МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 5 (1985)

НОРМАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ СЕМЕЙСТВА ЭНДОМОРФИЗМОВ МЕТРИЗОВАННОГО ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ

В. М. Миллионщиков

§ 1. В этой статье речь будет идти о некоторых обобщениях введенного А. М. Ляпуновым [1] понятия нормальной фундаментальной системы решений линейной системы дифференциальных уравнений. Мы начнем с того, что напомним это понятие в той степени общности, в какой оно рассматривалось самим А. М. Ляпуновым, и проиллюстрируем на примерах содержание и роль этого понятия.

Показателем Ляпунова решения $\mathfrak{x}(\cdot)$ линейной системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathfrak{x}} = A(t)\mathfrak{x}$ называется верхний предел $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|\mathfrak{x}(t)|$, или, что эквивалентно, точная нижняя грань тех чисел $\lambda\in\mathbf{R}$, для которых $|\mathfrak{x}(t)|\leqslant C_\lambda \exp(\lambda t)$ при некотором $C_\lambda\in\mathbf{R}$ и всех $t\in\mathbf{R}^+$. Если $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|A(\tau)\|\,d\tau<+\infty$ (только такие системы мы рассматриваем в § 1), то показатель Ляпунова всякого ненулевого решения есть число. Поясним сразу же, что следует понимать под показателями Ляпунова решений линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Если дано уравнение

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=0, \tag{1}$$

то показателем Ляпунова его решения $y(\cdot)$ называется не показатель Ляпунова функции $y(\cdot)$, т. е. $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|y(t)|$, а показатель Ляпунова ее (n — 1-струйного расширения, т. е. $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|y(t)\|_n$, где $\|y(t)\|_n \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|y^{(k)}(t)\right|^2\right)^{1/2}$.

Вообще, все, что относится к устойчивости и к показателям Ляпунова решений линейных систем первого порядка, переносится, как известно, на уравнения произвольного порядка путем стандартного сведения последних к системам первого порядка. Поясним, что y в уравнении (1) может принимать значения в векторном пространстве любой размерности; при этом $a_k(t)$ — линейные операторы, и лишь в одномерном пространстве их действие сводится к умножению на числа, с которыми они и отождествляются.

В качестве примера из механики, на котором мы проиллюстрируем понятие нормального базиса (нормальной фундаментальной системы решений), рассмотрим уравнение колебаний маятника $\ddot{u}+\sin u=0$ (коэффициент при $\sin u$ убран надлежащей заменой времени). Линеаризуя это уравнение в нижнем положении равновесия $u=\pi, \dot{u}=0$, получают уравнение $\ddot{u}+u=0$, называемое уравнением малых колебаний маятника. Линеаризуя уравнение маятника в верхнем положении равновесия $u=\pi, \dot{u}=0$, получают уравнение $\ddot{u}-u=0$.

Показатель Ляпунова любого ненулевого решения уравнения $\ddot{u}+u=0$ равен нулю, так как норма одноструйного расширения решения $u(t)\equiv A\sin\,(t+\varphi)$ равна

$$((A\sin\,(t+\varphi))^2+(A\cos\,(t+\varphi))^2)^{1/2}=A,$$

а $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln A=0$ при всяком $A\in\mathbf{R}_*^+$. Поэтому, какую бы фундаментальную систему решений уравнения $\ddot{u}+u=0$ мы ни взяли, сумма показателей Ляпунова входящих в нее решений равна нулю.

Иначе обстоит дело с уравнением $\ddot{u}-u=0$ — уравнением в вариациях в верхнем положении равновесия. Это уравнение имеет решение $u(t)\equiv\exp t$, показатель Ляпунова которого есть $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln(((\exp t)^2+(\exp t)^2)^{1/2})=1$ и решение $u(t)\equiv\exp(-t)$, у которого показатель Ляпунова равен

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln(((\exp(-t))^2+(-\exp(-t))^2)^{1/2})=-1.$$

Рассмотрим две фундаментальные системы решений уравнения $\ddot{u}-u=0$. Первая: $\exp t,\exp(-t)$; вторая: $\exp t,\exp t+\exp(-t)$. Сумма показателей Ляпунова решений, входящих в первую систему, равна, согласно проведенным выше вычислениям, $1-1=0$. А для второй фундаментальной системы сумма показателей Ляпунова входящих в нее решений равна $1+1=2$, поскольку показатель Ляпунова решения $C_1\exp t+C_2\exp(-t)$ при любых $C_1\in\mathbf{R}_*$, $C_2\in\mathbf{R}$ равен показателю Ляпунова решения $\exp t$ вследствие легко проверяемого равенства $\lim_{t\to+\infty}(\|C_1\exp t+C_2\exp(-t)\|_2\,\|\exp t\|_2^{-1})=|C_1|$. Таким образом, у уравнения $\ddot{u}-u=0$ имеются фундаментальные системы решений с различными суммами показателей Ляпунова.

Фундаментальные системы решений, у которых сумма показателей Ляпунова имеет наименьшее возможное значение, названы А. М. Ляпуновым *нормальными.* Из изложенного выше следует, что $\exp t,\exp(-t)$ — нормальная фундаментальная система решений уравнения $\ddot{u}-u=0$.

Итак, у уравнения $\ddot{u}+u=0$ всякая фундаментальная система решений нормальна, а у уравнения $\ddot{u}-u=0$ — не всякая.

С рассмотрением нормальных фундаментальных систем решений связано исследование условной устойчивости. Условной устойчивостью А. М. Ляпунов назвал устойчивость по отношению к возмущениям начальных значений, подчиненным некоторому условию, точнее, не выводящим начальное значение с некоторого многообразия. Так, верхнее положение равновесия маятника условно устойчиво (в линейном приближении; имеется теорема Ляпунова об условной устойчивости для нелинейного уравнения, но об этом мы сейчас сколько-нибудь обстоятельно говорить не будем), поскольку при всяком $C\in\mathbf{R}$ решение $u(t)\equiv C\exp(-t)$ уравнения $\ddot{u}+u=0$ (т.е. всякое решение $u(\cdot)$ этого уравнения, начальное значение которого удовлетворяет условию $u(0)+\dot{u}(0)=0$ удовлетворяет неравенству $\|u(t)\|_2\leqslant\|u(0)\|_2\exp(-t)$ при всех $t\in\mathbf{R}^+$. Если ухитриться качнуть маятник так, чтобы сумма величин скорости и отклонения от верхнего положения в начальный момент времени равнялась нулю, то маятник будет не колебаться, а стремиться к верхнему положению равновесия. Подчеркнем, во избежание недоразумения, что здесь речь идет о линейном приближении. Для настоящего маятника, описываемого нелинейным уравнением $\ddot{u}+\sin u=0$, условие, которому должна удовлетворять начальная точка фазовой кривой, чтобы маятник стремился к верхнему положению равновесия, несколько иное: точка $(u(0),\ \dot{u}(0))$ должна лежать на некоторой кривой в фазовом пространстве, касающейся прямой $u+\dot{u}=\pi$ (это и есть содержание вышеупомянутой теоремы Ляпунова об условной устойчивости применительно к рассматриваемому примеру). Обнаружить наличие условной устойчивости верхнего положения равновесия маятника нам помогло знание нормальной фундаментальной системы решений уравнения $\ddot{u}-u=0$, точнее, знание того, что в нормальной фундаментальной системе решений этого уравнения имеется решение с отрицательным показателем Ляпунова.

Перейдем теперь к основному изложению, совершив при этом скачок вверх по ступенькам абстракции, с тем, однако, чтобы в конце статьи снова вернуться к рассмотрению более осязаемых объектов.

§ 2.1. *Абстрактным векторным расслоением* мы называем тройку $(E,\ p,\ B)$, где E и B — некоторые множества, p — некоторое отображение E на B, причем на полном прообразе $p^{-1}(b)$ всякой точки $b\in B$ введена структура n-мерного векторного пространства над полем $\mathbf{R}$ (или над полем **C**). Множество E называется пространством, B — базой, p — проекцией, $p^{-1}(b)$ — слоем над точкой b. В этой статье всюду предполагается, что $n\in\mathbf{N}$. Правда, использоваться это условие (т.е. условие $n\neq 0$), будет, лишь начиная с определения 3.

Риманова метрика на абстрактном векторном расслоении (E,p,B) есть, по определению, отображение, которое каждой паре точек $\xi\in E,\eta\in E$, таких, что $p\xi=p\eta$, ставит в соответствие некоторое действительное число (или комплексное число — в варианте С), причем сужение этого отображения на $p^{-1}(b)\times p^{-1}(b)$ при всяком $b\in B$ есть скалярное произведение на векторном пространстве $p^{-1}(b)$.

Эндоморфизмом абстрактного векторного расслоения называется пара отображений $X:E\to E,\chi:B\to B$, такая, что $pX=\chi p$ и для всякого $b\in B$ сужение $X[b]\overset{\text{def}}{=}X|_{p^{-1}(b)}$ отображения X на слой над точкой b есть линейное отображение слоя над точкой b в слой над точкой χb. *Семейством* эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ будем называть произвольное отображение $\mathfrak{M}$ множества $M\subset\mathbf{R}$ в множество эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения. При этом от множества M будем требовать только одного: $+\infty$ должна быть его точкой накопления. Основные частные случаи:

$$M=\mathbf{R},M=\mathbf{R}^{+},M=\mathbf{Z},M=\mathbf{N}.$$

Значением отображения $\mathfrak{M}$ в точке $t\in M$ является некоторый эндоморфизм (X_t,χ_t).

2. Основным объектом рассмотрения будет для нас *показатель Ляпунова* $\lambda(\mathfrak{M},\xi)$ семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ в точке $\xi\in E$. Он определяется формулой

$$\lambda(\mathfrak{M},\xi)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X_t\xi|. \tag{2}$$

Здесь и всюду далее полагаем, по определению, $\ln 0=-\infty$. В выражении "$t\to+\infty$" имеется в виду, что $t\to+\infty$, оставаясь в M. Норма вектора $\eta\in E$ определяется через риманову метрику абстрактного векторного расслоения по формуле $|\eta|=\langle\eta,\eta\rangle^{1/2}$. Из этих определений следует, в частности, что для всякого $b\in B$ показатель $\lambda(\mathfrak{M},0_b)$ равен $-\infty$. Через 0_b мы обозначаем нулевой вектор слоя $p^{-1}(b)$. Говоря о ненулевом векторе пространства E, мы будем подразумевать вектор $\xi\in E$, такой, что $\xi\neq 0_{p\xi}$.

Из формулы (2) следует, что для всякого $\xi\in E$ показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{M},\xi)$ есть точка расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$, т. е. либо действительное число, либо один из символов $+\infty,-\infty$. Напомним, что в $\overline{\mathbf{R}}$ имеется отношение линейного порядка: если $\mu\in\overline{\mathbf{R}}$, $\nu\in\overline{\mathbf{R}}$, то $\mu\geqslant\nu$ в том и только в том случае, если либо $\mu=+\infty$, либо $\nu=-\infty$, либо $\mu\in\mathbf{R}$, $\nu\in\mathbf{R}$ и $\mu\geqslant\nu$ (последнее неравенство понимается в стандартном смысле — как неравенство между действительными числами).

В [2] доказана следующая лемма, имеющая в цитируемой статье тот же номер, что и здесь.

ЛЕММА 1. *Для всяких* $\alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}$, $b \in B$, $\xi \in p^{-1}(b)$, $\eta \in p^{-1}(b)$ *имеет место неравенство*

$$\lambda(\mathfrak{M}, \alpha\xi + \beta\eta) \leqslant \max\{\lambda(\mathfrak{M}, \xi), \lambda(\mathfrak{M}, \eta)\}. \tag{3}$$

3. Определение 1. Для всякого $b \in B$ обозначим через $\Xi(b)$ множество всех базисов $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ слоя $p^{-1}(b)$, векторы которых занумерованы в порядке невозрастания показателей Ляпунова:

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_1) \geqslant ... \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \xi_n).$$

В множестве $\Xi(b)$ введем отношение предпорядка, положив, что $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ и $\{\eta_1, ..., \eta_n\}$ находятся в этом отношении в том и только в том случае, если $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_i) \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \eta_i)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$.

Напомним, что предпорядком на множестве Ξ называется транзитивное и рефлексивное отношение — см. [3, сводка результатов, § 6, п. 1, с. 384]. Отношение порядка, ассоциированное с отношением предпорядка, определяется (см. там же) как то отношение на фактор-множестве Ξ / R множества Ξ по отношению эквивалентности *R: «x* и *y,* а также *y* и *x* находятся в отношении предпорядка», которое порождено отношением предпорядка.

Напомним, что наименьшим элементом [3, сводка результатов, § 6, п. 5, с. 385—386] упорядоченного (по старой терминологии — частично упорядоченного) множества $\mathbf{\Omega}$ называется элемент $a \in \mathbf{\Omega}$, такой, что $x \geqslant a$ для всякого $x \in \mathbf{\Omega}$. Само собой разумеется, что упорядоченное множество может не иметь ни одного наименьшего элемента.

Наименьший элемент множества Ξ, на котором задано отношение предпорядка, будем определять аналогично, т. е. как такой элемент $a \in \Xi$, что пара (*x*, *a)* находится в отношении предпорядка для всякого $x \in \Xi$. Эквивалентное определение: $a \in \Xi$ называется наименьшим элементом множества Ξ, на котором задано отношение предпорядка, если соответствующий ему элемент фактор-пространства Ξ / R является наименьшим элементом в Ξ / R.

Поясним теперь, во что превращаются эти общие определения в ситуации, рассматриваемой в определении 1. Отношение эквивалентности *R* в этой ситуации таково: базисы $\{\xi_1, ..., \xi_n\} \in \Xi(b)$ и $\{\eta_1, ..., \eta_n\} \in \Xi(b)$ находятся в отношении *R*, если $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_i) = \lambda(\mathfrak{M}, \eta_i)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$. Базис $\{\eta_1, ..., \eta_n\} \in \Xi(b)$ называется наименьшим элементом множества $\Xi(b)$, наделенного отношением предпорядка в определении 1, если для всякого базиса $\{\xi_1, ..., \xi_n\} \in \Xi(b)$ имеют место неравенства $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \eta_k)$ для всех $k \in \{1, ..., n\}$.

Определение 2. При всяком $b \in B$ всякий наименьший элемент множества $\Xi(b)$, наделенного отношением предпорядка в определении 1, называется *нормальным базисом* слоя $p^{-1}(b)$.

Доказательство существования нормальных базисов любого слоя будет изложено в следующих параграфах.

§ 3. 1. При всяких $b \in B, \lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ определим множество

$$E(\mathfrak{M}, b, \lambda) \overset{\mathbf{def}}{=} \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M}, \xi) \leqslant \lambda\}. \tag{4}$$

Из леммы 1 и того обстоятельства, что для всякого $b \in B$ показатель Ляпунова нулевого вектора равен $-\infty$ (и, следовательно, $\leqslant$ любого $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$), вытекает, что при всяких $b \in B, \lambda \in \bar{\mathbf{R}}$ множество $E(\mathfrak{M}, b, \lambda)$ есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$. Таким образом, определено отображение

$$E(\mathfrak{M}, b, \cdot) : \bar{\mathbf{R}} \to \widetilde{p^{-1}(b)} \qquad (5)$$

расширенной числовой прямой $\bar{\mathbf{R}}$ в множество $\widetilde{p^{-1}(b)}$ всех векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Имеет место

Л Е М М А 2. *Для всякого $b \in B$ отображение (5) принимает не более $n+1$ различных значений.*

Эта лемма легко выводится из формулы (4); впрочем, в [2] изложено ее доказательство.

2. Пусть фиксировано любое $b \in B$. В силу леммы 2 имеется $m \in \{0, ..., n\}$ и имеются точки $\mu_0 < ... < \mu_m$ расширенной числовой прямой, такие, что значение отображения (5) в любой точке равно одной из точек $E(\mathfrak{M}, b, \mu_0), ..., E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$ множества $\widetilde{p^{-1}(b)}$, причем все эти $E(\mathfrak{M}, b, \mu_0), ..., E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$ различны. Из формулы (4) следует, что отображение (5) — монотонно неубывающее, т.е. $E(\mathfrak{M}, b, \mu) \subset E(\mathfrak{M}, b, \nu)$ для всяких точек $\mu \leqslant \nu$ расширенной прямой $\bar{\mathbf{R}}$. Поэтому из цепочки неравенств $\mu_0 < ... < \mu_m$ следует цепочка (нестрогих) включений:

$$E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) \subset ... \subset E(\mathfrak{M}, b, \mu_m). \qquad (6)$$

Так как подпространства, входящие в эту цепочку, все различны, то все включения в цепочке (6) в действительности — строгие.

3. Л Е М М А 3. *Для всякого $b \in B$ имеет место равенство*

$$E(\mathfrak{M}, b, \mu_m) = p^{-1}(b),$$

где $E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$ определено в предыдущем пункте.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть дано $b \in B$. Из того, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \in \bar{\mathbf{R}}$ для всякого $\xi \in E$, следует, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \leqslant +\infty$ для всякого $\xi \in p^{-1}(b)$. С помощью формулы (4) последнее утверждение можно переписать в виде равенства $E(\mathfrak{M}, b, +\infty) = p^{-1}(b)$. Таким образом, слой $p^{-1}(b)$ является одним из значений отображения (5) и потому $p^{-1}(b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_k)$ для некоторого $k \in \{0, ..., m\}$. Так как в силу (6) имеет место включение $E(\mathfrak{M}, b, \mu_k) \subset E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$, то

$$p^{-1}(b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_m). \qquad (7)$$

Из формулы (4) следует, что $E(\mathfrak{M}, b, \lambda) \subset p^{-1}(b)$ для всякого $\lambda \in \bar{\mathbf{R}}$. В частности, $E(\mathfrak{M}, b, \mu_m) \subset p^{-1}(b)$. Соединив это включение с включением (7), получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

4. Фиксируем любое $b \in B$. Пусть $E(\mathfrak{M}, b, \mu_0) \subset ... \subset E(\mathfrak{M}, b, \mu_m)$ — подпространства слоя $p^{-1}(b)$, определенные в п. 2. Положим

$$d_s \overset{\mathbf{def}}{=} \dim E(\mathfrak{M}, b, \mu_s) \quad (s \in \{0, ..., m\}). \qquad (8)$$

Из цепочки строгих включений (6) и формулы (8) вытекает цепочка строгих неравенств

$$d_0 < ... < d_m. \qquad (9)$$

Из формулы (8) вследствие леммы 3 вытекает равенство

$$d_m = n. \qquad (10)$$

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $b \in B$. Положим

$$E_k(\mathfrak{M},b)=\begin{cases}E(\mathfrak{M},b,\mu_o) \quad \text{при } k\in\{1,\dots,d_0\}, \\ \qquad\qquad \text{если } d_0\neq 0; \\ E(\mathfrak{M},b,\mu_s) \text{ при } k\in\{d_{s-1}+1,\dots,d_s\} \\ \qquad\qquad (s\in\{1,\dots,m\}), \\ \qquad\qquad \text{если } \mathrm{m}\neq 0.\end{cases}$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $b\in B$. *Определением* 3 *подпространства* $E_k(\mathfrak{M},b)$ *определены при всех* $k\in\{1,\dots,n\}$. *Имеют место: цепочка нестрогих включений* $E_1(\mathfrak{M},b)\subset\dots\subset E_n(\mathfrak{M},b)$, *неравенство* $E_1(\mathfrak{M},b)\neq\{0_b\}$ *и равенство* $E_n(\mathfrak{M},b)=p^{-1}(b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. П е р в ы й с л у ч а й: $d_0=0, m=0$.

Из $m=0$ в силу леммы 3 следует равенство $p^{-1}(b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$, а из $d_0=0$ в силу (8) следует, что $E(\mathfrak{M},b,\mu_0)=\{0_b\}$. Поэтому в рассматриваемом случае $p^{-1}(b)=\{0_b\}$. Это невозможно, поскольку $\dim p^{-1}(b)=n\in\mathbf{N}$ — последнее условие наложено в п. 1 § 2. Мы доказали, что первый случай никогда не реализуется.

В т о р о й с л у ч а й: $d_0\neq 0, m=0$. Определение 3 превращается в этом случае в такое определение:

$$E_k(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_0) \quad (k\in\{1,\dots,d_0\}).$$

Из $m=0$ в силу (10) вытекает равенство

$$d_0=n. \tag{11}$$

Следовательно, определение 3 в рассматриваемом случае переписывается в виде

$$E_k(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_0) \quad (k\in\{1,\dots,n\})$$

и потому определяет $E_k(\mathfrak{M},b)$ для всех $k\in\{1,\dots,n\}$. Отсюда следуют равенства $E_1(\mathfrak{M},b)=\dots=E_n(\mathfrak{M},b)$ и $\dim E_1(\mathfrak{M},b)=\dim E(\mathfrak{M},b,\mu_0)=d_0=n>0$. Предпоследнее равенство следует из (8), последнее равенство — из (11), а условие $n>0$ наложено в п. 1 §2. Следовательно, $E_1(\mathfrak{M},b)\neq\{0_b\}$. Далее, поскольку $E_n(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$, а $m=0$, то $E_n(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_m)$. Отсюда в силу леммы 3 следует равенство $E_n(\mathfrak{M},b)=p^{-1}(b)$. Предложение в рассматриваемом случае доказано.

Т р е т и й с л у ч а й: $d_0=0, m\neq 0$. В этом случае определение 3 выглядит следующим образом:

$$E_k(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_s) \text{ при } k\in\{d_{s-1}+1,\dots,d_s\} \quad (s\in\{1,\dots,m\}). \tag{12}$$

Из (9), (10) следует, что целочисленные отрезки $\{d_{s-1}+1,\dots,d_s\}$ $(s\in\{1,\dots,m\})$ образуют разбиение целочисленного отрезка $\{d_0+1,\dots,n\}$. Так как d_0 сейчас равно нулю, то $\{d_0+1,\dots,n\}=\{1,\dots,n\}$. Поэтому формула (12) определяет $E_k(\mathfrak{M},b)$ для всех $k\in\{1,\dots,n\}$, причем из (6), (12) следует цепочка нестрогих включений $E_1(\mathfrak{M},b)\subset\dots\subset E_n(\mathfrak{M},b)$. Так как d_0 сейчас равно нулю, то, положив в (12) $s=1, k=1$, получаем равенство

$$E_1(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_1) \tag{13}$$

В цепочке строгих включений (6) содержится строгое включение $E(\mathfrak{M},b,\mu_1)\supset E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$ векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$. Отсюда следует, что $E(\mathfrak{M},b,\mu_1)\neq\{0_b\}$. Поэтому в силу (13) имеем $E_1(\mathfrak{M},b)\neq\{0_b\}$.

Из (10) следует: $n\in\{d_{m-1}+1,...,d_m\}$, поэтому в формуле (12) содержится равенство $E_n(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_m)$. Из него в силу леммы 3 следует, что $E_n(\mathfrak{M},b)=p^{-1}(b)$. Предложение в третьем случае доказано.

Четвертый случай: $d_0\neq 0, m\neq 0$. Определение 3 в этом случае избавляется от обоих «если» и превращается в следующее определение:

$$E_k(\mathfrak{M},b)=\begin{cases}E(\mathfrak{M},b,\mu_o)\ \text{при}\ \ k\in\{1,...,d_0\},\\ E(\mathfrak{M},b,\mu_s)\ \text{при}\ k\in\{d_{s-1}+1,...,d_s\}\\ \qquad\qquad (s\in\{1,...,m\}).\end{cases}\qquad(14)$$

Из (9), (10) следует, что целочисленные отрезки

$$\{1,...,d_0\},\ \{d_{s-1}+1,...,d_s\}\ (s\in\{1,...,m\})$$

образуют разбиение множества $\{1,...,n\}$. Поэтому формула (14) определяет $E_k(\mathfrak{M},b)$ для всех $k\in\{1,...,n\}$, причем из (6), (14) следует цепочка нестрогих включений $E_1(\mathfrak{M},b)\subset...\subset E_n(\mathfrak{M},b)$.

Положив в формуле (14) $k=1$, получаем равенство

$$E_1(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_0).\qquad(15)$$

Так как в рассматриваемом сейчас случае число $d_0=\dim E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$ отлично от нуля, то из равенства (15) следует, что $E_1(\mathfrak{M},b)\neq\{0_b\}$.

Из формулы (10) следует, что $n\in\{d_{m-1}+1,...,d_m\}$, поэтому в формуле (14) содержится равенство $E_n(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_m)$, из которого в силу леммы 3 вытекает равенство $E_n(\mathfrak{M},b)=p^{-1}(b)$. Мы доказали предложение и в четвертом случае. Предложение доказано.

5. Определение 4. *Показатель Ляпунова* $\lambda_k(\mathfrak{M},b)$, где $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$, определяется формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{M},b)=\sup_{\xi\in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)}\lambda(\mathfrak{M},b),$$

где $\lambda(\mathfrak{M},b)$ определено формулой (2).

6. Напомним некоторые свойства подпространств $E_k(\mathfrak{M},b)$ и показателей $\lambda_k(\mathfrak{M},b)$, определенных в двух предыдущих пунктах. Эти свойства выражаются следующими четырьмя предложениями, доказанными в [2]. В цитируемой статье это — предложения 1, 3—5.

Предложение 2. *Для всякого* $b\in B$ *имеет место цепочка неравенств*

$$\lambda_1(\mathfrak{M},b)\geqslant\lambda_n(\mathfrak{M},b).$$

Предложение 3. *Для всяких* $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$ *имеет место равенство*

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)=\left\{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\mathfrak{M},\xi)\leqslant\lambda_k(\mathfrak{M},b)\right\}.$$

Предложение 4. *Пусть* $b\in B$. *Тогда при всяких*

$$k\in\{1,...,n-1\},\ \xi\in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)\setminus E_{n-k}(\mathfrak{M},b)$$

имеет место равенство $\lambda(\mathfrak{M},\xi)\geqslant\lambda_k(\mathfrak{M},b)$, *а при всяком* $\xi\in E_1(\mathfrak{M},b)_*$ *— равенство* $\lambda(\mathfrak{M},\xi)\geqslant\lambda_n(\mathfrak{M},b)$.

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть* $b \in B$. *Тогда при всяком* $k \in \{1,...,n-1\}$ *имеет место неравенство* $\dim E_{n-k}(\mathfrak{M}, b) \geqslant n-k$, *а для равенства* $\dim E_{n-k}(\mathfrak{M}, b) = n-k$ *необходимо и достаточно, чтобы* $E_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) \neq E_{n-k}(\mathfrak{M}, b)$.

§ 4. В этом параграфе доказывается, что в каждом слое $p^{-1}(b)$ существуют нормальные базисы семейства $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения (E, p, B). Это делается в несколько шагов. Прежде чем сформулировать предложение 6, представляющее собой первый шаг к этому доказательству, напомним обозначение $\Xi(b)$, введенное выше в определении 1. Так обозначается множество всех базисов слоя $p^{-1}(b)$, векторы которых занумерованы в порядке невозрастания показателей Ляпунова.

П р е д л о ж е н и е 6. *Пусть* $b \in B, \{\xi_1,...,\xi_n\} \in \Xi(b)$. *Тогда* $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) \geqslant \lambda_k(\mathfrak{M}, b)$ *для всех* $k \in \{1,...,n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\{\xi_1,...,\xi_n\} \in \Xi(b)$, то
$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_1) \geqslant ... \geqslant \lambda(\mathfrak{M}, \xi_n). \tag{16}$$
Предположим противное тому, что утверждается в доказываемом предложении: пусть
$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) < \lambda_k(\mathfrak{M}, b) \tag{17}$$
для некоторого $k \in \{1,...,n\}$. Обозначим через m наибольшее из тех $l \in \{k,...,n\}$, для которых $\lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \lambda_l(\mathfrak{M}, b)$. Тогда
$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \lambda_m(\mathfrak{M}, b), \tag{18}$$
причем либо $m = n$, либо $m < n$ и $\lambda_{m+1}(\mathfrak{M}, b) \neq \lambda_m(\mathfrak{M}, b)$. Из (17), (18) следует неравенство
$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_k) < \lambda_m(\mathfrak{M}, b). \tag{19}$$
Так как $m \geqslant k$, то из (16) вытекает, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_i) \leqslant \lambda(\mathfrak{M}, \xi_k)$ при всяком $i \in \{m,...,n\}$. Отсюда в силу (19) следует
$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi_i) < \lambda_m(\mathfrak{M}, b) \quad (i \in \{m,...,n\}). \qquad 20)$$
П е р в ы й с л у ч а й: $m = n$. Тогда (20) превращается в неравенство $\lambda(\mathfrak{M}, \xi_n) < \lambda_n(\mathfrak{M}, b)$, противоречащее предложениям 2, 4, соединенным с равенством $E_n(\mathfrak{M}, b) = p^{-1}(b)$, содержащимся в предложении 1. Придя к противоречию, мы доказали предложение в случае $m = n$.

В т о р о й с л у ч а й: $m < n$. Тогда, как отмечено выше, $\lambda_{m+1}(\mathfrak{M}, b) \neq \lambda_m(\mathfrak{M}, b)$. Отсюда в силу определения 4 вытекает неравенство
$$E_{n-m}(\mathfrak{M}, b) \neq E_{n-m+1}(\mathfrak{M}, b). \tag{21}$$
Последнее неравенство вследствие включений $E_1(\mathfrak{M}, b) \subset ... \subset E_n(\mathfrak{M}, b)$ (утверждение о наличии этих включений составляет часть предложения 1) эквивалентно неравенству
$$E_{n-m+1}(\mathfrak{M}, b) \setminus E_{n-m}(\mathfrak{M}, b) \neq \varnothing.$$

В силу предложения 5 из (21) следует равенство
$$\dim E_{n-m}(\mathfrak{M}, b) = n-m. \tag{22}$$
Из (20) в силу предложений 2, 4 следует, что $\xi_i \in E_{n-m}(\mathfrak{M}, b)$ при всех $i \in \{m,...,n\}$. Получилось, что $n-m+1$ линейно независимых векторов $\xi_m,...,\xi_n$ содержатся в векторном пространстве $E_{n-m}(\mathfrak{M}, b)$, размерность которого, согласно (22), равна

$n-m<n-m+1$. Придя к противоречию, мы доказали предложение и в случае $m<n$. Предложение доказано.

ЛЕММА 4. *Для всякого* $b\in B$ *существует базис* $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}\in\Xi(b)$*, такой, что* $\lambda(\mathfrak{M},\xi_k)\leqslant\lambda_k(\mathfrak{M},b)$ *для всех* $k\in\{1,\dots,n\}$.

Доказательство. Пусть дано $b\in B$.

1) Согласно предложению 1, имеет место цепочка нестрогих включений $E_1(\mathfrak{M},b)\subset\dots\subset E_n(\mathfrak{M},b)$.

Положим $L_1=E_1(\mathfrak{M},b)$,

$$L_k=E_k(\mathfrak{M},b)/E_{k-1}(\mathfrak{M},b)\quad (k\in\{2,\dots,n\}).$$

Обозначим через φ_1 тождественное отображение $E_1(\mathfrak{M},b)$ на L_1 (т. е. на себя самого), а через φ_k $(k\in\{2,\dots,n\})$ — естественный эпиморфизм $E_k(\mathfrak{M},b)$ на L_k. Положим

$$r_k\overset{\text{def}}{=}\dim L_k\ \ (k\in\{1,\dots,n\}).$$

При всяком $k\in\{1,\dots,n\}$, таком, что $r_k\neq 0$, выберем в пространстве L_k какой-нибудь базис $\eta(k,1),\dots,\eta(k,r_k)$.

2) При всяком $k\in\{1,\dots,n\}$, таком, что $r_k\neq 0$, при всяком $i\in\{1,\dots,r_k\}$ в множестве $\varphi_k^{-1}\eta(k,i)$ (т.е. в полном прообразе вектора $\eta(k,i)$ при отображении φ_k) выберем любой вектор и обозначим его через $\xi(k,i)$. Хорошо известно (и легко доказывается), что совокупность так полученных векторов $\xi(k,i)$ является базисом слоя $p^{-1}(b)$.

3) Занумеровав векторы этого базиса в порядке невозрастания их показателей Ляпунова, получим некоторый базис $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}\in\Xi(b)$.

4) При всяком $i\in\{1,\dots,r_1\}$ (напомним, что $r_1=\dim E_1(\mathfrak{M},b)\neq 0$,— в этом состоит одно из утверждений предложения 1) векторы $\xi(1,i)$ лежат в $E_1(\mathfrak{M},b)$ согласно их определению. При всяком $k\in\{2,\dots,n\}$, таком, что $r_k\neq 0$, при всяком $i\in\{1,\dots,r_k\}$ имеем

$$\xi(k,i)\in E_k(\mathfrak{M},b)\setminus E_{k-1}(\mathfrak{M},b).$$

Это следует из того, что образ $\eta(k,i)=\varphi_k\xi(k,i)$ вектора $\xi(k,i)$ в фактор-пространстве $L_k=E_k(\mathfrak{M},b)/E_{k-1}(\mathfrak{M},b)$ отличен от нуля (поскольку этот образ есть по определению элемент базиса пространства L_k).

5) Из предыдущего пункта следует: а) r_1 векторов построенного базиса лежат в $E_1(\mathfrak{M},b)$, б) при всяком $k\in\{2,\dots,n\}$, таком, что $r_k\neq 0$, число векторов построенного базиса, лежащих в $E_k(\mathfrak{M},b)\setminus E_{k-1}(\mathfrak{M},b)$, равно r_k.

Добавим теперь к этому, что при всяком $k\in\{2,\dots,n\}$, таком, что $r_k=0$, число векторов построенного базиса, лежащих в $E_k(\mathfrak{M},b)\setminus E_{k-1}(\mathfrak{M},b)$, равно $0=r_k$. В самом деле,

$$r_k\overset{\text{def}}{=}\dim(E_k(\mathfrak{M},b)/E_{k-1}(\mathfrak{M},b)),$$

и потому из равенства $r_k=0$ следует, что теоретико-множественная разность $E_k(\mathfrak{M},b)\setminus E_{k-1}(\mathfrak{M},b)$ пуста.

6) Из предыдущего пункта следует, что при всяком $l\in\{1,\dots,n\}$ число векторов построенного базиса, лежащих в $E_l(\mathfrak{M},b)$, равно

$$\sum\nolimits_{k=1}^{l} r_k=\sum\nolimits_{k=1}^{l}\dim L_k=\dim E_1(\mathfrak{M},b)+$$

$$+\sum\nolimits_{k=2}^{l}(\dim E_k(\mathfrak{M},b)-\dim E_{k-1}(\mathfrak{M},b))=\dim E_l(\mathfrak{M},b).$$

7) Напомним, что

$$\lambda(\mathfrak{M},\xi_1)\geqslant\ldots\geqslant\lambda(\mathfrak{M},\xi_n) \tag{23}$$

(см. п. 3), — это и означает, что базис $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ принадлежит множеству $\Xi(b)$.

Предположим, что для некоторого $k\in\{1,\ldots,n\}$ имеет место строгое неравенство $\lambda(\mathfrak{M},\xi_k)>\lambda_k(\mathfrak{M},b)$. Тогда из (23) следует, что $\lambda(\mathfrak{M},\xi_i)>\lambda_k(\mathfrak{M},b)$ при всяком $i\in\{1,\ldots,k\}$. В силу предложения 3 это означает, что

$$\xi_i\notin E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)\ \ (i\in\{1,\ldots,k\}). \tag{24}$$

Имеет место неравенство

$$\dim E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)\geqslant n-k+1; \tag{25}$$

если $n-k+1\neq n$, то это неравенство следует из предложения 5, если же $n-k+1=n$, то (25) вытекает из равенства $E_n(\mathfrak{M},b)=p^{-1}(b)$, составляющего содержание одного из утверждений предложения 1. Из (24), (25) следует, что число векторов базиса $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$, лежащих в $E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)$, строго меньше $\dim E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)$. Это противоречит результату п.6. Противоречие выведено из предположения, что для некоторого $k\in\{1,\ldots,n\}$ выполнено строгое неравенство $\lambda(\mathfrak{M},\xi_k)>\lambda_k(\mathfrak{M},b)$. Следовательно, $\lambda(\mathfrak{M},\xi_k)\leqslant\lambda_k(\mathfrak{M},b)$ для всех $k\in\{1,\ldots,n\}$. Лемма доказана.

Прежде чем двинуться дальше, напомним, что нормальные базисы были определены в конце § 2 — см. определение 2.

Т Е О Р Е М А 1. *Пусть* $b\in B$. *Нормальные базисы слоя* $p^{-1}(b)$ *существуют. Базис* $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\in\Xi(b)$ *является нормальным в том и только в том случае, если* $\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)=\lambda_k(\mathfrak{M},b)$ *для всех* $k\in\{1,\ldots,n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1). В силу предложения 6 для всякого базиса $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}\in\Xi(b)$ имеют место неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)\geqslant\lambda_k(\mathfrak{M},b)\ \ \ (k\in\{1,\ldots,n\}). \tag*{106)}$$

В силу леммы 4 существует базис $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\in\Xi(b)$, для которого

$$\lambda(\mathfrak{M},\xi_k)\leqslant\lambda_k(\mathfrak{M},b)\ \ \ (k\in\{1,\ldots,n\}). \tag{27}$$

Фиксируем такой базис. Положив в (26) $\eta_k=\xi_k$ $(k\in\{1,\ldots,n\})$, получим $\lambda(\mathfrak{M},\xi_k)\geqslant\lambda_k(\mathfrak{M},b)$ $(k\in\{1,\ldots,n\})$. Отсюда в силу (27) следует

$$\lambda(\mathfrak{M},\xi_k)=\lambda_k(\mathfrak{M},b)\ \ (k\in\{1,\ldots,n\}). \tag{28}$$

Из фразы, содержащей формулу (26), в силу (28) вытекает следующее. Для всякого базиса $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}\in\Xi(b)$ имеют место неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)\geqslant\lambda(\mathfrak{M},\xi_k)\ \ \ (k\in\{1,\ldots,n\}).$$

Эти неравенства означают, что базис $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\in\Xi(b)$ является нормальным.

2) Пусть базис $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}\in\Xi(b)$ является нормальным, т.е. $\lambda(\mathfrak{M},\zeta_k)\geqslant\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)$ $(k\in\{1,\ldots,n\})$ для всякого базиса $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_n\}\in\Xi(b)$. Положив здесь $\zeta_k=\xi_k$ $(k\in\{1,\ldots,n\})$, где $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\in\Xi(b)$ — базис, удовлетворяющий равенствам (28), — существование этого базиса доказано в предыдущем пункте, получаем

$$\lambda_k(\mathfrak{M},b)\geqslant\lambda_k(\mathfrak{M},\eta_k)\ \ (k\in\{1,\ldots,n\}). \tag{29}$$

С другой стороны,

$$\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)\geqslant\lambda(\mathfrak{M},b)\ \ (k\in\{1,...,n\}) \tag{30}$$

в силу предложения 6. Из (29), (30) следует

$$\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)=\lambda_k(\mathfrak{M},b)\ \ (k\in\{1,...,n\}). \tag{31}$$

3) Пусть базис $\{\eta_1,...,\eta_n\}\in\Xi(b)$ удовлетворяет равенствам (31). В силу предложения 6 для всякого базиса $\{\zeta_1,...,\zeta_n\}\in\Xi(b)$ имеют место неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M},\zeta_k)\geqslant\lambda_k(\mathfrak{M},b)\ \ (k\in\{1,...,n\}). \tag{32}$$

Из (31), (32) следует

$$\lambda(\mathfrak{M},\zeta_k)\geqslant\lambda_k(\mathfrak{M},\eta_k)\ \ (k\in\{1,...,n\}). \tag{33}$$

Доказав формулу (33) для всякого базиса $\{\zeta_1,...,\zeta_n\}\in\Xi(b)$, мы доказали, что базис $\{\eta_1,...,\eta_n\}\in\Xi(b)$ является нормальным. Теорема доказана.

§ 5.1. Прежде чем закончить абстрактное изложение и перейти к конкретизации, обсудим одну деталь. Даже при поверхностном сравнении определения 2 с определением нормальной фундаментальной системы решений линейной системы дифференциальных уравнений, воспроизведенным в § 1, легко заметить, что в обоих случаях нормальный базис определяется как наименьший элемент множества базисов, однако отношение предпорядка в одном случае отличается от отношения предпорядка в другом случае. Рассмотрения настоящего параграфа направлены на то, чтобы показать, что эта несогласованность в определениях — лишь кажущаяся. Впрочем, поспешим заметить, что только что написанное соображение носит сугубо предварительный характер. Для настоящего, а не поверхностного сравнения упомянутых определений почва пока не подготовлена. Для подготовки следует вложить ситуацию § 1 в ситуацию, рассмотренную в § 2—4, а этим мы займемся лишь в следующем параграфе.

2. ТЕОРЕМА 2. *Для всяких* $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$ *имеет место равенство*

$$\lambda_k(\mathfrak{M},b)=\max_{\xi\in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)}\lambda_k(\mathfrak{M},\xi).$$

Эта теорема доказана в [2] — см. предложение 2 цитируемой статьи.

3. Начиная с этого места и до конца параграфа считаем фиксированной некоторую точку $b\in B$. Наложим ограничение на семейство $\mathfrak{M}$: потребуем, чтобы показатель Ляпунова всякого ненулевого вектора слоя $p^{-1}(b)$ был числом, а не символом $-\infty$ или $+\infty$:

$$\lambda(\mathfrak{M},\xi)\in\mathbf{R}\ \text{ для всякого }\ \xi\in p^{-1}(b)_*.$$

Это ограничение, которое будет предполагаться выполненным на протяжении всей оставшейся части § 5, приводит к тому, что

$$\lambda_k(\mathfrak{M},b)\in\mathbf{R}\ \ (k\in\{1,...,n\}).$$

Последнее вытекает из наложенного ограничения в силу теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $b\in B$. *Пусть* $\lambda(\mathfrak{M},\xi)\in\mathbf{R}$ *для всякого* $\xi\in p^{-1}(b)_*$. *Тогда базис* $\{\eta_1,...,\eta_n\}\in\Xi(b)$ *является нормальным в том и только в том случае, если для всякого базиса* $\{\xi_1,...,\xi_n\}\in\Xi(b)$ *имеет место неравенство*

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n}\lambda(\mathfrak{M},\zeta_k)\geqslant\sum\nolimits_{k=1}^{n}\lambda(\mathfrak{M},\eta_k). \qquad 114)$$

Доказательство. 1) Пусть $\{\eta_1,...,\eta_n\}\in\Xi(b)$ — нормальный базис. Согласно определению 2, это означает, что для всякого $\{\zeta_1,...,\zeta_n\}\in\Xi(b)$ имеют место неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M},\zeta_k)\geqslant\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)\ \ (k\in\{1,...,n\}).$$

Сложив эти неравенства, получаем (34).

2) Пусть базис $\{\eta_1,...,\eta_n\}\in\Xi(b)$ таков, что для всякого базиса $\{\zeta_1,...,\zeta_n\}\in\Xi(b)$ выполнено (34). Пусть $\{\xi_1,...,\xi_n\}\in\Xi(b)$ — нормальный базис; в силу теоремы 1 такой базис существует и для него имеет место формула

$$\lambda(\mathfrak{M},\xi_k)=\lambda(\mathfrak{M},b)\ \ (k\in\{1,...,n\}). \tag{35}$$

Положив в (34) $\zeta_k=\xi_k$ $(k\in\{1,...,n\})$ и воспользовавшись равенствами (35), получим

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n}\lambda_k(\mathfrak{M},b)\geqslant\sum\nolimits_{k=1}^{n}\lambda(\mathfrak{M},\eta_k). \tag{36}$$

В силу предложения 6 имеют место неравенства

$$\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)\geqslant\lambda_k(\mathfrak{M},b)\ \ (k\in\{1,...,n\}).$$

Если бы хоть одно из этих неравенств было строгим, то, сложив их, мы получили бы строгое неравенство

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n}\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)>\sum\nolimits_{k=1}^{n}\lambda_k(\mathfrak{M},b),$$

которое противоречит неравенству (36). Следовательно,

$$\lambda(\mathfrak{M},\eta_k)=\lambda_k(\mathfrak{M},b)\ \ (k\in\{1,...,n\}).$$

В силу теоремы 1 отсюда следует, что базис $\{\eta_1,...,\eta_n\}\in\Xi(b)$ является нормальным. Теорема доказана.

§ 6. Закончив на этом абстрактное изложение, вернемся к ситуации, рассматривавшейся А. М. Ляпуновым [1].

Пусть дана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}}=A(t)\mathfrak{x}.$$

Здесь $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbf{R}^+\to\mathrm{End}\,E^n$, где $\mathrm{End}\,E^n$ — множество всех линейных преобразований евклидова пространства E^n.

Описав таким образом фон, на котором развиваются построения А. М. Ляпунова, мы не будем далее воспроизводить его построения непосредственно в том виде, в каком читатель может познакомиться с ними по классическому изложению [1], а опишем, как аранжировать элементы этого фона, чтобы образовать одну из возможных конкретизации абстрактной ситуации, взятой за основу изложения в этой статье. Вот как мы поступим.

1. Для построения (абстрактного) векторного расслоения (E,p,B) положим $E=E^n$; в качестве базы B возьмем множество из одного элемента — обозначим его через $\{b\}$, указывая этим, что его единственная точка обозначается через b; наконец, пусть отображение p (проекция) по определению переводит всякую точку $\mathfrak{x}\in E^n$ в точку b. Таким образом, $p^{-1}(b)=E^n$.

2. Скалярное произведение на $E^n=p^{-1}(b)$ задано — это и есть риманова метрика на построенном в предыдущем пункте абстрактном векторном расслоении.

3. При всяком $t\in\mathbf{R}^+$ рассмотрим отображение $\mathfrak{X}(t,0)$, ставящее в соответствие значению всякого решения системы $\dot{\mathfrak{x}}=A(t)\mathfrak{x}$ в точке 0 значение того же решения в точке t.

3. При всяком $t\in\mathbf{R}^+$ определим пару отображений $X_t:E\to E$, $\chi_t:B\to B$ следующим образом:

$$X_t=\mathfrak{X}(t,0),\ \chi_t=1_B.$$

Так как база B состоит из единственной точки, то при всяком $t\in\mathbf{R}^+$ так определенная пара отображений (X_t,χ_t) удовлетворяет равенству $pX_t=\chi_t p$, что вместе со свойством линейности сужения $X_t(t\in\mathbf{R}^+)$ на слой $p^{-1}(b)$, вытекающей из линейности отображений $\mathfrak{X}(t,0)$ $E^n\to E^n(t\in\mathbf{R}^+)$, означает, что при всяком $t\in\mathbf{R}^+$ пара отображений (X_t, χ_t) является эндоморфизмом построенного абстрактного векторного расслоения (E, p, B). Изложенная конструкция позволяет применить определения и результаты этой статьи к системе $\dot{\mathfrak{x}} = A(t)\mathfrak{x}$.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.04.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ляпунов А. М. Собр. соч. Т. 2.—М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

[2] Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения.— Математические заметки, 1985, т. 38, вып. 1, с. 92—109.

[3] Бурбаки Н. Теория множеств.— М.: Мир, 1965.