g_r f^{m-1} x \underset{(1.52)}{=} h_m^{-1} \hat{g}_{m,r} h_{m-1} f^{m-1} x \underset{(9)}{=} h_m^{-1} 0 \underset{(1.9)}{=} f^m x.. \tag{10}$$

При всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, учитывая, что $0 \underset{(1.9)}{=} h_{m-1} f^{m-1} x \in h_{m-1} W_{m-1}$, имеем

$$\hat{d}(\hat{g}_{m,r})_0 \underset{(7)}{=} \hat{d}(\hat{f}_m)_0 + \sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(0))\left[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right] \tag{11}$$

(третье слагаемое в правой части последнего равенства цепочки (7) в данном случае (т. е. при $y = 0$*)* равно нулю, как отмечено в конце п. 2).

Далее, при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ имеем: $\sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(0)) \underset{(1.42)}{=} \sigma(0) \underset{(1.41)}{=} 1$; следовательно, правая часть равенства (11) при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ равна $\hat{d}(\hat{f}_m)_0 + \left[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right] = \hat{Z}_m$. Поэтому при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ из равенства (11) следует равенство

$$\hat{d}(\hat{g}_{m,r})_0 = \hat{Z}_m, \tag{12}$$

из которого следует

$$\hat{d}(\hat{g}_{m,r})_0 \overset{(8),(9)}{\underset{(12)}{=}} (\tau_0^{[n]})^{-1} \hat{Z}_m \tau_0^{[n]} \underset{(1.25)}{=} Q_m. \tag{13}$$

При всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ из формулы (6), положив в ней $z = f^{m-1}x$ (тогда $h_{m-1}z = h_{m-1}f^{m-1}x \underset{(1.9)}{=} 0$) и подставив в нее равенства (9) и (13), получаем формулу

$$d(g_r)_{f^{m-1}x} = d(h_m^{-1}) Q_m d(h_{m-1})_{f^{m-1}x} \overset{(1.9)}{\underset{(1.23)}{=}} Z_m. \tag{14}$$

Подведем итог проделанных вычислений. Мы доказали, что при всяких $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ имеют место равенства

$$g_r f^{m-1} x \underset{(10)}{=} f^m x. \tag{15}$$

$$d(g_r)_{f^{m-1}x} \underset{(14)}{=} Z_m. \tag{16}$$

Лемма 2 доказана.

4. Лемма 3. *Имеет место соотношение*

$$\sup_{z \in V^n} \rho(g_r z, fz) \underset{r \to 0}{\to} 0; \tag{17}$$

существует функция $\chi(\cdot):(0,\bar{s}) \to R^+$*, такая, что* $\chi(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$*, и такая, что для всяких* $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $z \in W_{m-1}$ *найдется путь* $\upsilon(r,z) \in G(fz, g_r z)$*, лежащий в множестве*

$$K_m \underset{def}{=} h_m^{-1} \overline{S_q^c} \underset{(1.14)}{\subset} V_m \tag{18}$$

и удовлетворяющий неравенству $s(\upsilon(r,z)) \leqslant \chi(r)$

Доказательство. Пусть $r \in (0,\bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$. Для всякого $z \in W_{m-1} \underset{(1.17)}{\subset} V_{m-1}$, такого, что

$$\rho(z, f^{m-1}x) \geqslant r, \tag{19}$$

имеем

$$y \underset{def}{=} h_{m-1} z \in h_{m-1} W_{m-1}, \tag{20}$$

$$\widehat{\rho}_{m-1}(y) \underset{(1.42)}{=} \rho(h_{m-1}^{-1} y, f^{m-1} x) \underset{(20)}{=} \rho(z, f^{m-1} x) \underset{(19)}{\geqslant} r$$

Откуда $\sigma(r^{-1} \widehat{\rho}_{m-1}(y)) \underset{(1.41)}{=} 0$ и поэтому

$$\widehat{g}_{m,r} \underset{(1.40)}{=} \widehat{f}_m y. \tag{21}$$

Для всякого $z \in W_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству (19), имеем

$$g_r z \underset{(1.52)}{=} h_m^{-1} \widehat{g}_{m,r} h_{m-1} z \underset{(20)}{=} h_m^{-1} \widehat{g}_{m,r} y \underset{(21)}{=} h_m^{-1} \widehat{f}_m y \underset{(20)}{=} h_m^{-1} \widehat{f}_m h_{m-1} z \underset{(1.28)}{=} fz. \tag{22}$$

Пусть дано произвольное $z \in W_{m-1}$. Полагая по-прежнему $y = h_{m-1} z$, имеем

$$\widehat{f}_m y \underset{(1.54)}{\in} S^c_{\frac{q}{2}} \subset \overline{S^c_q} \underset{(1.14)}{\subset} h_m V_m, \tag{23}$$

$$\widehat{g}_{m,r} y \underset{(1.64)}{\in} \overline{S^c_q} \underset{(1.14)}{\subset} h_m V_m. \tag{24}$$

Имеем также

$$\rho(g_r z, fz) = \rho(fz, g_r z) = \inf_{u \in G(fz, g_r z)} s(u) \leqslant s(\upsilon), \tag{25}$$

Где $\upsilon \in G(fz, g_r z)$ — кусочно-гладкий путь, определенный следующим образом:

$$\upsilon_t \underset{def}{=} h_m^{-1}((1-t)\widehat{g}_{m,r} y + t\widehat{f}_m y)(t \in [0,1]) \tag{26}$$

(путь *v* зависит от r и z, но для краткости это не отражено в его обозначении; напомним, что через $G(z_1, z_2)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки $z_2 \in V^n$ в точку $z_1 \in V^n$; при этом под кусочно-гладким путем *u,* идущим в многообразии V^n из точки $z_2 \in V^n$ в точку $z_1 \in V^n$, понимается непрерывное отображение $u : [0,1] \to V^n$, имеющее кусочно-непрерывную производную и такое, что его значение при $t = 0$ равно $z_2 (u_0 = z_2)$, а его значение при $t = 0$ равно $z_1 (u_1 = z_1)$; через *ut* обозначается значение отображения *u* в точке *t;* через du_t обозначается значение производной отображения *u* в точке *t* (производная понимается здесь как отображение касательного пространства многообразия R (вещественной прямой) в касательное пространство многообразия V^n*);* через u_t обозначается $du_t(\tau_t^{[l]})^{-1} l$ (u_t тоже можно было бы называть производной отображения *u* в точке *t,* но мы предпочитаем употреблять слово «производная» только в одном указанном выше точном смысле); через $s(u)$ обозначается длина пути

$$s(u) \underset{def}{=} \int_0^1 \left[\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)^{\frac{1}{2}} dt \right] = \int_0^1 |\dot{u}_t| \, dt, \tag{27}$$

Где $\delta(\cdot,\cdot)$ — риманова метрика, зафиксированная на V^n в самом начале [1]; так как $h_m^{-1} : h_m V_m \to V_m$ — диффеоморфизм, то из формул (23), (24), (26) следует, что

$$\upsilon \in G(h_m^{-1} \widehat{f}_m y, h_m^{-1} \widehat{g}_{m,r} y) = G(h_m^{-1} \widehat{f}_m h_{m-1} z, h_m^{-1} \widehat{g}_{m,r} h_{m-1} z) \overset{(1.28)}{\underset{(1.52)}{=}} G(fz, g_r z);;$$

таким образом, неравенство в формуле (25) доказано.

Из формул (23), (24) следует также, что путь $\widehat{\upsilon}$, определенный формулой

$$\widehat{\upsilon}_t \underset{def}{=} h_m \upsilon_t \underset{(26)}{=} (1-t)\widehat{g}_{m,r} y + t\widehat{f}_m y (t \in [0,1]), \tag{28}$$

лежит в замкнутом шаре $\overline{S}^c_q \in h_m V_m$.

Имеем (по повторяющимся вверху и внизу индексам i и j (но не m) подразумевается суммирование от 1 до n)

$$s(\upsilon) \underset{(27)}{=} \int_0^1 \left[\delta(\dot{\upsilon}_t, \dot{\upsilon}_t) \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(1.30)}{=} \int_0^1 \left[g_{ij}^{(m)}(h_m \upsilon_t)(\eta_{m,h_m\upsilon_t} \dot{\upsilon}_t)^i (\eta_{m,h_m\upsilon_t} \dot{\upsilon}_t)^j \right]^{\frac{1}{2}} dt. \qquad (29)$$

Имеем, далее:

$$\eta_{m,h_m\upsilon_t} \dot{\upsilon}_t \underset{(1.31)}{=} \tau_{h_m\upsilon_t}^{[n]} d(h_m)_{\upsilon_t} \dot{\upsilon}_t = \tau_{h_m\upsilon_t}^{[n]} (h_m \upsilon_t)^{\cdot} \underset{(28)}{=} \tau_{\hat{\upsilon}_t}^{[n]} (\hat{\upsilon})^{\cdot}. \qquad (30)$$

Так как функции $g_{ij}^{(m)}(\cdot): h_m V_m \to R$ $(m \in \{1,...,\bar{t}\})$ непрерывны, то найдется $D \in R_*^+$, такое, что имеет место неравенство

$$\sup_{y \in \overline{S_q^c}} \left[g_{ij}^{(m)}(y) a^i a^j \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant D |a|_c \qquad (31)$$

для всяких $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $a = (a^1,...a^n) \in R^n$ (мы воспользовались здесь тем, что замкнутый шар $\overline{S_q^c}$ содержится в множестве $h_m V_m$ (см. формулу (1.14)).

Из формул (29)–(31) следует

$$s(\upsilon) \leqslant D \int_0^1 \left| \tau_{\hat{\upsilon}_t}^{[n]} (\hat{\upsilon}_t)^{\cdot} \right|_c dt \underset{(28)}{=} D \left| \hat{g}_{m,r} y - \hat{f}_m y \right|_c \underset{(1.55)}{\leqslant} DM |y|_c = DM |h_{m-1} z|_c . \qquad (32)$$

Итак, для всяких $r \in (0, \bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}, z \in W_{m-1}$ найден путь $\upsilon = \upsilon(r,z) \in G(fz, g_r z)$ лежащий в множестве $h_m^{-1} \overline{S_q^c}$ (см. фразу, содержащую формулу (28)), для которого имеет место цепочка неравенств

$$\rho(g_r z, fz) \underset{(25)}{\leqslant} s(\upsilon) \leqslant \chi(r), \qquad (33)$$

где $\chi(r)$ определено при всяком $r \in (0, \bar{s})$ формулой

$$\chi(r) \underset{def}{=} DM \max_{m \in \{1,...,\bar{t}\}} \sup_{z \in \{w \in W_{m-1}^{(1)} : \rho(w, f^{m-1}x) < r\}} |h_{m-1} z|_c \qquad (34)$$

Напомним, что числа $D \in R_*^+$, $M \in R_*^+$ не зависят от $r \in (0, \bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$; напомним также, что $h_{m-1} W_{m-1}^{(1)} \underset{(1.47)}{=} \overline{S_q^c}$ — компактное множество (при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, следовательно (при всяких $r \in (0, \bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$) , sup в правой части неравенства (34) есть неотрицательное число (а не + ∞). Докажем последнее неравенство цепочки (33):

а) для всяких $r \in (0, \bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ для всякого $z \in W_{m-1} \setminus W_{m-1}^{(1)}$ имеет место равенство $g_r z = fz$ (см. начало доказательства леммы 1);

б) для всяких $r \in (0, \bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ для всякого $z \in W_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству $\rho(z, f^{m-1}x) \geqslant r$, имеет место равенство $g_r z = fz$ (см. фразу, содержащую формулу (22));

в) из а) и б) следует, что для всяких $r \in (0, \bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ для всякого $z \in W_{m-1} \setminus \{w \in W_{m-1}^{(1)} : \rho(w, f^{m-1}x) < r\}$ имеем $\rho(g_r z, fz) = s(\upsilon) = 0 \leqslant \chi(r)$ »

г) для всяких для $r \in (0, \bar{s})$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ всякого $z \in \{w \in W_{m-1}^{(1)} : \rho(w, f^{m-1}x) < r\}$ последнее неравенство цепочки (33) непосредственно следует из формул (32), (34).

Последнее неравенство цепочки (33) доказано.

Для функции $\chi(\cdot): (0, \bar{s}) \to R^+$, определенной формулой (34), имеет место соотношение

$$\chi(r) \underset{r\to 0}{\to} 0. \tag{35}$$

Доказательство соотношения (35). Для всякого $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ для всякого $\theta \in R_*^+$ существует $\delta_k(\theta) \in R_*^+$, такое, что для всякого $z \in V^n$, удовлетворяющего неравенству $\rho(z, f^k x) < \delta_k(\theta)$, имеет место неравенство $\left|h_k z\right|_c < \theta$ (существование такого $\delta_k(\theta)$ следует в силу формулы (1.9) из хорошо известного утверждения, состоящего в том, что топология, индуцированная на V^n расстоянием $\rho(\cdot,\cdot)$, построенным стандартным образом по римановой метрике $\delta(\cdot,\cdot)$, совпадает с топологией, имеющейся на V^n как на многообразии). При всяком $\varepsilon \in R_*^+$ положим

$$\delta(\varepsilon) \underset{def}{=} \min_{m\in\{1,...,\bar{t}\}} \delta_{m-1}(D^{-1}(M+1)^{-1}\varepsilon), \tag{36}$$

Тогда $\delta(\varepsilon) \in R_*^+$ (при всяком $\varepsilon \in R_*^+$) и при всяком $\varepsilon \in R_*^+$ при всяком $r \in (0, \delta(\varepsilon))$ выполнено неравенство $\chi(r) \underset{(36)}{\overset{(34)}{<}} \varepsilon$. Соотношение (35) доказано.

Для всякого $r \in (0, \bar{s})$ имеем

$$\sup_{z\in v^n} \rho(g_r z, fz) \underset{(1.52)}{=} \max_{m\in\{1,...,\bar{t}\}} \sup_{z\in W_{m-1}} \rho(g_r z, fz) \underset{(33)}{\leqslant} \chi(r).$$

Лемма 3 доказана.

5. Лемма 4. *Существует $\beta \in R_*^+$, таксе, что при всяком $r \in (0,\beta)$ имеют место неравенства*

$$\max_{m\in\{1,...,\bar{t}\}} \sup_{y\in h_{m-1}W_{m-1}} \left\|\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y, m} \leqslant 20\hat{\delta}\,\|df\|, \tag{37}$$

$$\max_{m\in\{1,...,\bar{t}\}} \sup_{y\in h_{m-1}W_{m-1}} \left\|\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y\right\|_{0,m-1}^{0,m} \leqslant 80\hat{\delta}\,\|df\|. \tag{38}$$

Пояснения к формулировке леммы 4. 1) $\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y$ определено формулой (8) (в данном случае $k = l = n$, так как $\hat{g}_{m,r}$ и $\hat{f}_m$, а следовательно, и $\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m$ отображают $h_{m-1}W_{m-1} \subset R^n$ в $R^n (m \in \{1,...,\bar{t}\})$.

2) Для всякого линейного отображения $L: R^n \to R^n$ при всяких $l \in \{0,...,\bar{t}\}$, $m \in \{0,...,\bar{t}\}$, $y_1 \in h_l V_l$, $y_2 \in h_m V_m$ полагаем по определению

$$\|L\|_{y_1,l}^{y_2,m} \overset{def}{=} \sup_{a\in R_*^n} \left\{ \left[g_{ij}^{(m)}(y_2)(La)^i (La)^j \right]^{\frac{1}{2}} \left[g_{ij}^{(l)}(y_1) a^i a^j \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \tag{39}$$

(напомним, что билинейные формы с коэффициентами $g_{ij}^{(k)}(\cdot)$ определены формулой (1.30) и что по повторяющимся вверху и внизу индексам *i, j* подразумевается суммирование от 1 до n*;* напомним также, что для всякого $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ для всякого $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеем:

$$\hat{f}_m y \underset{(1.28)}{=} h_m f h_{m-1}^{-1} y \in h_m f W_{m-1} \underset{(1.19)}{\overset{(1.16)}{\subset}} h_m V_m.$$

Доказательство леммы 4. При всяких, $r \in R_*^+$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеет место равенство

$$\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y = \hat{d}(\hat{g}_{m,r})_y - \hat{d}(\hat{f}_m)_y \underset{(7)}{=} \sigma(r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y))\left[\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right] +$$

$$+\left\{\hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_{m-1}(y)}\left[r^{-1}\hat{d}(\hat{\rho}_{m-1})_y\right]\right\}\left[\hat{Z}_m-\hat{d}(\hat{f}_m)_0\right]y, \tag{40}$$

из которого в силу формулы (39) следует неравенство

$$\left\|\hat{d}(\hat{g}_{m,r}-\hat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m} \leqslant_{\tau\in R} (\sup|\sigma(\tau)|)\left\|\hat{Z}_m-\hat{d}(\hat{f}_m)_0\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m}+$$

$$+\left(\sup_{\tau\in R}\left|\frac{d\sigma}{d\tau}\right|\right)r^{-1}\,\|\,\hat{d}(\hat{\rho}_{m-1})_y\,\|_{y,m-1}\left|\left[\hat{Z}_m-\hat{d}(\hat{f}_m)_0\right]y\right|_{\hat{f}_m y,m} \tag{41}$$

Пояснения к формуле (41): а) при всяких $a\in R^n$, $m\in\{0,...,\bar{t}\}$, $,u\in h_m V_m\subset R^n$ норма $|a|_{u,m}$ определяется формулой

$$|a|_{u,m}\underset{def}{=}\left[g_{ij}^{(m)}(u)a^i a^j\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{42}$$

б) для всякого линейного отображения $L:R^n\to R$ при всяких $k\in\{0,...,\bar{t}\}$, $y\in h_k V_k$ норма $\|L\|_{y,k}$ определяется формулой

$$\|L\|_{y,k}\underset{def}{=}\sup_{a\in R^n}\left\{|La|\cdot\left|g_{ij}^{(k)}(y)a^i a^j\right|^{-\frac{1}{2}}\right\} \tag{43}$$

(в формулах (42), (43) по повторяющимся вверху и внизу индексам *i, j* подразумевается суммирование от 1 до *n)*. Пояснения к формуле (41) закончены.

Из формулы (41) [1] следуют равенства

$$\sup_{\tau\in R}|\sigma(\tau)|=1, \tag{44}$$

$$\sup_{\tau\in R}\left|\frac{d\sigma}{d\tau}\right|=\sup_{\tau\in[-1,1]}\left|-\frac{\pi}{2}\sin(\pi\tau)\right|=\frac{\pi}{2}. \tag{45}$$

Из формулы (42) [1] в силу неравенства треугольника следует неравенство

$$\left|\hat{\rho}_k(y+\Delta y)-\hat{\rho}_k(y)\right|\leqslant\rho(h_k^{-1}(y+\Delta y),h_k^{-1}y) \tag{46}$$

(при всяких $k\in\{0,...,\bar{t}\}$, $y\in h_k V_k$, $y+\Delta y\in h_k V_k$). При всяких $k\in\{0,...,\bar{t}\}$, $y\in h_k V_k$ имеем

$$\rho(h_k^{-1}(y+\Delta y),h_k^{-1}y)\left[g_{ij}^{(k)}(y)(\Delta y)^i(\Delta y)^j\right]^{-\frac{1}{2}}\underset{\Delta y\to 0}{\to}1 \tag{47}$$

(по i и j суммирование от 1 до n); формула (47) хорошо известна и легко доказывается, исходя из определения расстояния $\rho(\cdot,\cdot)$ через риманову метрику $\delta(\cdot,\cdot)$ (напомним, что $g_{ij}^{(k)}$ по определению выражаются через $\delta(\cdot,\cdot)$ формулой (30) [1]). Из определения $\hat{d}(\hat{\rho}_k)_y$ (см. формулу (8), в которой в данном случае надо положить $k=n$, $l=1$, $g=\rho_k(\cdot)$ и определения нормы $\|\cdot\|_{y,k}$ (см. формулу (43)) следует в силу формул (46), (47), что при всяких $k\in\{0,...,\bar{t}\}$, $y\in h_k V_k$ имеет место неравенство

$$\left\|\hat{d}(\hat{\rho}_k)_y\right\|_{y,k}\leqslant 1. \tag{48}$$

При всяком $m\in\{1,...,\bar{t}\}$ имеем

$$\left|\left[\hat{Z}_m-\hat{d}(\hat{f}_m)_0\right]y\right|_{\hat{f}_m y,m}\underset{(42)}{\overset{(39)}{\leqslant}}\left\|\hat{Z}_m-\hat{d}(\hat{f}_m)_0\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m}|y|_{y,m-1}. \tag{49}$$

При всяких $r \in R_*^+$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ из неравенства (41) в силу равенств (44), (45) и неравенств (48), (49) следует неравенство

$$\left\|\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m} \leqslant \left(1 + \frac{\pi}{2} r^{-1} |y|_{y,m-1}\right) \left\|\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m}. \tag{50}$$

При всяком $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ имеем

$$\lim_{y\to 0}\left\{|y|_{y,k}\left[\hat{\rho}_k(y)\right]^{-1}\right\} \underset{(42)}{\overset{(1.42)}{=}} \lim_{y\to 0}\left\{\left[g_{ij}^{(k)}(y)y^i y^j\right]^{\frac{1}{2}}\left[\rho(h_k^{-1}y, f^k x)\right]^{-1}\right\} = 1 \tag{51}$$

(по i и j суммирование от 1 до n); к последнему равенству применима то же пояснение, которое выше было сделано по поводу равенства (47); (соотношения $y \to 0$, $|y|_c \to 0$ и $\hat{\rho}_k(y) \to 0$ при всяком $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ попарно эквивалентны). Из формулы (51) следует, что при всяком $k \in \{0,...,\bar{t}\}$ найдется $\gamma_k \in R_*^+$, такое, что для всякого $y \in h_k V_k$, удовлетворяющего неравенству $\hat{\rho}_k(y) < \gamma_k$, выполнено неравенство

$$|y|_{y,k} < 2\hat{\rho}_k(y). \tag{52}$$

При всяком

$$r \in (0, \gamma), \tag{53}$$

Где $\gamma \underset{def}{=} \min\{\gamma_0,...,\gamma_{\bar{t}}\}$ $(\gamma \in R_*^+)$, так как $(\gamma_0 \in R_*^+,...,\gamma_{\bar{t}} \in R_*^+)$ при всяких $k \in \{0,...,\bar{t}-1\}$, $y \in h_k W_k$ имеем: либо

$$\hat{\rho}_k(y) \leqslant r \tag{54}$$

и тогда, так как $r \underset{(53)}{<} \gamma_k$, имеем

$$1 + \frac{\pi}{2} r^{-1} |y|_{y,k} \underset{(52)}{<} 1 + \pi r^{-1} \hat{\rho}_k(y) \underset{(54)}{\leqslant} 1 + \pi, \tag{55}$$

либо

$$\hat{\rho}_k(y) > r \tag{56}$$

и, следовательно, $\hat{\rho}_k(z) > r$ для всякого z из некоторой окрестности точки y, а тогда для всех z из этой окрестности точки y имеет место равенство

$$\sigma(r^{-1}\hat{\rho}_k(z)) \underset{(1.41)}{=} 0, \tag{57}$$

откуда

$$\hat{d}\sigma_{r^{-1}\hat{\rho}_k(y)} = 0;; \tag{58}$$

подставив равенство (57) (при $z=y$) и равенство (58) в формулу, (40) (положив в ней m = k+1), получаем, что в случае выполнения неравенства (56) имеет место равенство

$$\hat{d}(\hat{g}_{k+1,r} - \hat{f}_{k+1})_y = 0.$$

Итак, при всяких $r \in (0,\gamma)$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеет место альтернатива: либо $1 + \frac{\pi}{2} r^{-1} |y|_{y,m-1} < 1 + \pi < 5$, либо $\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y = 0;$

в каждом из этих двух случаев из неравенства (50) следует неравенство

$$\left\|\hat{d}(\hat{g}_{m,r} - \hat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m} \leqslant 5\left\|\hat{Z}_m - \hat{d}(\hat{f}_m)_0\right\|_{y,m-1}^{\hat{f}_m y,m}. \tag{59}$$

Итак, доказано, что найдется $\gamma \in R_*^+$, такое, что для всяких $r \in (0,\gamma)$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ выполнено неравенство (59).

При всяких $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеем

$$\left\|\widehat{Z}_m - \widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m} \underset{(39)}{\leqslant} \|I\|_{0,m}^{\widehat{f}_m y,m} \left\|\widehat{Z}_m - \widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\right\|_{0,m-1}^{0,m} \|I\|_{y,m-1}^{0,m-1}. \tag{60}$$

При всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ имеем

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{Z}_m - \widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\right\|_{0,m-1}^{0,m} &= \left\|\left[\widehat{Z}_m(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0)^{-1} - I\right]\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\right\|_{0,m-1}^{0,m} \underset{(39)}{\overset{(1.34)}{\leqslant}} \\ &\underset{(39)}{\overset{(1.34)}{\leqslant}} \left\|\widehat{Z}_m(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0)^{-1} - I\right\|_m \left\|\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\right\|_{0,m-1}^{0,m} \underset{(1.39)}{\leqslant} \\ &\underset{(1.39)}{\leqslant} \widehat{\delta}\left\|\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\right\|_{0,m-1}^{0,m} = \widehat{\delta}\left\|df_{f^{m-1}x}\right\| \leqslant \widehat{\delta}\,|\!|\!|\, df \,|\!|\!|\,.\end{aligned} \tag{61}$$

Докажем равенство, имеющееся в последней строчке формулы (61) Имеем

$$\left\|\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\right\|_{0,m-1}^{0,m} \underset{(39)}{\overset{(1.33)}{=}} \sup_{a\in R_*^+}\left\{(\delta(\eta_m^{-1}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0 a,\ \eta_m^{-1}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0 a))^{\frac{1}{2}} \times (\delta(\eta_{m-1}^{-1}a,\ \eta_{m-1}^{-1}a))^{-\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\eta_m^{-1}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0 a = \eta_m^{-1}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\eta_{m-1}\eta_{m-1}^{-1}a \underset{(1.26)}{\overset{(1.9)}{=}} d(h_m^{-1})_0(\tau_0^{[n]})^{-1}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\tau_0^{[n]}d(h_{m-1})_{f^{m-1}x}\eta_{m-1}^{-1}a \underset{(1.29)}{=}$$

$$\underset{(1.29)}{=} d(h_m^{-1})_0 d(\widehat{f}_m)_0 d(h_{m-1})_{f^{m-1}n}\eta_{m-1}^{-1}a \underset{(1.28)}{\overset{(1.9)}{=}} df_{f^{m-1}x}\eta_{m-1}^{-1}a\,;$$

подставив это в предыдущую формулу и воспользовавшись тем, что $\eta_{m-1}^{-1}R_*^n = \pi_*^{-1}(f^{m-1}x)$ (так как η_{m-1} — изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(f^{m-1}x)$ на векторное пространство R^n*),* получаем равенство $\left\|\widehat{d}(\widehat{f}_m)_0\right\|_{0,m-1}^{0,m} = \left\|df_{f^{m-1}x}\right\|$. Формула (61) полностью доказана.

При всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ найдется $\beta_m \in R_*^+$, такое, что для всякого $y \in h_{m-1}V_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству $\widehat{\rho}_{m-1}(y) < \beta_m$ выполнены неравенства:

$$\|I\|_{y,m-1}^{0,m-1} < 2\,,\ \|I\|_{0,m-1}^{y,m-1} < 2 \tag{62}$$

(это утверждение — следствие непрерывности функций $g_{ij}^{(m-1)}(\cdot): h_{m-1}V_{m-1} \to R$ ($i \in \{1,...,n\}$, $j \in \{1,...,n\}$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$), так как $h_{m-1}V_{m-1}$ - окрестность нуля ($m \in \{1,...,\bar{t}\}$)

При всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ найдется $\alpha_m \in R_*^+$, такое, что для всякого $y \in h_{m-1}W_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству $\widehat{\rho}_{m-1}(y) < \alpha_m$, выполнены неравенства

$$\|I\|_{0,m}^{\widehat{f}_m y,m} < 2\,,\ \|I\|_{\widehat{f}_m y,m}^{0,m} < 2 \tag{63}$$

(это утверждение — следствие непрерывности отображений $\widehat{f}_m : k_{m-1}W_{m-1} \to R^n$ $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ и непрерывности функций $g_{ij}^{(m)}(\cdot): h_mV_m \to R$ ($i \in \{1,...,n\}$, $j \in \{1,...,n\}$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$), так как $\widehat{f}_m 0 = 0$, h_mV_m - окрестность нуля ($m \in \{1,...,\bar{t}\}$) i.

Положим Имеем: $\beta \underset{def}{=} \min\{\gamma, \beta_1,...,\beta_{\bar{t}}, \alpha_1,...,\alpha_{\bar{t}}\}$.

а) $\beta \in R_*^+$, так как $\gamma \in R_*^+$, $\beta_i \in R_*^+$, $\alpha_i \in R_*^+$ $(i \in \{1,...,\bar{t}\})$;

б) при всяких $r \in (0,\beta)$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ для всякого $y \in h_{m-1}W_{m-1}$, удовлетворяющего неравенству $\widehat{\rho}_{m-1}(y) < \beta$, выполнены неравенства:

$$\left\|\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r} - \widehat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m} \underset{(59)-(63)}{\leqslant} 20\bar{\delta}\,\|\,df\,\|,$$

$$\left\|\widehat{d}(\widehat{g}_{m,r} - \widehat{f}_m)_y\right\|_{0,m-1}^{0,m} \leqslant \|I\|_{\widehat{f}_m y,m}^{0,m} \left\|d(\widehat{g}_{m,r} - \widehat{f}_m)_y\right\|_{y,m-1}^{\widehat{f}_m y,m} \|I\|_{0,m-1}^{y,m-1} \underset{(62)-(64)}{\leqslant} 80\bar{\delta}\,\|\,df\,\|.. \quad (64)$$

Итак, доказано существование числа $\beta \in R_*^+$, такого, что для всяких $r \in (0,\beta)$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеет место альтернатива: либо $\widehat{\rho}_{m-1}(y) \leqslant r$ и тогда (так как $r < \beta$) выполнены неравенство (64) и неравенство

$$\left\|d(\widehat{g}_{m,r} - \widehat{f}_m)_y\right\|_{0,m-1}^{0,m} \leqslant 80\bar{\sigma}\,\|\,df\,\|, \quad (65)$$

либо $\widehat{\rho}_{m-1}(y) > r$ и тогда (см. фразу, содержащую формулы (57), (58)) имеет место равенство $d(\widehat{g}_{m,r} - \widehat{f}_m)_y = 0$, из которого тоже следуют неравенства (64), (65).

Следовательно, доказано существование такого $\beta \in R_*^+$, что при всяких $r \in (0,\beta)$, $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, $y \in h_{m-1}W_{m-1}$ имеют место неравенства (64), (65), откуда следует, что при всяком $r \in (0,\beta)$ имеют место неравенства (37), (38). Лемма 4 доказана.

Литература

1. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 9, с. 1489— 1498.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 16 марта 1983 г.