УДК 517.9

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕАВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Миллионщиков

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 147
Глава I. Спектр. Грубый спектр. Максимальные и минимальные показатели. . . 149
§ 1. К общей теории неавтономных систем 149
§ 2. Возмущения линейных систем, сохраняющие предельные решения 150
§ 3. Леммы I. 152
§ 4. Леммы II 162
§ 5. Спектр. Максимальные и минимальные показатели 169
§ 6. Грубый спектр. Максимальные и минимальные показатели 171
§ 7. Устойчивость включения $\Lambda \subseteq [\omega_0 \Omega_0]$ 174
Глава II. Системы с замедляющимися коэффициентами (системы со слабой вариацией в бесконечности по К. П. Персидскому) 175
Глава III. Примеры 181
Литература 186

Введение

А. М. Ляпунов (см. [1], стр. 182 — 199) ввел понятие характеристического показателя (характеристический показатель знаком отличается от характеристичного числа) решений системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x (\|A(t)\| \leqslant a;\ A(t) \text{ — непрерывна по } t;\ t \geqslant t_0) \qquad \text{(I)}$$

в n-мерном евклидовом пространстве. ($\|A\|$ — норма оператора A в этом пространстве.) Совокупность характеристических показателей решений системы (I), как показал Перрон (см. [5], [1], стр. 199), вообще говоря, неустойчива (и потому на самом деле не характеризует систему): для некоторых систем (I) существуют системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(y,t), \|\varphi(y,t)\| \leqslant g(t)\|y\| \qquad \text{(II)}$$

$\varphi(y,t)$ — непрерывна по (y,t), со сколь угодно малой $\sup\limits_{t \geqslant t_0} g(t)$, у которых совокупность характеристических показателей сильно отличается от совокупности характеристических показателей системы (I).

С момента появления этого результата Перрона началось развитие теории характеристических показателей в следующем направлении: стали искать класс систем (I), для которых совокупность характеристических показателей устойчива. После проверки гипотезы, возникшей из примера Перрона (см. [15]) и оказавшейся неверной (см. [12]), в работах Б. Ф. Былова, Р. Э. Винограда, Д. М. Гробмана [7], [8], [13], [16], [17] — [20] были найдены эти системы. Это — системы с условием «интегральной разделенности». Окончательный результат см. в [13], [16]. После этих результатов весьма близкие к ним результаты опубликованы Лилло (J. C. Lillo) [23].

В настоящей работе делается попытка провести исследование в другом направлении: «подправить» понятие совокупности характеристических показателей так, чтобы оно давало устойчивую характеристику любой системы (I).

На этом пути мы приходим к понятию грубого действительного спектра системы (I), которое вводится и изучается в главе I настоящей работы. Это понятие существенно использует понятие предельного решения неавтономной системы дифференциальных уравнений, идея которого в общем случае принадлежит В. В. Немыцкому. Поэтому в § 1 главы I приводится определение (определение 1.1) предельного решения из [26] и формулировки (теоремы 1.1 и 1.2) результатов работы [26], раскрывающих значение этого понятия.

В § 2 главы I доказана теорема (теорема 1.3), дающая условие на $g(t)$, при котором множество предельных решений системы (II) совпадает с множеством предельных решений системы (I) (для этого достаточно, например, $g(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$).. В § 3, 4 главы I собраны леммы, на которые я опираюсь в дальнейшем.

В § 5 главы I вводится понятие действительного спектра системы (I) (определение 1.3) и доказывается теорема (теоремы 1.4, 1.5) о связи действительного спектра с верхним Ω_0 и нижним ω_0 особыми показателями Персидского — Крейна. Затем в § 5 вводится понятие (определение 1.4) максимального $\overline{\lambda}$ и минимального $\underline{\lambda}$ показателя обобщенного (т. е. обычного, сдвига обычного, или предельного) решения системы (I) и доказывается (теорема 1.6), что для всякого обобщенного решения $\overline{\lambda}$ и $\underline{\lambda}$ принадлежат действительному спектру.

§ 6 является основным. В нем вводится понятие грубого спектра системы (I) (определение 1.5) и доказываются признаки (теоремы 1.7, 1.8), по которым можно установить принадлежность данного числа грубому спектру; доказывается (теорема 1.9), что для всякого обобщенного решения $\overline{\lambda}$ и $\underline{\lambda}$ принадлежат грубому спектру; теорема 1.10 устанавливает, что верхний и нижний особые показатели Персидского — Крейна принадлежат грубому спектру. (Теоремы 1.9 и 1.10 доказаны для систем (I) из некоторого класса R.)

В § 7 (теорема 1.11) доказано, что при достаточно «малой» $g(t)$ (точнее, если выполнено (1.3.1) с $0<\delta<\delta(\varepsilon)$) характеристические показатели всех обобщенных решений системы (II) лежат в интервале $(\omega_0-\varepsilon,\Omega_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ — произвольное наперед заданное число.

Глава II посвящена изучению систем со слабой вариацией в бесконечности по К. П. Персидскому. Для этих систем результаты носят вполне законченный характер (теорема 2.3) и позволяют эффективно вычислять спектр и грубый спектр; это вычисление проведено для примера из [1], стр. 199, являющегося видоизменением классического примера Перрона. Хотя вблизи характеристического показателя λ обычного решения системы в этом примере может не найтись характеристического показателя обычного решения системы (II) при «сколь угодно малой» $g(t)$ (см. [1], стр. 199), но, как показывает теорема 2.3, в этом случае вблизи λ найдётся характеристический показатель предельного решения системы (II).

Глава III состоит из примеров, показывающих, что теоремы глав I и II не могут быть существенно усилены.

В заключение выражаю благодарность В. В. Немыцкому за постановку задачи, результат решения которой сформулирован в § 1 главы I (теоремы 1.1 и 1.2), и за внимание к настоящей работе.

Основные результаты работы опубликованы в [28].

Обозначение. Везде в дальнейшем номера формул под или над знаком равенства или неравенства означают, что это равенство или неравенство получается с помощью этих формул.

ГЛАВА I

СПЕКТР. ГРУБЫЙ СПЕКТР. МАКСИМАЛЬНЫЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ

§ 1. К общей теории неавтономных систем

Как указано во введении, в дальнейшем существенно используется понятие предельного решения неавтономной системы дифференциальных уравнений, идея которого в общем случае принадлежит В. В. Немыцкому. Мы пользуемся следующим определением.

Определение 1.1. [26]. Дана система

$$\frac{dx}{dt}=f\left(x,t\right) \text{ в } E^n \qquad \left(t\geqslant t_0\right) \tag{1.1.1}$$

Пусть $x_k\left(t\right)$ — решение этой системы, $\left(k=1,2,...\right)$ пусть $t_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$ и пусть последовательность функций $x_k\left(t_k+t\right)$ при $k\to\infty$ сходится равномерно на каждом отрезке к некоторой функции $x^*\left(t\right)$. Тогда $x^*\left(t\right)$ называется предельным решением системы (1.1.1). Обычные решения, их сдвиги и предельные решения будем называть обобщенными решениями.

Обобщенные решения играют, как показывает дальнейшее, весьма существенную роль в общей теории неавтономных систем (см. [26]). Для динамических систем

$$\frac{dx}{dt}=f\left(x\right) \tag{1.1.2}$$

известна, например, теорема Г. Д. Биркгофа о том, что в каждом компактном инвариантном множестве существует рекуррентная траектория (см. [1], глава V, § 7). Если же система (1.1.2) устойчива по Ляпунову, то эта траектория — почти периодическая (см. [1], глава V, § 8). Для неавтономных систем (1.1.1) это неверно, если рассматривать только обычные решения. Но если, следуя идее В. В. Немыцкого, рассматривать обобщенные решения (определение 1.1), то аналоги этих теорем имеют место (в дальнейшем предполагается, что $f\left(x,t\right)$ непрерывна и $\left\|f\left(x_0\left(t\right),t\right)\right\|\leqslant \text{const}$ при $t\geqslant t_0$).

Теорема 1.1 [26]. *Пусть существует решение $x_0\left(t\right)$ системы* (1.1.1), *ограниченное при $t\geqslant t_0$. Тогда найдется рекуррентное предельное решение $x^*\left(t\right)$ системы* (1.1.1), *определенное на всей прямой.*

Определение 1.2. Решение $x_0\left(t\right)$ $\left(t\geqslant t_0\right)$ системы (1.1.1) назовем устанавливающимся (в [26] дано вместо этого несколько иное определение), если для всякого $\varepsilon>0$ и всякого $T<0$ найдутся $\delta>0$ и $\overline{t}$ такие, что если $t''\geqslant t'\geqslant \overline{t}$, $\left\|x_0\left(t'\right)-x_0\left(t''\right)\right\|<\delta$, то $\left\|x_0\left(t'+t\right)-x_0\left(t''+t\right)\right\|<\varepsilon$ при всех $t\geqslant T$.

Теорема 1.2 [26]. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *и пусть $x_0\left(t\right)$ — устанавливающееся решение. Тогда рекуррентное предельное решение $x^*\left(t\right)$ является почти периодическим.*

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 я опускаю.

Физический смысл предельных решений состоит в следующем. Пусть система (1.1.1) описывает некоторую материальную (как говорят, «физическую») систему. При измерении величины x мы ограничены временем, и точность измерений ограничена «снизу»; поэтому траекторию предельного решения мы не отличим от траектории обычного решения, если $t>$ некоторого t_1 (система достаточно «старая») (предполагается, что нас не интересует начало отсчета времени на каждом решении — этот смысл и вкладывается в слова «траектория решения»). Как этот физический смысл, так и теоремы 1.1 и 1.2 показывают, что нецелесообразно рассматривать только обычные решения неавтономных систем, не включая в рассмотрение предельных решений.

§ 2. Возмущения линейных систем, сохраняющие предельные решения

Из теоремы 1 работы [27] видно, что для совпадения асимптотик решений систем (I) и (II) иногда необходимо требовать экспоненциального убывания $g(t)$. Следующая теорема показывает, что совокупность предельных решений гораздо более устойчива.

Т е о р е м а 1.3 [28]. *Пусть*

$$g(t)=g_1(t)+g_2(t) \quad g_1(t)\underset{t\to+\infty}{\to}0 \qquad \int^{+\infty} g_2(\tau)d\tau<\infty. \tag{1.2.1}$$

Тогда множество предельных решений системы (II) *совпадает с множеством предельных решений системы* (I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (I). Имеем (см., например, [1], стр. 19, лемма 1)

$$\left\|X(t)X^{-1}(\tau)\right\|\leqslant e^{a|t-\tau|} \tag{1.2.2}$$

1°. Пусть

$$y^*(t)=\lim_{k\to\infty}y_k(t_k+t) \tag{1.2.3}$$

($t_k\underset{k\to\infty}{\to}+\infty$, предел равномерный на отрезках) — предельное решение системы (II).

Рассмотрим при каждом $k=1,2,...$ решение $x_k(t)$ системы (I), удовлетворяющее уравнению

а) $$y_k(t)=x_k(t)+\int_{t_k}^{t}X(t)X^{-1}(\tau)\varphi\big(y_k(\tau),\tau\big)d\tau \tag{1.2.4}$$

Пусть задано произвольное $T>0$. Имеем при $-T\leqslant t\leqslant T$:

а) $$\left\|y_k(t_k+t)\right\|\leqslant K<\infty \tag{1.2.5}$$

(так как в (1.2.3) сходимость равномерная на каждом отрезке),

$$\left\|x_k(t_k+t)-y_k(t_k+t)\right\|\underset{(1.2.4)}{=}\left\|\int_{t_k}^{t_k+t}X(t_k+t)X^{-1}(\tau)\varphi\big(y_k(\tau),\tau\big)d\tau\right\|=$$

$$=\left\|\int_0^t X(t_k+t)X^{-1}(t_k+\theta)\varphi\big(y_k(t_k+\theta),t_k+\theta\big)d\theta\right\|\leqslant$$

$$\underset{\substack{(1.2.2)\\(1.2.5)}}{\leqslant}K\cdot e^{aT}\int_{-T}^{T}g(t_k+\theta)d\theta\underset{(1.2.1)}{\leqslant}K\cdot e^{aT}\left[\int_{-T}^{T}g_1(t_k+\theta)d\theta+\int_{t_k-T}^{+\infty}g_2(\tau)d\tau\right]\overset{(1.2.1)}{\underset{k\to\infty}{\to}}0.$$

Отсюда и из (1.2.3) следует, что $x_k(t_k+t)$ сходится равномерно на отрезках к $y^*(t)$, т. е. является $y^*(t)$ предельным решением системы (I).

2°. Пусть

$$x^*(t)=\lim_{k\to\infty}x_k(t_k+t) \tag{1.2.6}$$

($t_k\underset{k\to\infty}{\to}+\infty$, предел, равномерный на отрезках) — предельное решение системы (I). Рассмотрим при каждом $k=1,2,...$ решение $y_k(t)$ системы (II), удовлетворяющее (1.2.4). Пусть задано произвольное $T>0$. Из (1.2.4) и (1.2.6) следует, что

$$y_k(t_k)\underset{k\to\infty}{\to}x^*(0)$$

поэтому $\left\|y_k\left(t_k\right)\right\| \leqslant K_1 < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots)$. Отсюда, из оценки (см., например, [1], стр. 19, лемма 1)

$$\left\|y_k\left(t_k + t\right)\right\| \leqslant e^{at + \int\limits_{t_k}^{t_k+t} g(\tau)d\tau} \left\|y_k\left(t_k\right)\right\|$$

и из (1.2.1) вытекает при $-T \leqslant t \leqslant T$

$$\left\|y_k\left(t_k + t\right)\right\| \leqslant K < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Теперь применимы рассуждения пункта 1° б) доказательства настоящей теоремы, поэтому

$$\left\|y_k\left(t_k + t\right) - x_k\left(t_k + t\right)\right\| \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

равномерно на $\left[-T, T\right]$. Так как T произвольно, то из (1.2.6) следует

$$y_k\left(t_k + t\right) \underset{k\to\infty}{\to} x^*\left(t\right)$$

равномерно на отрезках, т. е. $x^*\left(t\right)$ является предельным решением системы (II).

§ 3. Леммы I

В дальнейшем часто встречается условие «малости возмущения»

$$\left.\begin{aligned} &g\left(t\right) = g_1\left(t\right) + g_2\left(t\right), \\ &g_1\left(t\right), \quad \int\limits_t^{+\infty} g_2\left(\tau\right)d\tau < \infty \quad \left(t \geqslant t_0\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.3.1}$$

Из (1.3.1) вытекает существование $t_\delta \geqslant t_0$ такого, что

$$\left.\begin{aligned} &g\left(t\right) = g_1\left(t\right) + g_2\left(t\right), \\ &g_1\left(t\right) < \delta, \quad \int\limits_t^{+\infty} g_2\left(\tau\right)d\tau < \delta \quad \left(t \geqslant t_\delta\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.3.2}$$

Везде в § 3, к р о м е в с п о м о г а т е л ь н о й т е о р е м ы , мы предполагаем, что система (I) диагональная, т. е.

$$A\left(t\right) = \operatorname{diag}\left\{p_1\left(t\right), \ldots, p_n\left(t\right)\right\}$$

Л е м м а 1.1 (близкое утверждение см. в [27]). *Пусть* $x\left(t\right)$ *— некоторое решение системы* (I) *и пусть для всех* $t \geqslant t_0$

$$\left|\int\limits_{t_i}^{t} g\left(\tau\right)\exp\left[\int\limits_{\tau}^{t} p_i\left(\xi\right)d\xi\right]\cdot\left[\left\|x\left(\tau\right)\right\| + r\left(\tau\right)\right]d\tau\right| \leqslant \frac{r\left(t\right)}{n} \tag{1.3.3}$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

где $r\left(t\right) \geqslant 0$ *— некоторая непрерывная функция, а* t_i *— некоторые числа,* $t_0 \leqslant t_i \leqslant +\infty$. *Тогда существует решение* $y\left(t\right)$ *системы* (II) *такое, что*

$$\left\|y\left(t\right) - x\left(t\right)\right\| \leqslant r\left(t\right) \quad \left(t \geqslant t_0\right) \tag{1.3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим систему

$$z_i\left(t\right) = \int\limits_{t_i}^{t} \exp\left[\int\limits_{\tau}^{t} p_i\left(\xi\right)d\xi\right]\varphi_i\left[x\left(\tau\right) + z\left(\tau\right), \tau\right]d\tau \tag{1.3.5}$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

(Если $z\left(t\right)$ — решение этой системы, то $y\left(t\right) = x\left(t\right) + z\left(t\right)$ — решение системы (II) (см., например, [1], стр.172).)

Правые части равенств (1.3.5) определяют оператор $F\{z(t)\}$ на множестве T непрерывных функций $z(t)$, определенных при $t \geqslant t_0$ и удовлетворяющих неравенству $\|z(t)\| \leqslant r(t)$.

Мы будем рассматривать T как множество в локально выпуклом пространстве L непрерывных функций $z(t)$, определенных при $t \geqslant t_0$, с топологией равномерной сходимости на отрезках T выпукло и замкнуто в L.

1°. F непрерывен в L и $\overline{F\{T\}}$ бикомпактно в L.

(Это соображение впервые использовано, по-видимому, А. Стоксом (см. [29]). Строгое доказательство см. в [25], лемма 3.3 (лемма 3 в [24]), в которой надо заменить множество $M \times S$ на (произвольное) $T \subseteq E \times S$, а множество $M \times B$ на $T \cap (E \times B)$, на доказательство это не влияет; эта лемма 3.3 доказывает, что каждый оператор $F_i\{z(t)\} = \left(F\{z(t)\}, e_i\right)e_i$, где $e_i = (0,...,1,...,0)$ (1 стоит на i-м месте) непрерывен и $\overline{F_i\{T\}}$ бикомпакт; отсюда вытекает наше утверждение.)

2°. $F\{T\} \subseteq T$.

В самом деле, пусть $z(t) \in T$, тогда

$$\|F\{z(t)\}\| \underset{(1.3.5)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_i}^{t} g(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^{t} p_i(\xi)\,d\xi\right] \left(\|x(\tau)\| + \|z(\tau)\|\right) d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_i}^{t} g(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^{t} p_i(\xi)\,d\xi\right] \left(\|x(\tau)\| + r(\tau)\right) d\tau \right| \underset{(1.3.3)}{\leqslant} r(\tau), \quad \text{т.е.} \quad F\{z(t)\} \in T$$

Мы находимся в условиях принципа Тихонова [30], следовательно, существует $z(t) \in T$, такая, что $F\{z(t)\} = z(t)$, а тогда — $y(t) = x(t) + z(t)$ искомое решение системы (II). Лемма доказана.

Л е м м а 1.2 (близкое утверждение см. в [27]). *Обозначим*

$$P_i(t,\tau) = \exp\left[\int_{\tau}^{t} p_i(\xi)\,d\xi\right]. \qquad (1.3.6)$$

Пусть для некоторой непрерывной функции $h(t) > 0$ *выполнено условие: для всякого* $i = 1, 2, ..., n$ *либо*

$$\frac{h(t)}{h(\tau)} \geqslant C_\eta e^{-\eta(t-\tau)} P_i(t,\tau) \qquad (1.3.7)$$

(для всякого $\eta > 0$ *и всех* $t \geqslant \tau \geqslant t_0$; $C_\eta = \text{const} > 0$), *либо*

$$\frac{h(t)}{h(\tau)} \leqslant C e^{-\eta_0(t-\tau)} P_i(t,\tau) \qquad (1.3.8)$$

(для некоторого $\eta_0 > 0$ *и всех* $t \geqslant \tau \geqslant t_0$; $C = \text{const}$), *причем при* $i = 1$ *выполнено* (1.3.7). *Тогда для всякого* $\varepsilon \in (0, \eta_0)$ *существует такое* $\delta > 0$, *что если выполнено* (1.3.1), *то выполнены условия леммы 1.1 для некоторого* t_δ *вместо* t_0,

$$r(t) = h(t)e^{\varepsilon t} \qquad (1.3.9)$$

$$x(t) = \left(\exp\int_{t_0}^{t} p_i(\tau)\,d\tau, 0, ..., 0\right) \qquad (1.3.10)$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon \in (0, \eta_0)$. Из (1.3.7) при

$$i = 1 \quad \tau = t_0 \quad \eta = \varepsilon$$

имеем

$$\|x(t)\| \underset{\substack{(1.3.10)\\(1.3.6)}}{=} P_1(t, t_0) \leqslant \frac{1}{C_\varepsilon h(t_0) e^{\varepsilon t_0}} h(t) e^{\varepsilon t},$$

т. е.

$$\|x(t)\| \leqslant C'_\varepsilon h(t) e^{\varepsilon t}, \tag{1.3.11}$$

где

$$C'_\varepsilon = \frac{1}{C_\varepsilon h(t_0) e^{\varepsilon t_0}}.$$

Положим

$$\delta = \min\left\{ \frac{\varepsilon C_{\frac{\varepsilon}{2}}}{n(C'_\varepsilon + 1)(2+\varepsilon)}; \frac{\eta_0 - \varepsilon}{n(C'_\varepsilon + 1) C (\eta_0 - \varepsilon + 1)} \right\}. \tag{1.3.12}$$

Пусть выполнено (1.3.1). Возьмем t_δ такое, что выполнено (1.3.2). Положим $t_i = t_\delta$ для тех i, для которых выполнено (1.3.7) и

$$t_i = +\infty$$

для тех i, для которых выполнено (1.3.8).

Имеем для тех i, для которых выполнено (1.3.7), при $t_i \geqslant t_\delta$:

$$\left| \int_{t_i}^{t} g(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^{t} p_i(\xi) d\xi \right] \left(\|x(\tau)\| + r(\tau) \right) d\tau \right| \underset{\substack{(1.3.9)\\(1.3.11)\\(1.3.6)}}{\leqslant} \int_{t_\delta}^{t} g(\tau) P_i(t, \tau) (C'_\varepsilon + 1) h(\tau) e^{\varepsilon \tau} d\tau \leqslant$$

$$\underset{\substack{(1.3.7)\\ \text{при } \eta = \frac{\varepsilon}{2}}}{\leqslant} \int_{t_\delta}^{t} g(\tau) \frac{h(t)}{h(\tau)} \cdot \frac{1}{C_{\frac{\varepsilon}{2}}} e^{\frac{\varepsilon}{2}(t-\tau)} (C'_\varepsilon + 1) h(\tau) e^{\varepsilon \tau} d\tau = \frac{C'_\varepsilon + 1}{C_{\frac{\varepsilon}{2}}} h(t) e^{\frac{\varepsilon}{2} t} \int_{t_\delta}^{t} g(\tau) e^{\frac{\varepsilon}{2}\tau} d\tau \leqslant$$

$$\underset{(1.3.2)}{\leqslant} h(t) e^{\frac{\varepsilon}{2} t} \frac{C'_\varepsilon + 1}{C_{\frac{\varepsilon}{2}}} \delta \left[\frac{2}{\varepsilon} \left(e^{\frac{\varepsilon}{2} t} - e^{\frac{\varepsilon}{2} t_\delta} \right) + e^{\frac{\varepsilon}{2} t} \right] \leqslant h(t) e^{\varepsilon t} \cdot \delta \cdot \frac{C'_\varepsilon + 1}{C_{\frac{\varepsilon}{2}}} \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right) \underset{(1.3.12)}{\leqslant} \frac{1}{n} h(t) e^{\varepsilon t}$$

Для тех i, для которых выполнено (1.3.8), имеем: (при $t \geqslant t_\delta$)

$$\left| \int_{t_i}^{t} g(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^{t} p_i(\xi) d\xi \right] \left(\|x(\tau)\| + r(\tau) \right) d\tau \right| \underset{\substack{(1.3.6)\\(1.3.9)\\(1.3.11)}}{\leqslant} \int_{t}^{+\infty} g(\tau) P_i(t, \tau) (C'_\varepsilon + 1) h(\tau) e^{\varepsilon \tau} d\tau \leqslant$$

$$\underset{(1.3.8)}{\leqslant} (C'_\varepsilon + 1) C \cdot \int_{t}^{+\infty} g(\tau) \frac{h(t)}{h(\tau)} e^{\eta_0 (t - \tau)} h(\tau) e^{\varepsilon \tau} d\tau \underset{(1.3.2)}{\leqslant} (C'_\varepsilon + 1) C h(t) e^{\eta_0 t} \delta \left[\frac{e^{(\varepsilon - \eta_0) t}}{\eta_0 - \varepsilon} + e^{(\varepsilon - \eta_0) t} \right] =$$

$$= h(t) e^{\eta_0 t} \delta (C'_\varepsilon + 1) C \left[\frac{1}{\eta_0 - \varepsilon} + 1 \right] \underset{(1.3.12)}{\leqslant} \frac{1}{n} h(t) e^{\varepsilon t}$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть* $x(t)$ *— решение системы* (I), $\bar{x}(t)$ *— решение системы*

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -A^*(t) \bar{x} \tag{1.3.13}$$

(A^* *— матрица, транспонированная к* A *). Тогда при* $t \geqslant t_0$

$$\|x(t)\|\cdot\|\bar{x}(t)\|\geqslant\left|x(t_0),\bar{x}(t_0)\right| \tag{1.3.14}$$

Доказательство. Известно (см. [1], стр. 171), что если $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (I), $X(t_0)=E$, то

$$x(t)=X(t)x(t_0),\quad \bar{x}(t)=X^{*-1}(t)\bar{x}(t_0)$$

Отсюда

$$\|x(t)\|\cdot\|\bar{x}(t)\|\geqslant\left|\left(x(t),\bar{x}(t)\right)\right|=\left|\left(X(t)x(t_0),X^{*-1}(t)\bar{x}(t_0)\right)\right|=$$

$$=\left|X^{-1}(t)X(t)x(t_0),\bar{x}(t_0)\right|=\left|x(t_0),\bar{x}(t_0)\right|$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.4. *Пусть выполнены условия леммы* 1.2, *и пусть для некоторой непрерывной функции* $f(t)>0$ *выполнено условие: для всякого* $i=1,2,...,n$ *либо*

$$\frac{f(t)}{f(\tau)}\geqslant\hat{C}_\eta e^{\eta(t-\tau)}P_i(t,\tau) \tag{1.3.15}$$

(для всякого $\eta>0$ *и всех* $t\geqslant\tau\geqslant t_0$; $\hat{C}_\eta=\text{const}$), *либо*

$$\frac{f(t)}{f(\tau)}\geqslant\hat{C}e^{\eta_0(t-\tau)}P_i(t,\tau) \tag{1.3.16}$$

(*для некоторого* $\eta_0>0$ *и всех* $t\geqslant\tau\geqslant t_0$; $\hat{C}=\text{const}>0$), *причем при* $i=1$ *выполнено* (1.3.15).

Тогда для всякого $\varepsilon>0$ *существует такое,* $\delta>0$ *что если выполнено* (1.3.1), *то найдется решение* $y(t)$ *системы* (II), *удовлетворяющее неравенствам*

$$0<\bar{C}_{\varepsilon,t_\delta}f(t)e^{-\varepsilon t}\leqslant\|y(t)\|\leqslant\bar{C}_{\varepsilon,t_\delta}h(t)e^{\varepsilon t} \tag{1.3.17}$$

(t_δ *определяется из* (1.3.2)).

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что

$$f(t_0)>\sqrt{2}e^{\eta_0 t_0},\qquad h(t_0)<\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\eta_0 t_0} \tag{1.3.18}$$

(в противном случае достаточно умножить $f(t)$ и $h(t)$ на некоторые константы).

Пусть задано $\varepsilon>0$. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon\in(0,\eta_0)$. По леммам 1.2 и 1.1 существует $\delta>0$ такое, что если выполнено (1.3.1), то найдется решение $y(t)$ системы (II) такое, что при $t\geqslant t_\delta$ (t_δ определено из (1.3.2)) $\|y(t)-x(t)\|\leqslant h(t)e^{\varepsilon t}$, где $x(t)$ определено (1.3.10), откуда, в силу (1.3.11), при $t\geqslant t_0$

$$\|y(t)\|\leqslant C_{t_\delta}\cdot(C'_\varepsilon+1)h(t)e^{\varepsilon t}=\bar{\bar{C}}_{\varepsilon,t_\delta}h(t)e^{\varepsilon t} \tag{1.3.19}$$

Докажем, что найденное $y(t)$ удовлетворяет (1.3.17). Для этого рассмотрим систему (1.3.13) и систему (в дальнейших рассуждениях используется, в частности, принцип линейного включения Былова — Гробмана, см. [9])

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=-\left[A^*(t)+B^*(t)\right]\bar{y} \tag{1.3.20}$$

где

$$B(t)\bar{y}=\frac{\left(\bar{y},y(t)\right)}{\left(y(t),y(t)\right)}\varphi\left(y(t),t\right). \tag{3.21}$$

Имеем (см. [9])

$$\|B(t)\| \leqslant g(t) \tag{1.3.22}$$

Из условий (1.3.15), (1.3.16), (1.3.22) вытекает, что для систем (1.3.13) и (1.3.20) (вместо систем (I) и (II)) выполнены условия леммы 1.2 (может быть с другими константами) для решения

$$\bar{x}(t) = \left(\exp\left[-\int_{t_0}^{t} p_1(\xi)\, d\xi \right], 0, \ldots, 0 \right)$$

вместо $x(t)$ в (1.3.10) и функции $\dfrac{1}{f(t)}$ вместо $h(t)$.

По леммам 1.2 и 1.1 найдется решение $\bar{y}(t)$ системы (1.3.20), удовлетворяющее неравенству $\|\bar{y}(t) - \bar{x}(t)\| \leqslant \dfrac{1}{f(t)} e^{\varepsilon t}$ при $t \geqslant t_\delta$, причем (вместо (1.3.11)) выполнено

$$\|\bar{x}(t)\| \leqslant C_\varepsilon^* \frac{1}{f(t)} e^{\varepsilon t} \quad (t \geqslant t_\delta)$$

Отсюда

$$\|\bar{y}(t)\| \leqslant \widetilde{C}_{\varepsilon, t_\delta} \frac{1}{f(t)} e^{\varepsilon t} \ (t \geqslant t_0). \tag{1.3.23}$$

Так как в силу (1.3.21) $y(t)$ есть решение системы

$$\frac{dy}{dt} = -\left[A(t) + B(t) \right] y.$$

а $\bar{y}(t)$ — решение системы (1.3.20), то по лемме 1.3

$$\|y(t)\| \geqslant \frac{\left(y(t_0), \bar{y}(t_0) \right)}{\|\bar{y}(t)\|} \underset{(1.3.23)}{\geqslant} \frac{\left(y(t_0), \bar{y}(t_0) \right)}{\widetilde{C}_{\varepsilon, t_\delta}} f(t) e^{-\varepsilon t}. \tag{1.3.24}$$

Теперь заметим, что

$$\bar{x}(t_0) = x(t_0) = (1, 0, \ldots, 0), \tag{1.3.25}$$

$$\|y(t_0) - x(t_0)\| \leqslant h(t_0) e^{\varepsilon t_0} \underset{(1.3.18)}{<} \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{1.3.26}$$

$$\|\bar{y}(t_0) - \bar{x}(t_0)\| \leqslant \frac{1}{f(t_0)} e^{\varepsilon t_0} \underset{(1.3.18)}{<} \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1.3.27}$$

Из (1.3.25) — (1.3.27) вытекает, что $\left(y(t_0), \bar{y}(t_0) \right) \neq 0$, а значит из (1.3.24) имеем

$$\|y(t)\| \geqslant \bar{C}_{\varepsilon, t_\delta} f(t) e^{-\varepsilon t} > 0.$$

Сопоставляя это с (1.3.19), получаем (1.3.17), что и требовалось доказать.

В с п о м о г а т е л ь н а я т е о р е м а. *Пусть*

$$x^*(t) = \lim_{k \to \infty} x_k(t_k + t) \qquad (t_k \geq 0)$$

(*предел равномерный на отрезках при* $t \geqslant t_0$, $x_k(t)$ *— обычные решения системы* (I)) *— обобщенное решение системы* (1) (*предельное, если* $\{t_k\}$ *неограничена сверху, обычное или сдвиг обычного, если* $t_k \underset{k \to \infty}{\not\to} +\infty$). *Приведем систему*

$$\frac{dx}{dt} = A(t_k + t)x$$

перроновским преобразованием $u = U^{(k)}(t)x$ *к треугольному виду* (см. [6], [11], [22]):

$$\frac{du}{dt} = B^{(k)}(t)u, \qquad B^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)}(t) & \dots & b_{1n}^{(k)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_{nn}^{(k)}(t) \end{pmatrix} \tag{1.3.28}$$

При этом

$$\left\| B^{(k)}(t) \right\| \leqslant b, \tag{1.3.29}$$

$$\left\| \dot{U}^{(k)}(t) \right\| \leqslant c \tag{1.3.30}$$

(см., например, [11]).

Пусть преобразование $U^{(k)}(t)$ *приводит систему*

$$\frac{dy}{dt} = A(t_k + t)y + \varphi(y, t_k + t). \tag{1.3.31}$$

К виду

$$\frac{dv}{dt} = B^{(k)}(t)v + \psi^{(k)}(v, t), \tag{1.3.32}$$

при этом в силу ортогональности $U^{(k)}(t)$

$$\left\| \psi^{(k)}(v, t) \right\| \leqslant g(t_k + t) \cdot \|v\|. \tag{1.3.33}$$

Пусть

$$\left\| x(t_k + t) \right\| = e^{\int_0^t b_{11}^{(k)}(\tau) d\tau} \left\| x_k(t_k) \right\| \tag{1.3.34}$$

(*т. е.* $\dfrac{1}{\left\| x_k(t_k) \right\|} x_k(t_k + t)$ *выбираем за первый базисный вектор при построении преобразования* $U^{(k)}(t)$).

Обозначим

$$B_i^{(k)}(t, \tau) = \exp\left[\int_\tau^t b_{ii}^{(k)}(\xi)\, d\xi \right]. \tag{1.3.35}$$

Из последовательности вектор-функций

$$\left\{ B_1^{(k)}(t, \tau); B_2^{(k)}(t, \tau); \dots; B_n^{(k)}(t, \tau) \right\}$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

по теореме Асколи (см. [4], стр. 43) *можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на прямоугольниках. Для простоты обозначений считаем, что сама эта последовательность сходится равномерно на прямоугольниках к некоторой вектор-функции*

$$\{B_1(t,\tau); B_2(t,\tau); ...; B_n(t,\tau)\}.$$

Пусть существуют гладкие функции $h(t)>0$ *и* $f(t)>0$ *такие, что*

$$\left|\frac{f'(t)}{f(\tau)}+\frac{h'(t)}{h(\tau)}\right| \leqslant \text{const}, \text{ и}$$

1) *для всякого* $i=1,2,...,n$ *либо*

$$\frac{h(t)}{h(\tau)} \geqslant D_\eta e^{-\eta(t-\tau)} B_i(t,\tau). \quad (1.3.36)$$

(*для всякого* $\eta>0$ *и всех* $t \geqslant \tau \geqslant t_0$; $D_\eta = \text{const}>0$)*, либо*

$$\frac{h(t)}{h(\tau)} \leqslant De^{-\eta_0(t-\tau)} \cdot B_i(t,\tau) \quad (1.3.37)$$

(*для некоторого* $\eta_0>0$ *и всех* $t \geqslant \tau \geqslant t_0$; $D=\text{const}$;), *причем при* $i=1$ *выполнено* (1.3.36).

2) *для всякого* $i=1,2,...,n$ *либо*

$$\frac{f(t)}{f(\tau)} \leqslant \widehat{D}_\eta e^{\eta(t-\tau)} \cdot B_i(t,\tau) \quad (1.3.38)$$

(для всякого $\eta>0$ *и всех* $t \geqslant \tau \geqslant t_0$; $\widehat{D}_\eta = \text{const}$*), либо*

$$\frac{f(t)}{f(\tau)} \geq \widehat{D}e^{\eta_0(t-\tau)} \cdot B_i(t,\tau) \quad (1.3.39)$$

(для некоторого $\eta_0>0$ *и всех* $t \geqslant \tau \geqslant t_0$; $\widehat{D}=\text{const}>0$*), причем при* $i=1$ *выполнено* (1.3.38).

При выполнении всех перечисленных условий для всякого $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$ *такое, что если выполнено* (1.3.1), *то система* (II) *имеет обобщенное решение* $y^*(t)$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$0<\overline{C}_{\varepsilon,t_\delta} f(t)e^{-\varepsilon t} \leqslant \|y^*(t)\| \leqslant \overline{C}_{\varepsilon,t_\delta} h(t)e^{\varepsilon t} \quad (1.3.40)$$

($t_б$ определяется из (1.3.2)).

Доказательство. Считаем, что выполнено (1.3.18). (Это — не ограничение, ибо в противном случае можно умножить $f(t)$ и $h(t)$ на соответствующие константы.) Пусть дано $\varepsilon>0$. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon<\eta_0$. Сначала используем известное соображение, которое применяется в доказательстве теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению (см. [2], стр. 324); оно же использована в работе Р. Э. Винограда (см. [13], [16]). Это соображение состоит в том, что мы можем считать системы (1.3.28) диагональными. В самом деле, во-первых, $U^{(k)}(t)x_k(t_k+t)$ останется решением системы (1.3.28), если внедиагональные элементы матрицы $B^{(k)}(t)$ заменить нулями. Во-вторых, «σ-преобразованием» $\Sigma=\text{diag}\{\sigma^{n-1},\sigma^{n-2},...,1\}$ (см., например, [2], стр. 324) делаем внедиагональные члены матриц $B^{(k)}(t)$ меньше $b\sigma$ (см.

(1.3.29)) и включаем их в возмущение $\psi^{(k)}(v,t)$ в (1.3.32). От этого в (1.3.33) вместо $g(t_k+t)$ появится $b\sigma+g(t_k+t)\sigma^{1-n}$ (считаем, что $0<\sigma<1$). Поэтому если для возмущения данной системы выполнялось (1.3.1), соответственно (1.3.2), то для возмущения диагональной системы будет выполняться (1.3.1), соответственно (1.3.2) с числом $\delta_1=b\sigma+\delta\sigma^{1-n}$ вместо δ. Если положить $\sigma=\delta^{\frac{1}{n}}$, то $\delta_1\underset{\delta\to 0}{\to}0$. Итак, считаем, что матрицы $B^{(k)}(t)$ диагональные. Введем для каждого $T\geq t_0$ вспомогательные системы:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=B_T^{(k)}(t)\tilde{u}, \tag{1.3.41}$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=B_T^{(k)}(t)\tilde{u}+\psi^{(k)}(\tilde{v},t), \tag{1.3.42}$$

где матрица $B_T^{(k)}(t)$ определяется так:

$$B_T^{(k)}(t)=\begin{cases}B_T^{(k)}(t) & \text{при}\quad t_0\leqslant t\leqslant T,\\ B(t) & \text{при}\quad t\geqslant T+1,\end{cases} \tag{1.3.43}$$

а при $T<t<T+1$ $B_T^{(k)}(t)$ доопределяется линейно:

$$B_T^{(k)}(t)=(t-T)B(T+1)+(T+1-t)B^{(k)}(T). \tag{1.3.44}$$

Здесь

$$B(t)=\operatorname{diag}\{b_1(t),b_2(t),...,b_n(t)\}, \tag{1.3.45}$$

$$b_i(t)=\begin{cases}b(t), & \text{если для } i \text{ выполнены } (1.3.36) \text{ и } (1.3.38)\ (i\in I_1),\\ b, & \text{если для } i \text{ выполнены } (1.3.37) \text{ и } (1.3.38)\ (i\in I_2),\\ -b, & \text{если для } i \text{ выполнены } (1.3.36) \text{ и } (1.3.39)\ (i\in I_3),\end{cases} \tag{1.3.46}$$

где b — константа из (1.3.29),

$$b(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}+\frac{h'(t)}{h(t)}\right]. \tag{1.3.47}$$

По условию на $f(t)$ и $h(t)$ $|b(t)|\leqslant\text{const}$.

Заметим, что нет таких i, для которых выполняются одновременно (1.3.37) и (1.3.39). В самом деле, при $i=1$ выполнены (1.3.36) и (1.3.38), откуда

$$\frac{h(t)}{h(\tau)}\geqslant\frac{D_\eta}{D_\eta}e^{-2\eta(t-\tau)}\frac{f(t)}{f(\tau)}. \tag{1.3.48}$$

А если бы при некотором i одновременно выполнялись (1.3.37) и (1.3.39), то было бы

$$\frac{h(t)}{h(\tau)}\leqslant\frac{D}{\widehat{D}}e^{-2\eta_0(t-\tau)}\frac{f(t)}{f(\tau)},$$

что противоречит (1.3.48). Обозначим

$$P_i(t,\tau)=P_i^{(k)}(t,\tau)=\exp\left[\int_\tau^t b_{i,T}^{(k)}(\xi)\,d\xi\right], \tag{1.3.49}$$

где $b_{i,T}^{(k)}(t)$ - i-й диагональный элемент матриц $B_T^{(k)}(t)$, определенной равенствами (1.3.43) — (1.3.47).

1°. Докажем, что при $t \geqslant \tau \geqslant T$ для каждого $i = 1, 2, ..., n$ выполнено: 1) либо (1.3.7), либо (1.3.8), 2) либо (1.3.15), либо (1.3.16), причем константы C, $\dot{C}_\eta$, $\widehat{C}$, $\widehat{C}_\eta$ не зависят от k.

а) Докажем это для $t \geqslant \tau \geqslant T+1$. При $t \geqslant \tau \geqslant T+1$ согласно (1.3.43), (1.3.45), (1.3.46). $P_i(t,\tau)$ не зависит от k. При $i \in I_2$

$$P_i(t,\tau) \underset{\substack{(1.3.49)\\(1.3.29)\\(1.3.35)}}{\geqslant} B_i(t,\tau),$$

поэтому (1.3.8) и (1.3.15) вытекает из (1.3.37) и (1.3.38).

При $i \in I_3$ аналогично имеем $P_i(t,\tau) \leqslant B_i(t,\tau)$, а отсюда (1.3.7) и (1.3.16). Пусть теперь $i \in I_1$. Тогда

$$P_i(t,\tau) \underset{\substack{(1.3.49)\\(1.3.46)}}{=} \exp\left[\int_\tau^t b(\xi)\,d\xi\right] \underset{(1.3.47)}{=} \sqrt{\frac{f(t)}{f(\tau)} \cdot \frac{h(t)}{h(\tau)}};$$

отсюда, во-первых,

$$P_i(t,\tau) \underset{(1.3.48)}{\geqslant} \sqrt{\frac{D_\eta}{\widehat{D}_\eta}} e^{-\eta(t-\tau)} \frac{f(t)}{f(\tau)},$$

т. е. выполнено (1.3.15), во-вторых,

$$P_i(t,\tau) \underset{(1.3.48)}{\leqslant} \sqrt{\frac{\widehat{D}_\eta}{D_\eta}} e^{\eta(t-\tau)} \frac{h(t)}{h(\tau)},$$

т. е. выполнено (1.3.7).

б) Утверждение пункта 1°, очевидно, вытекает из доказанного в а) (для случая $t \geqslant \tau \geqslant T+1$) и равномерной по T и по k ограниченности $B_T^{(k)}(t)$ (вытекающей из (1.3.29) и (1.3.43) — (1.3.47)).

2°. Фиксируем произвольное $T > 0$. Так как по условию $B_i^{(k)}(t,\tau) \underset{k\to\infty}{\to} B_i(t,\tau)$ равномерно на треугольнике $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ (и $B_i(t,\tau)$ непрерывны и не обращаются в 0, значит и $\dfrac{B_i^{(k)}(t,\tau)}{B_i(t,\tau)} \underset{k\to\infty}{\to} 1$ равномерно на этом треугольнике), то существует $N(T)$ такое, что $B_i^{(k)}(t,\tau)$ при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, $k \geqslant N(T)$, удовлетворяет тем же условиям 1), 2) в формулировке вспомогательной теоремы, что и $B_i(t,\tau)$, с константами $\frac{1}{2}D_\eta$ вместо D_η, $2D$ вместо D, $2\widehat{D}_\eta$ вместо $\widehat{D}_\eta$, $\frac{1}{2}\widehat{D}$ вместо $\widehat{D}$.

3°. Теперь имеем: $P_i(t,\tau)$ при $k \geqslant N(T)$ (см. (1.3.49)) удовлетворяют условиям леммы 1.4 при всех $t \geqslant \tau \geqslant t_0$ (константы другие, но не зависят от T и k). В самом деле, при $t \geqslant \tau \geqslant T$ это доказано в пункте 1° настоящего доказательства, при $T \geqslant t \geqslant \tau \geqslant t_0$ доказано в пункте 2°, а при $t \geqslant T \geqslant \tau \geqslant t_0$ получается перемножением соответствующих неравенств для 1) $t = t$, $\tau = T$; 2) $t = T$, $\tau = \tau$.

4°. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем $T_j \underset{j\to\infty}{\to} +\infty$, тогда по лемме 1.4 существует $\delta > 0$ такое, что если выполнено (1.3.1), то при $k = N(T_j) = k_j$ найдется решение $\tilde{v}^{(j)}(t)$ системы (1.3.42), построенной для $T = T_j$, такое, что

$$0 < \overline{C}_{\varepsilon,t_\delta} f(t) e^{-\varepsilon t} \leqslant \left\| \tilde{v}^{(j)}(t) \right\| \leqslant \overline{\overline{C}}_{\varepsilon,t_\delta} h(t) e^{\varepsilon t}$$

$\delta(\varepsilon)$ не зависит от j, так как неравенства в условии леммы 1.4 выполняются с константами, не зависящими от k, T. $\overline{C}_{\varepsilon,t_\delta}$, $\overline{\overline{C}}_{\varepsilon,t_\delta}$ не зависят от j, так как t_δ в (1.3.2) можно взять одно и то же для всех k (в силу $t_k \geqslant 0$ и (1.3.33)).

Так как вспомогательная система (1.3.42) при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ совпадает с системой (1.3.32), то при $t_0 \leqslant t \leqslant T_j$ $\tilde{v}^{(j)}(t)$ является одновременно решением системы (1.3.32) (при $k = k_j$), т. е. при $t_0 \leqslant t \leqslant T_j$ $\tilde{v}^{(j)}(t) = \dot{v}^{(j)}(t)$, где $v^{(j)}(t)$ $(t \geqslant t_0)$ — некоторое решение системы (1.3.32) при $k = k_j$.

Имеем, таким образом:

$$0 < \overline{C}_{\varepsilon,t_\delta} f(t) e^{-\varepsilon t} \leqslant \left\| v^{(j)}(t) \right\| \leqslant \overline{\overline{C}}_{\varepsilon,t_\delta} h(t) e^{\varepsilon t} \qquad (1.3.50)$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant T_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Отсюда, в частности, функции $v^{(j)}(t)$ равномерно ограничены при каждом $t \geqslant t_0$, а так как — $v^{(j)}(t)$ решение системы (1.3.32) (при $k = k_j$), то в силу (1.3.29), (1.3.33), (1.3.1) функции $v^{(j)}(t)$ равностепенно непрерывны при каждом $t \geq t_0$.

Функции

$$y^{(j)}\left(t_{k_j} + t\right) = \left[U^{(k_j)}(t)\right]^{-1} v^{(j)}(t), \qquad (1.3.51)$$
$$(j = 1, 2, \ldots)$$

также равномерно ограничены и равностепенно непрерывны при каждом $t \geqslant t_0$ в силу (1.3.30) и ортогональности $U^{(k)}(t)$.

По теореме Асколи (см. [4], стр. 43) из последовательности (1.3.51) можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $y^*(t)$ равномерно на отрезках.

Заметим, что так как $v^{(j)}(t)$ есть решение системы (1.3.32) (при $k = k_j$), то в силу (1.3.51) $y^{(j)}\left(t_{k_j} + t\right)$ есть решение системы (1.3.31) (при $k = k_j$), т. е. $y^{(j)}(t)$ — решение системы (II), а значит $y^*(t)$ — обобщенное решение системы (II) (предельное, если $\{t_{k_j}\}$ не ограничена сверху, и обычное или сдвиг обычного, если $t_{k_j} \underset{j\to\infty}{\not\to} +\infty$).

Так как преобразование $U^{(k)}(t)$ ортогональное, то из (1.3.51)

$$\left\| y^{(j)}\left(t_{k_j}+t\right)\right\| = \left\| v^{(j)}(t)\right\|,$$

поэтому предельный переход в (1.3.50) при $j\to\infty$ дает (1.3.40) при всех $t\geq t_0$. Теорема доказана.

§ 4. Леммы II

Определение. Пусть функция $q(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Для каждого $\varepsilon>0$ построим по индукции $T_i>0$ ($i=1,2,...,n$) так: $T_0=1$, $T_i=\sup$ длин отрезков, не содержащих отрезков $[\tau_1,\tau_2]$ таких, что $\tau_2-\tau_1\geq T_{i-1}$ и

$$\frac{q(\tau_2)-q(\tau_1)}{\tau_2-\tau_1} \leqslant \varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \frac{q(t)-q(\tau)}{t-\tau} - \varepsilon.$$

Скажем, что 1) $q(t)\in R_1$, если либо некоторое $T_i=+\infty$, либо $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{T_{i-1}}{T_i}=+\infty$ ($\varepsilon>0$ любое), 2) $q(t)\in\widetilde{R}$, если $q(t)$, — $q(t)\in R_1$

Лемма 1.5. *Пусть функции $q_k(t)\in\widetilde{R}$ таковы, что:*

$$\left|q_k(t)-q_k(\tau)\right|\leqslant a(t-\tau); \qquad k=1,2,...; \qquad t\geqslant\tau\geqslant t_0 \tag{1.4.1}$$

и T_i (см. определение) для них не зависят от k. Пусть $t_k\geqslant\tau_k\geqslant t_0$, $t_k-\tau_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$ и

$$\frac{q_k(t_k)-q_k(\tau_k)}{t_k-\tau_k} \underset{k\to\infty}{\to} \lambda. \tag{1.4.2}$$

Тогда для всякого $\varepsilon>0$ найдутся: $d_\varepsilon\geqslant 0$, $\theta_i\geqslant t_0$ и индексы: k_i ($i=1,2,...$) такие, что

$$r_i(t)=q_{k_i}(\theta_i+t)-q_{k_i}(\theta_i)\underset{i\to\infty}{\to} q(t) \tag{1.4.3}$$

равномерно на отрезках при $t\geqslant 0$, причем функция $q(t)$ такова, что

$$q(t)-q(\tau)\geqslant(\lambda-\varepsilon)(t-\tau)-d_\varepsilon\,(t\geqslant\tau\geqslant 0). \tag{1.4.4}$$

Доказательство. Будем считать, что

$$\lambda=0. \tag{1.4.5}$$

(Это можно сделать без ограничения общности, так как в противном случае можно рассмотреть функции $q_k(t)-\lambda t$).

Сначала заметим следующее. Пусть для всякого $\varepsilon>0$ найдется $d_\varepsilon\geqslant 0$ такое, что для всякого $T>0$ и всякого натурального N найдется отрезок $\left[\theta_1(\varepsilon,T,N),\theta_2(\varepsilon,T,N)\right]\subseteq[t_0,+\infty)$ длины $\geqslant T$ и найдется $k=k(\varepsilon,T,N)\geqslant N$ такое, что для всякого отрезка $\theta_2(\varepsilon,T,N)$ $[\tau,t]\subseteq\left[\theta_1(\varepsilon,T,N)\right]$,

$$q_k(t)-q_k(\tau)\geqslant-\varepsilon(t-\tau)-d_\varepsilon. \tag{1.4.6}$$

Тогда утверждение леммы справедливо. В самом деле, пусть дано $\varepsilon > 0$. Возьмем указанное $d_\varepsilon \geqslant 0$,

$$T_i \underset{i\to\infty}{\to} +\infty, \quad N_i \underset{i\to\infty}{\to} +\infty, \quad \theta_i = \theta_1\left(\varepsilon, T_i, N_i\right), \tag{1.4.7}$$
$$k_i = k\left(\varepsilon, T_i, N_i\right).$$

Последовательность функций

$$r_i\left(t\right) = q_{k_i}\left(\theta_i + t\right) - q_{k_i}\left(\theta_i\right) \tag{1.4.8}$$

в силу (1.4.1) удовлетворяет при $t \geqslant 0$ условиям теоремы Асколи (см. [4], стр. 43), поэтому из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на отрезках при $t \geqslant 0$ к некоторой функции $q\left(t\right)$, которая в силу (1.4.5) — (1.4.8) удовлетворяет (1.4.4).

Теперь допустим, что лемма неверна. Тогда, в силу сделанного сейчас замечания, найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всякого $d \geqslant 0$ найдутся $T_{(d)} > 0$ и N_d такие, что для всякого отрезка $\left[\theta_1, \theta_2\right] \subseteq \left[t_0, +\infty\right)$ длины $\geqslant T_{(d)}$ и всякого $k \geqslant N_d$ найдется отрезок $\left[\tau_d, t_d\right] \subseteq \left[\theta_1, \theta_2\right]$ такой, что

$$q_k\left(t_d\right) - q_k\left(\tau_d\right) < -\varepsilon\left(t_d - \tau_d\right) - d. \tag{1.4.9}$$

Заметим, что из (1.4.1) и (1.4.9) вытекает $t_d - \tau_d > \dfrac{d}{a}$.

Возьмем $T_0' = 1$ и построим последовательность чисел $T_0', T_1', T_2', \ldots$ по индукции: пусть $T_0', T_1', \ldots, T_s'$ построены; тогда $T_{s+1}' = T_{(d_s)}$, где $d_s = aT_s$. Имеем $T_i' \geqslant T_i$ $\left(i = 1, 2, \ldots\right)$. Легко показать, что $T_{i-1} \leqslant \alpha T_i$ $\left(\alpha < 1\right)$ $\left(i = 1, 2, \ldots\right)$; значит $\dfrac{T_{i-1} - T_{i-2}}{T_i + T_0} \geqslant \dfrac{1-\alpha}{2T_i} T_{i-1}$, откуда

$$m_s = \frac{T_0}{T_s} + \frac{2}{\sum\limits_{i=2}^{s-1} \dfrac{T_{i-1} - T_{i-2}}{T_i + T_0}} \underset{s\to\infty}{\to} 0. \tag{1.4.10}$$

Фиксируем s_0 такое, что при $s \geqslant s_0$

$$m_s < \frac{\varepsilon_0}{2\left(a + \varepsilon_0\right)}. \tag{1.4.11}$$

Фиксируем $k \geqslant N_{d_{s_0}}$ такое, что (см. (1.4.2))

$$\frac{q_k\left(t_k\right) - q_k\left(\tau_k\right)}{t_k - \tau_k} > -\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{1.4.12}$$

и

$$t_k - \tau_k \geqslant T_{s_0}. \tag{1.4.13}$$

В силу (1.4.13) на отрезке $\left[\tau_k, t_k\right]$ найдется отрезок $\left[\theta', \theta''\right]$ длины $\geqslant T_{s_0 - 1}$, на котором среднее приращение $q_k\left(t\right)$ меньше $-\varepsilon_0$ т. е.

$$\frac{q_k\left(\theta''\right) - q_k\left(\theta'\right)}{\theta'' - \theta'} \underset{(1.4.9)}{<} -\varepsilon_0. \tag{1.4.14}$$

$\left[\theta',\theta''\right]$ не совпадает с $\left[\tau_k,t_k\right]$ в силу (1.4.12) и (1.4.14). Поэтому дополнение его в $\left[\tau_k,t_k\right]$ состоит из одного или двух полуинтервалов.

Возьмем наибольшее $T_s \leqslant$ длины первого из них $\left[\tau_k,\theta'\right)$. Тогда на $\left[\tau_k,\theta'\right)$ найдется отрезок длины $\geqslant T_{s-1}$, на котором среднее приращение $q_k(t) < -\varepsilon_0$. Таким образом, на отрезке $\left[\tau_k,t_k\right]$ построим систему l отрезков (каждые 2 из которых пересекаются не более чем в одной точке), на каждом из которых среднее приращение $q_k(t) < -\varepsilon_0$. Дополнение к объединению этих отрезков в $\left[\tau_k,t_k\right]$ — объединение интервалов (полуинтервалов), каждый длины $< T_0$, причем число интервалов $\leqslant l+1$.

Оценим относительную меру m объединения этих интервалов на отрезке $\left[\tau_k,t_k\right]$. Пусть

$$l_i = E\left(\frac{T_i}{T_0}\right)+1 \tag{1.4.15}$$

($E(x)$ — целая часть x). Тогда из подряд идущих отрезков $\left[\tau_k,t_k\right]$хотя бы один из l_i штук $\left(i=1,2,...,s_0\right)$ имеет длину $\geqslant T_{i-1}$. Отсюда (сумму длин отрезков обозначим S)

$$t_k-\tau_k \geqslant S \geqslant \sum_{i=2}^{s_0-1} E\left(\frac{l}{l_i}\right)\left(T_{i-1}-T_{i-2}\right) \underset{(1.4.15)}{\geqslant} \sum_{i=2}^{s_0-1}\left(\frac{lT_0}{T_i+T_0}-1\right)\left(T_{i-1}-T_{i-2}\right)=$$
$$=T_0 l\sum_{i=2}^{s_0-1}\frac{T_{i-1}-T_{i-2}}{T_i+T_0}-T_{s_0-2}+T_0 \geqslant T_0 l\sum_{i=2}^{s_0-1}\frac{T_{i-1}-T_{i-2}}{T_i+T_0}-\left(t_k-\tau_k\right).$$

Отсюда

$$m \le \frac{T_0\left(l+1\right)}{t_k-\tau_k} \leqslant \frac{2}{\sum\limits_{i=2}^{s_0-1}\frac{T_{i-1}-T_{i-2}}{T_i+T_0}}+\frac{T_0}{t_k-\tau_k} \underset{\substack{(1.4.10)\\(1.4.11)\\(1.4.13)}}{\leqslant} \frac{\varepsilon_0}{2\left(a+\varepsilon_0\right)}. \tag{1.4.16}$$

Теперь имеем (обозначаем $\Sigma'\Delta_i t$ — сумму длин отрезков, $\Sigma''\Delta_i t$ — сумму длин интервалов (полуинтервалов), $\Sigma'\Delta_i q_k$ и $\Sigma''\Delta_i q_k$ соответственно суммы приращений $q_k(t)$ на них):

$$\frac{q_k\left(t_k\right)-q_k\left(\tau_k\right)}{t_k-\tau_k}=\frac{\Sigma'\Delta_i t}{t_k-\tau_k}\cdot\frac{\Sigma'\Delta_i q_k}{\Sigma'\Delta_i t}+\frac{\Sigma''\Delta_i t}{t_k-\tau_k}\cdot\frac{\Sigma''\Delta_i q_k}{\Sigma''\Delta_i t} \leqslant \left(1-m\right)\left(-\varepsilon_0\right)+ma \underset{(1.4.16)}{\leqslant} -\frac{\varepsilon_0}{2},$$

что противоречит (1.4.12). Противоречие доказывает лемму.

Л е м м а 1.6. *Пусть вектор-функции* $q_k(t)\left(t\geqslant t_0; k=1,2,...\right)$ *таковы*

$$\left\|q_k\left(t_k\right)-q_k\left(\tau_k\right)\right\| \leqslant a\left(t-\tau\right) \quad \left(k=1,2,...;t\geqslant\tau\geqslant t_0\right). \tag{1.4.17}$$

Пусть: $\tau_k \geqslant t_0$, $t_i^{(j)} \geqslant t_0$ $\left(k=1,2,...;i=1,2,...;j=1,2,...\right)$

$$q(t)=\lim_{k\to\infty}\left[q_k\left(\tau_k+t\right)-q_k\left(\tau_k\right)\right], \tag{1.4.18}$$
$$r_j(t)=\lim_{i\to\infty}\left[q\left(t_i^{(j)}+t\right)-q\left(t_i^{(j)}\right)\right].$$
$$r(t)=\lim_{j\to\infty} r_j(t)$$

(все три предела — равномерные на отрезках при $t\geqslant 0$*). Тогда найдутся* $\theta_s \geqslant t_0$ *и индексы* k_s $\left(s=1,2,...\right)$ *такие, что*

$$r(t)=\lim_{s\to\infty}\left[q_{k_s}(\theta_s+t)-q_{k_s}(\theta_s)\right]$$

предел равномерный на отрезках при $t\geqslant 0$).

Доказательство. Возьмем последовательности $\varepsilon_s\to 0(\varepsilon_s>0)$, $T_s\to+\infty$. Выберем j_s (для каждого $s=1,2,...$ такое, что $\left\|r(t)-r_{j_s}(t)\right\|<\varepsilon_s$ при $0\leqslant t\leqslant T_s$. По j_s выберем i_s такое, что

$$\left\|r_{j_s}(t)-\left[q\left(t_{i_s}^{j_s}+t\right)-q\left(t_{i_s}^{j_s}\right)\right]\right\|<\varepsilon_s$$

при $0\leqslant t\leqslant T_s$. По j_s и i_s выберем k_s такое, что

$$\left\|q(\theta)-\left[q_{k_s}\left(\tau_{k_s}+\theta\right)-q_{k_s}\left(\tau_{k_s}\right)\right]\right\|<\varepsilon_s$$

при $0\leqslant\theta-t_{i_s}^{(j_s)}\leqslant T_s$. Из трех последних неравенств имеем при $0\geqslant t\geqslant T_s$

$$\left\|r(t)-\left[q_{k_s}\left(\tau_{k_s}+t_{i_s}^{j_s}+t\right)-q_{k_s}\left(\tau_{k_s}+t_{i_s}^{j_s}\right)\right]\right\|<4\varepsilon_s.$$

Полагая $\theta_s=\tau_{k_s}+t_{i_s}^{(j_s)}$, получаем утверждение леммы.

Лемма 1.7. *Пусть вектор-функции* $q_k(t)=\left\{q_k^{(1)}(t),...,q_k^{(n)}(t)\right\}$ *удовлетворяют условию* (1.4.17). *Пусть функция* $q(t)=\left\{q^{(1)}(t),...,q^{(n)}(t)\right\}$ *определена равенством* (1.4.18) (*предел равномерный на отрезках при* $t\geqslant 0$). *Пусть для всякой* $\{\tau_k\}q(t)\in\widetilde{R}$. *Обозначим*

$$\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{q^{(1)}(t)-q^{(1)}(\tau)}{t-\tau}=\lambda. \tag{1.4.19}$$

Тогда для всякого $\eta\geqslant 0$ *найдутся числа* $\lambda_1,...,\lambda_n$ $\left(|\lambda_1-\lambda|<\eta\right)$, *числа* $\theta_j\geqslant t_0$ *и индексы* $\left(k_j=1,2,...\right)$ *такие, что существует*

$$r(t)=\lim_{j\to\infty}\left[q_{k_j}(\theta_j+t)-q_{k_j}(\theta_j)\right] \tag{1.4.20}$$

(предел равномерный на каждом отрезке при $t>0$), *причем для всякого i=1, 2, ..., n*

$$(\lambda_i-\varepsilon)(t-\tau)-d_\varepsilon\leqslant r^{(i)}(t)-r^{(i)}(\tau)\leqslant(\lambda_i+\varepsilon)(t-\tau)+d_\varepsilon \tag{1.4.21}$$

для всякого $\varepsilon>0$, *некоторого* $d_\varepsilon\geqslant 0$ (d_ε *— функция от* ε) *и всех* $t\geqslant\tau\geqslant 0$.

Доказательство (индукцией по n). 1°. $n=1$. Пусть дано $\eta>0$. Применим лемму 1.5 к последовательности (одинаковых) функций $q(t),q(t),...$. По лемме 1.5 существуют $d_{(1)}\geqslant 0$ и $t_i^{(1)}\geqslant t_0$ $(i=1,2,...)$ такие, что функция

$$r_1(t)=\lim_{i\to\infty}\left[q\left(t_i^{(1)}+t\right)-q\left(t_i^{(1)}\right)\right] \tag{1.4.22}$$

(предел равномерный на отрезках при $t\geqslant 0$) определена и удовлетворяет при всех $t\geqslant\tau\geqslant 0$ неравенству

$$r_1(t)-r_1(\tau)\geqslant\lambda_{(1)}(t-\tau)-d_{(1)},\ \text{где}\ \lambda_{(1)}=\lambda-\frac{n}{2}. \tag{1.4.23}$$

В силу (1.4.19), (1.4.22) существует $d^{(1)}\geqslant 0$ такое, что при всех $t\geqslant\tau\geqslant 0$

$$r_1(t)-r_1(\tau)\leqslant\lambda^{(1)}(t-\tau)-d^{(1)},\ \text{где}\ \lambda^{(1)}=\lambda+\frac{n}{2}. \tag{1.4.24}$$

Пусть при $j = 1, 2, ..., k$ построены числа

$$d_{(j)} \geqslant 0\,,\ d^{(j)} \geqslant 0\,,\ \lambda^{(j)} \geqslant \lambda_{(1)}\,,\ \lambda_j = \lambda^{(j)} - \frac{\eta}{j}$$

такие, что

$$\lambda^{(j+1)} \leqslant \lambda^{(j)} \tag{1.4.25}$$

и функции $r_j(t)$ такие, что для всякого $j = 1, 2, ..., k$

$$r_j(t) = \lim_{i\to\infty}\left[q\left(t_i^{(j)} + t\right) - q\left(t_i^{(j)}\right)\right] \tag{1.4.26}$$

(предел равномерный на отрезках при $t \geqslant 0$),

$$\lambda_{(i)}(t-\tau) - d_{(i)} \leqslant r_j(t) - r_j(\tau) \leqslant \lambda^{(i)}(t-\tau) + d^{(i)} \tag{1.4.27}$$

при всех $i \leqslant j$, $t \geqslant \tau \geqslant t_0$.

Применим теперь лемму 1.5 к последовательности (одинаковых) функций $r_k(t), r_k(t), ...$. По лемме 1.5 существуют $d_{(k+1)} \geqslant 0$ и $\theta_i \geqslant t_0$ $(i = 1, 2, ...)$ такие, что функция

$$r_{k+1}(t) = \lim_{i\to\infty}\left[r_k(\theta_i + t) - r_k(\theta_i)\right] \tag{1.4.28}$$

(предел, равномерный на отрезках при $t \geqslant 0$) определена и удовлетворяет при всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$ неравенству

$$r_{k+1}(t) - r_{k+1}(\tau) \geqslant \lambda_{(k+1)}(t-\tau) - d_{(k+1)}\,, \tag{1.4.29}$$

где

$$\lambda_{(k+1)} = \varlimsup_{t-\tau\to\infty}\frac{r_k(t) - r_k(\tau)}{t-\tau} - \frac{\eta}{2(k+1)}. \tag{1.4.30}$$

В силу (1.4.28), (1.4.30) для некоторого $d^{(k+1)} \geqslant 0$ для всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$

$$r_{k+1}(t) - r_{k+1}(\tau) \leqslant \lambda^{(k+1)}(t-\tau) + d^{(k+1)}, \tag{1.4.31}$$

где

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda_{(k+1)} + \frac{\eta}{k+1} \underset{\substack{(1.4.30)\\(1.4.27)}}{>} \lambda_{(1)}.$$

В силу (1.4.28), (1.4.27), (1.4.29), (1.4.31) для $j = k+1$; $l = 1, 2, ..., k+1$ выполнено (1.4.27). По лемме 1.6 найдется последовательность $t_i^{(k+1)}$ $(i = 1, 2, ...)$ такая, что (1.4.26) верно при $j = k+1$.

По индукции доказано существование функций $r_j(t)$ и констант $d_{(j)} \geqslant 0$, $d^{(j)} \geqslant 0$, $\lambda^{(j)} \geqslant \lambda_{(1)}$, $\lambda_j = \lambda^{(j)} - \dfrac{\eta}{j}$; ($j = 1, 2, ...$), удовлетворяющих при всяком $j = 1, 2, ...$ (1.4.25) — (1.4.27). По теореме Асколи (см. [4], стр. 43) (в силу (1.4.17), (1.4.26)) из последовательности $r_j t$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на отрезках при $t \geqslant 0$ к некоторой функции $r(t)$. Из (1.4.27) следует, что для любых $l = 1, 2, ...$; $t \geqslant \tau \geqslant 0$

$$\lambda_{(i)}(t-\tau) - d_{(i)} \leqslant r(t) - r(\tau) \leqslant \lambda^{(i)}(t-\tau) + d^{(i)}. \tag{1.4.32}$$

Положим

$$\lambda_1 = \lim_{l\to\infty}\lambda_{(l)} = \lim_{l\to\infty}\lambda^{(l)} \geqslant \lambda_{(1)}.$$

Тогда из (1.4.32) следует (1.4.21) для $i=1$ при всяком $\varepsilon>0$, некотором $d_\varepsilon \geqslant 0$ (d_ε функция от ε) и всех $t\geqslant\tau\geqslant 0$. По лемме 1.6 $r(t)$ представляется в виде (1.4.20):

$$\lambda+\eta>\lambda^{(1)} \underset{(1.4.25)}{\geqslant} \lambda_1 \geqslant \lambda_{(1)} > \lambda-\eta.$$

2°. Пусть утверждение справедливо при $n=m$. Докажем его для $n=m+1$. Будем обозначать $\hat{x}$ — вектор, состоящий из первых m координат $(m+1)$-мерного вектора x. Пусть дано $\eta>0$. По индуктивному предположению найдутся $\theta_j \geqslant t_0$ и индексы k_j ($j=1,2,\ldots$) такие, что существует

$$\hat{r}(t) = \lim_{j\to\infty}\left[\hat{q}_{k_j}\left(\theta_j+t\right)-\hat{q}_{k_j}\left(\theta_j\right)\right] \tag{1.4.33}$$

(предел, равномерный на каждом отрезке при $t\geqslant 0$) и существуют числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$; $\left(\left|\lambda_1-\lambda\right|<\eta\right)$ такие, что для каждого $i=1,2,\ldots,m$ выполнено (1.4.21) для всякого $\varepsilon>0$, некоторого $d_\varepsilon \geqslant 0$ (d_ε функция от ε) и всех $t\geqslant\tau\geqslant 0$. По теореме Асколи (см. [4], стр. 43) (в силу (1.4.17) из последовательности $q_{k_j}\left(\theta_j+t\right)-q_{k_j}\left(\theta_j\right)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на отрезках при $t\geqslant 0$ к некоторой функции $r(t)$. Чтобы не усложнять обозначений, считаем, что

$$r(t) = \lim_{j\to\infty}\left[q_{k_j}\left(\theta_j+t\right)-q_{k_j}\left(\theta_j\right)\right] \tag{1.4.34}$$

— предел, равномерный на отрезках при $t\geqslant 0$. (Тогда (1.4.33) — (1.4.34) находится в соответствии с принятым обозначением $\hat{x}$) Рассмотрим $r^{(m+1)}(t)$. Согласно доказанному для $n=1$, найдутся λ_{m+1} и $\tau_l \geqslant t_0$ $(l=1,2,\ldots)$ такие, что существует

$$\overline{r}^{(m+1)}(t) = \lim_{l\to\infty}\left[r^{(m+1)}\left(\tau_l+t\right)-r^{(m+1)}\left(\tau_l\right)\right]$$

(предел, равномерный на отрезках при $t\geqslant 0$) и $\overline{r}^{(m+1)}(t)$ удовлетворяет тому же условию, что и $r^{(m+1)}(t)$ в (1.4.21). По теореме Асколи из последовательности $r\left(\tau_l+t\right)-r\left(\tau_l\right)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на отрезках при $t\geqslant 0$; чтобы не усложнять обозначений, считаем, что существует равномерный на отрезках при $t\geqslant 0$ предел:

$$\overline{r}(t) = \lim_{l\to\infty}\left[r\left(\tau_l+t\right)-r\left(\tau_l\right)\right], \tag{1.4.35}$$

$\overline{r}(t)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $r(t)$ в (1.4.21) (для $i=m+1$ это доказано, а для $i=1,2,\ldots,m$ это вытекает из (1.4.35)). По лемме 1.6, в силу (1.4.34), (1.4.35) существуют $\overline{\theta}_s \geqslant t_0$ и индексы k_s $(s=1,2,\ldots)$ такие, что

$$\overline{r}(t) = \lim_{s\to\infty}\left[q_{\overline{k}_s}\left(\overline{\theta}_s+t\right)-q_{\overline{k}_s}\left(\overline{\theta}_s\right)\right]$$

(предел, равномерный на отрезках при $t\geqslant 0$). Лемма доказана.

Л е м м а 1.8 [28] (близка к лемме Б. Ф. Былова [10], стр. 122.). *Пусть выполнены условия леммы* 1.5. *Тогда существует последовательность индексов* k_s *и последовательность* $t^*_{k_s} \geqslant t_0 \left(s = 1, 2, \ldots\right)$ *такие, что последовательность* $q_{k_s}\left(t^*_{k_s} + t\right) - q_{k_s}\left(t^*_{k_s}\right)$ *сходится равномерно на отрезках при* $t \geqslant 0$ *к некоторой функции* $q(t) \geqslant \lambda t$

Д о к а з а т е л ь с т в о . По условию

$$\varepsilon_k = \left| \frac{q_k(t_k) - q_k(\tau_k)}{t_k - \tau_k} - \lambda \right| \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Имеем

$$q_k(t_k) - q_k(\tau_k) \geqslant (\lambda - \varepsilon_k)(t_k - \tau_k). \qquad (1.4.36)$$

Выберем последовательность положительных чисел $\delta_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ так, чтобы $\delta_k(t_k - \tau_k) \underset{k\to\infty}{\to} \infty$. Обозначим (при каждом фиксированном k) через t^*_k точную верхнюю грань тех $t \in [\tau_k, t_k]$, для которых

$$q_k(t_k) - q_k(\tau_k) \leqslant (\lambda - \varepsilon_k - \delta_k)(t - t_k). \qquad (1.4.37)$$

Ясно, что (1.4.37) верно при $t = t^*_k$.

1°. Докажем, что

$$q_k\left(t^*_k + t\right) - q_k\left(t^*_k\right) \geq (\lambda - \varepsilon_k - \delta_k) \cdot t \qquad (1.4\ 38)$$

при $t \in \left[0, t_k - t^*_k\right]$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть это не так, т. е. при некотором $\bar{k}$ и некотором $\bar{t}_{\bar{k}} \in \left[0, t_{\bar{k}} - t^*_{\bar{k}}\right]$

$$q_{\bar{k}}\left(t^*_{\bar{k}} + \bar{t}_{\bar{k}}\right) - q_{\bar{k}}\left(t^*_{\bar{k}}\right) \geqslant \left(\lambda - \varepsilon_{\bar{k}} - \delta_{\bar{k}}\right)\bar{t}_{\bar{k}}. \qquad (1.4.39)$$

Сложим тогда (1.4.39) и (1.4.37) при $k = \bar{k}$, $t = t^*_{\bar{k}}$:

$$q_{\bar{k}}\left(t^*_{\bar{k}} + \bar{t}_{\bar{k}}\right) - q_{\bar{k}}\left(\tau_{\bar{k}}\right) \leqslant (\lambda - \varepsilon_k - \delta_k)\left(t^*_{\bar{k}} + \bar{t}_{\bar{k}} - \tau_{\bar{k}}\right).$$

Отсюда $t^*_{\bar{k}} = 0$ (по определению $t^*_{\bar{k}}$).

2°. Докажем, что

$$t_k - t^*_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty. \qquad (1.4.40)$$

Вычтем (1.4.37) при $t = t^*_{\bar{k}}$ из (1.4.36):

$$\begin{aligned} q_k(t_k) - q_k\left(t^*_k\right) &\geqslant (\lambda - \varepsilon_k)(t_k - \tau_k) - (\lambda - \varepsilon_k - \delta_k)\left(t^*_k - \tau_k\right) = \\ &= (\lambda - \varepsilon_k - \delta_k)\left(t_k - t^*_k\right) + \delta_k(t_k - \tau_k). \end{aligned} \qquad (1.4.41)$$

Допустим, что $t_k - t^*_k \underset{k\to\infty}{\not\to} +\infty$. Тогда существует последовательность индексов $k_i \left(i = 1, 2, \ldots\right)$, такая, что $t_{k_i} - t^*_{k_i} \leqslant \mathrm{const}$. Будем для краткости снова обозначать k_i через k. Из (1.4.41)

$$\delta_k\left(t_k-\tau_k\right)\underset{\substack{(1.4.41)\\(1.4.1)}}{\leqslant} a\left(t_k-t_k^*\right)+\left|\lambda-\varepsilon_k-\delta_k\right|\cdot\left|t_k-t_k^*\right|\leqslant \text{const},$$

что противоречит выбору δ_k.

3°. По теореме Асколи из последовательности функций

$$r_k(t)=q_k\left(t_k^*+t\right)-q_k\left(t_k^*\right)\quad (k=1,2,...)$$

можно выбрать подпоследовательность

$$q_{k_s}\left(t_{k_s}^*+t\right)-q_{k_s}\left(t_{k_s}^*\right)\quad (s=1,2,...),\tag{14.42}$$

сходящуюся равномерно на отрезках при $t\geqslant 0$ к некоторой функции $q(t)$. Из (1.4.38) и (1.4.40) следует, что $q(t)\geqslant\lambda t$ при $t\geqslant 0$, что и требовалось доказать.

§ 5. Спектр. Максимальные и минимальные показатели

Напомним, что характеристическим показателем вектор-функции $x(t)$ называется (см. [1], стр. 185)

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln\|x(t)\|}{t}.$$

Определение 1.3 [28]. 1. Множество характеристических показателей всех обобщенных решений системы (I) назовем действительным спектром Λ системы (I). (В дальнейшем слово «действительный» в этой и подобных ситуациях будем для краткости опускать.)

2. Множество характеристических показателей всех предельных решений системы (I) назовем предельным спектром Λ^∞ системы (I).

3.Множество характеристических показателей всех обычных решений системы (I) назовем начальным спектром Λ^0 системы (I).

Как известно (см. [1], стр. 187), Λ^0 — конечное множество мощности $\leqslant n$. Очевидно

$$\Lambda^0\bigcup\Lambda^\infty=\Lambda.\tag{1.5.1}$$

Существует, как показывают следующие теоремы, замечательная связь между спектром Λ и особыми показателями Ω_0 и ω_0 Персидского—Крейна. Напомним определение Ω_0 (см.[3]):

$$\Omega_0=\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\ln\left\|X(t)X^{-1}[\tau]\right\|,\tag{1.5.2}$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (I), называется верхним особым показателем системы (I),

$$\omega_0=\underline{\lim_{t-\tau\to-\infty}}\frac{1}{t-\tau}\ln\left\|X(t)X^{-1}[\tau]\right\|,\tag{1.5.3}$$

называется нижним особым показателем системы (I). (Заметим, правда, что К. П. Персидский и М. Г. Крейн не вводили ω_0)

Теорема 1.4. $\Omega_0=\sup\Lambda\in\Lambda$.

Доказательство. Из (1.5.2) вытекает, что для всякого решения $x(t)$ системы (I):

$$\left\|x(t)\right\|\leqslant C_\varepsilon e^{(\Omega_0+\varepsilon)(t-\tau)}\left\|x(\tau)\right\|\qquad (t\geqslant\tau)\tag{1.5.4}$$

для всякого $\varepsilon > 0$, причем C_ε не зависит от t, τ и от $x(t)$. Отсюда переходом к пределу получаем, что и для всякого обобщенного решения $x^*(t)$ системы (I)

$$\left\|x^*(t)\right\| \leqslant C_\varepsilon e^{(\Omega_0+\varepsilon)(t-\tau)} \left\|x^*(\tau)\right\| \qquad (t \geqslant \tau) \tag{1.5.4'}$$

для всякого $\varepsilon > 0$.

Из (1.5.4') имеем

$$\sup \Lambda \leqslant \Omega_0. \tag{1.5.5}$$

Из (1.5.2) следует, что существуют последовательности x_k, $t_k \geqslant \tau_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ такие, что

$$\frac{\ln\left\|X(t_k)X^{-1}[\tau_k]x_k\right\|}{t_k - \tau_k} \underset{k\to\infty}{\to} \Omega_0, \tag{1.5.6}$$

$$t_k - \tau_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty, \ \left\|x_k\right\| = 1. \tag{1.5.7}$$

Обозначим

$$q_k(t) = \ln\left\|X(t)X^{-1}[\tau_k]x_k\right\| \tag{1.5.8}$$

Тогда, в силу (1.5.7), (1.5.6) превращается в (1.4.2), где

$$\lambda = \Omega_0;$$

(1.4.1) выполнено, ибо

$$\begin{gathered}\frac{dq_k}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left\|X(t)X^{-1}[\tau_k]x_k\right\|}{\left\|X(t)X^{-1}[\tau_k]x_k\right\|} \leqslant \frac{\left\|\frac{d}{dt}X(t)X^{-1}[\tau_k]x_k\right\|}{\left\|X(t)X^{-1}[\tau_k]x_k\right\|} \leqslant \\ \leqslant \frac{\left\|A(t)X(t)X^{-1}[\tau_k]x_k\right\|}{\left\|X(t)X^{-1}[\tau_k]x_k\right\|} \leqslant \left\|A(t)\right\| \leqslant a \quad (t \geq t_0).\end{gathered} \tag{1.5.9}$$

По лемме 1.8 найдется последовательность функций (1.4.42), сходящаяся при $t \geqslant 0$ равномерно на отрезках к

$$q(t) \geqslant \Omega_0 t.$$

Последовательность функций

$$x_{k_s}\left(t_{k_s}^* + t\right) = \frac{X\left(t_{k_s}^* + t\right)X^{-1}\left(\tau_{k_s}\right)x_{k_s}}{\left\|X\left(t_{k_s}^*\right)X^{-1}\left(\tau_{k_s}\right)x_{k_s}\right\|} \tag{1.5.10}$$

удовлетворяет при $t \geqslant 0$ условиям теоремы Асколи (см. [4], стр. 43), так как

$$\left\|x_{k_s}\left(t_{k_s}^*\right)\right\| = 1,$$

$$\left\|\frac{d}{dt}x_{k_s}\left(t_{k_s}^* + t\right)\right\| \leqslant a\left\|x_{k_s}\left(t_{k_s}^* + t\right)\right\|$$

(последнее проверяется так же, как в (1.5.9)). Значит, из последовательности (1.5.10) можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на отрезках при $t \geqslant 0$ к некоторой функции $x^*(t)$ (которая является обобщенным решением системы (I). Имеем

$$\ln x^*(t) \underset{\substack{(1.5.10)\\(1.5.8)}}{=} q(t) \geqslant \Omega_0 t. \tag{1.5.11}$$

В силу (1.5.11) $x^*(t)$ имеет характеристический показатель $\geqslant \Omega_0$. Сопоставляя это с (1.5.5), получаем утверждение теоремы.

Аналогично доказывается

Теорема 1.5. $\omega_0 = \inf \Lambda \in \Lambda$.

Определение 1.4. Максимальным показателем вектор-функции $x^*(t)$ назовем

$$\overline{\lambda} = \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x^*(t)\|}{\|x^*(\tau)\|}. \tag{1.5.12}$$

Минимальным показателем $x^*(t)$ назовем

$$\underline{\lambda} = \underline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x^*(t)\|}{\|x^*(\tau)\|}. \tag{1.5.13}$$

Из определения Ω_0 и ω_0 (воспроизведенного в формулах (1.5.2), (1.5.3)) следует, что для всякого обобщенного решения $x^*(t)$ системы (I) $-a \leqslant \omega_0 \leqslant \underline{\lambda} \leqslant \overline{\lambda} \leqslant \Omega_0 \leqslant a$.

Теорема 1.6. *Для всякого обобщенного решетя* $x^*(t)$ *системы* (I)

$$\overline{\lambda} \in \Lambda, \ \underline{\lambda} \in \Lambda. \tag{1.5.15}$$

Эта теорема доказывается почти так же, как теоремы 1.4—1.5.

Определение. $A(t) \in R$, если при выполнении операций, указанных в формулировке вспомогательной теоремы, всегда $\ln B_i(t,0) \in \widetilde{R}$ $(i = 1,2,...,n)$ (если $t_k \to +\infty$).

§ 6. Грубый спектр. Максимальные и минимальные показатели

Определение 1.5. Пусть λ таково, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если

$$\left.\begin{aligned} &g(t) = g_1(t) + g_2(t), \\ &g_1(t) < \delta, \quad \int_t^{+\infty} g_2(\tau)\,d\tau < \infty \quad (t \geqslant t_0). \end{aligned}\right\} \tag{1.6.1}$$

то найдется обычное (соответственно предельное, соответственно обобщенное) решение $y^*(t)$ системы (II) с характеристическим показателем $\mu \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$. Тогда λ, называется грубым начальным (соответственно грубым предельным, соответственно грубым) показателем системы (I).

Множество грубых начальных показателей системы (I) назовем **г р у б ы м н а ч а л ь н ы м с п е к т р о м** Λ_s^0 системы (I). Множество грубых предельных показателей системы (I) назовем **г р у б ы м п р е д е л ь н ы м с п е к т р о м** Λ_s^∞ системы (I). Множество грубых показателей системы (I) назовем **г р у б ы м с п е к т р о м** Λ_s системы (I).

Очевидно

$$\Lambda_s \subseteq \overline{\Lambda}, \tag{1.6.2}$$

$$\Lambda_s^\infty \subseteq \Lambda_s, \tag{1.6.3}$$

$$\Lambda_s^\infty \subseteq \overline{\Lambda}^\infty, \tag{1.6.4}$$

$$\Lambda_s^0 \subseteq \Lambda^0. \tag{1.6.5}$$

Т е о р е м а 1.7 (признак $\lambda \in \Lambda_s^0$). *Пусть* λ *таково, что для всякого* $\eta > 0$ *найдутся непрерывные функции* $f(t) > 0$ *и* $h(t) > 0$ *такие, что*

$$v_1 = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln f(t)}{t} \geqslant \lambda - \eta, \tag{1.6.6}$$

$$v_2 = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln h(t)}{t} \leqslant \lambda + \eta, \tag{1.6.7}$$

и пусть система (I) *после приведения ее перроновским преобразованием к треугольному виду и замены внедиагональных элементов (в треугольной матрице) нулями удовлетворяет условиям леммы* 1.4 *с данными функциями* $f(t)$ *и* $h(t)$. *Тогда* $\lambda \in \Lambda_s^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Возьмем $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ и найдем по нему функции $f(t)$ и $h(t)$, удовлетворяющие (1.6.6), (1.6.7). По лемме 1.4 найдется $\delta > 0$ такое, что из (1.6.1) вытекает существование решения $y(t)$ системы (II), удовлетворяющего неравенствам

$$0 < \overline{C}_{\frac{\varepsilon}{2}} f(t) e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \leqslant \|y(t)\| \leqslant \overline{C}_{\frac{\varepsilon}{2}} h(t) e^{\frac{\varepsilon}{2}t}. \tag{1.6.8}$$

Из (1.6.6) — (1.6.8):

$$\mu = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \|y(t)\|}{t} \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon), \tag{1.6.9}$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 1.8 [28] (п р и з н а к $\lambda \in \Lambda_s$ и п р и з н а к $\lambda \in \Lambda_s^\infty$. *Пусть* λ *таково, что для всякого* $\eta > 0$ *найдутся гладкие функции* $f(t) > 0$ *и* $h(t) > 0$ *такие, что выполнено* (1.6.6) *и* (1.6.7) *и пусть для этих функций* $f(t)$ *и* $h(t)$ *выполнены условия вспомогательной теоремы из §3. Тогда* $\lambda \in \Lambda_s$. *При этом: если последовательность* $\{t_k\}$ (см. формулировку вспомогательной теоремы) *неограничена сверху, то* $\lambda \in \Lambda_s^\infty$ *если* $t_k \not\to \infty$, *то* $\lambda \in \Lambda_s^0$.

Доказательство признака $\lambda \in \Lambda_s$ то же, что и доказательство теоремы 1.7, со следующими изменениями: 1) вместо ссылки на лемму 1.4 — ссылка на вспомогательную теорему; 2) вместо $y(t)$ — обобщенное решение $y^*(t) = \lim_{k\to\infty} y_k(t_k + t)$ системы (II). Заметим, что если последовательность $\{t_k\}$ неограничена сверху, то $y^*(t)$ — предельное решение; если $t_k \not\to +\infty$, то $y^*(t)$ — обычное решение или сдвиг обычного решения. Это доказывает признаки $\lambda \in \Lambda_s^\infty$ и $\lambda \in \Lambda_s^0$ (так как характеристический показатель не меняется при сдвиге функции).

Теорема 1.9. *Пусть $A(t) \in R$. Тогда для всякого обобщенного решения $x^*(t)$ системы* (I)

$$\overline{\lambda} \in \Lambda_s,\ \underline{\lambda} \in \Lambda_s. \tag{1.6.10}$$

Если $x^*(t)$ — предельное решение, то

$$\overline{\lambda} \in \Lambda_s^\infty;\ \underline{\lambda} \in \Lambda_s^\infty.$$

Замечание. Можно доказать, что всегда $\overline{\lambda} \in \Lambda_s^\infty$; $\underline{\lambda} \in \Lambda_s^\infty$.

Доказательство. Докажем $\overline{\lambda} \in \Lambda_s$ ($\underline{\lambda} \in \Lambda_s$ доказывается аналогично). Пусть дано $\eta > 0$. Проделаем для $x^*(t)$ построение, указанное в формулировке вспомогательной теоремы из §3. Обозначим

$$q_k(t) = \left\{ \int_0^t b_{11}^{(k)}(\tau)\,d\tau, \ldots, \int_0^t b_{nn}^{(k)}(\tau)\,d\tau \right\}.$$

Тогда выполнены условия леммы 1.7: условие (1.4.17) с константой nb вместо a — в силу (1.3.29); условие (1.4.19) с $\overline{\lambda}$ вместо λ — в силу (1.6.11), (1.3.34), (1.5.12), причем

$$q^{(1)}(t) = \lim_{k\to\infty} \int_0^t b_{11}^{(k)}(\tau)\,d\tau,$$

т. е. в (1.4.18) $\tau_k = 0$). Возьмем $\theta_j \geqslant t_0$ и индексы k_j ($i = 1, 2, \ldots$), указанные в лемме 1.7, и из $\{k_j\}$ выберем подпоследовательность (для простоты обозначений считаем, что это она сама) так, что существует

$$x^{**}(t) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\left\| x_{k_j}\left(\theta_j + t_{k_j}\right) \right\|} x_{k_j}\left(\theta_j + t_{k_j} + t\right)$$

(предел, равномерный на каждом отрезке при $t \geq 0$).

Положим $f(t) = h(t) = e^{\lambda_1 t}$ (где λ_1 указано в лемме 1.7; напомним, что $\left|\lambda_1 - \overline{\lambda}\right| < \eta$). В силу (1.4.21) условия вспомогательной теоремы выполнены для $x^{**}(t)$ вместо $x^*(t)$, $t_{k_j} + \theta_j$ вместо t_k и $b_{ii}^{(k_j)}\left(\theta_j + t\right)$ вместо $b_{ii}^{(k)}(t)$. В силу теоремы 1.8, теорема доказана.

Теорема 1.10 [28]. *Пусть $A(t) \in R$. Тогда*

$$\Omega_0 \in \Lambda_s \qquad \omega_0 \in \Lambda_s$$

Доказательство. По теореме 1.4, $\Omega_0 \in \Lambda$, т. е. Ω_0 — характеристический показатель некоторого обобщенного решения $x^*(t)$ системы (I). Из (1.5.12), (1.5.14) для этого $x^*(t)\overline{\lambda} = \Omega_0$. Теорема 1.9 дает теперь $\Omega_0 \in \Lambda_s$ ($\omega_0 \in \Lambda_s$ доказывается аналогично).

§ 7. Устойчивость включения $\Lambda \subseteq [\omega_0 \Omega_0]$

Теорема 1.11. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что из* (1.6.1) *следует, что всякое обобщенное решение* $y^*(t)$ *системы* (II) *имеет характеристический показатель* $\mu \in (\omega_0 - \varepsilon, \Omega_0 + \varepsilon)$.

Доказательство. Если $y^*(t)$ — обычное решение, то утверждение известно (см. [3]). Однако по ходу дела нам придется напомнить его доказательство.

Пусть $y(t)$ — произвольное решение системы (II), тогда (см. [1], стр. 173):

$$y(t) = X(t)X^{-1}(\tau)y(\tau) + \int_\tau^t X(t)X^{-1}(\xi)\varphi(y(\xi),\xi)d\xi.$$

Отсюда, согласно (1.5.4), при $t \geqslant \tau$

$$\|y(t)\| \leqslant C_{\frac{\varepsilon}{2}} e^{\left(\Omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(t-\tau)} \|y(\tau)\| + C_{\frac{\varepsilon}{2}} \int_\tau^t e^{\left(\Omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(t-\xi)} g(\xi) \|y(\xi)\| d\xi,$$

т. е.

$$e^{-\left(\Omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t} \|y(t)\| \leqslant C_{\frac{\varepsilon}{2}} e^{-\left(\Omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\tau} \|y(\tau)\| + C_{\frac{\varepsilon}{2}} \int_\tau^t g(\xi) e^{-\left(\Omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\xi} \|y(\xi)\| d\xi,$$

откуда (согласно [1], лемма 1, стр. 19)

$$\frac{\|y(t)\|}{\|y(\tau)\|} \leqslant C_{\frac{\varepsilon}{2}} e^{C_{\frac{\varepsilon}{2}} \int_\tau^t g(\xi)d\xi} e^{\left(\Omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(t-\tau)} \qquad (t \geq \tau). \tag{1.7.1}$$

Положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4C_{\frac{\varepsilon}{2}}}. \tag{1.7.2}$$

Тогда из (1.6.1) и (1.7.1):

$$\frac{\|y(t)\|}{\|y(\tau)\|} \leqslant \overline{C}_{\frac{\varepsilon}{2}} e^{\left(\Omega_0 + \frac{3}{4}\varepsilon\right)(t-\tau)} \qquad (t \geq \tau). \tag{1.7.3}$$

Правая часть этой оценки не зависит от $y(t)$. Пусть $y^*(t) = \lim_{k\to\infty} y_k(t_k + t)$ — обобщенное решение системы (II) с характеристическим показателем $\mu\left(y_k(t)(k = 1,2,...)\right)$ — обычные решения системы (II), предел, равномерный на отрезках при $t \geqslant t_0$). Пусть дано $\varepsilon > 0$. Возьмем δ, определенное (1.7.2). Тогда по доказанному для каждого $k = 1,2,...$ из (1.6.1) следует $(t \geqslant \tau)$

$$\frac{\|y_k(t_k + t)\|}{\|y_k(t_k + \tau)\|} \leqslant \overline{C}_\varepsilon e^{\left(\Omega_0 + \frac{3}{4}\varepsilon\right)(t-\tau)}.$$

При $k \to \infty$ в пределе получаем $(t \geqslant \tau)$:

$$\frac{\left\|y^*(t)\right\|}{\left\|y^*(\tau)\right\|} \leqslant \overline{C}_\varepsilon e^{\left(\Omega_0+\frac{3}{4}\varepsilon\right)(t-\tau)}, \tag{1.7.4}$$

откуда $\mu < \Omega_0 + \varepsilon$.

Пусть теперь $t \leqslant \tau$. Тогда все предыдущее верно, если заменить Ω_0 на $-\omega_0$ и $\int\limits_\tau^t$ на $\int\limits_t^\tau$, и мы получаем, $\mu \geqslant \omega_0 - \varepsilon$ что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. В [14], [16] Р. Э. Виноград поставил проблему: указать непонижаемую границу скачка наибольшего характеристического показателя (в наших обозначениях этот показатель равен max Λ^0) системы (I) при малых возмущениях (возмущенная система— система (II), условие малости возмущения — условие (1.6.1)). Эта проблема решена лишь в частном случае, когда система (I) — диагональная (самим Р. Э. Виноградом, см. [14]). Теоремы 1.11 и 1.4 дают полный ответ на аналогичный вопрос для характеристических показателей обобщенных решений. Теорема 1.10 добавляет сюда же нечто большее (для $A(t) \in R$).

ГЛАВА II

СИСТЕМЫ С ЗАМЕДЛЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ (СИСТЕМЫ СО СЛАБОЙ ВАРИАЦИЕЙ В БЕСКОНЕЧНОСТИ ПО К. П. ПЕРСИДСКОМУ)

Напомним определение К. П. Персидского (см., например, [3]), Система (I) называется с и с т е м о й с о с л а б о й в а р и а ц и е й в б е с к о н е ч н о с т и (мы чаще будем использовать в качестве синонима: «$A(t)$ — замедляющаяся матрица» или «коэффициенты системы (I) замедляются»), если для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого T найдется t_1 такое, что $\left\|A(\theta_1) - A(\theta_2)\right\| < \varepsilon$ при $\theta_2 \geq \theta_1 \geq t_1$, $\theta_2 - \theta_1 \leqslant T$. Заметим, что замедляющаяся матрица $A(t)$ равномерно непрерывна на $[t_0, +\infty)$.

Л е м м а 2.1. *Пусть матрица $A(t)$ в системе* (I) *равномерно непрерывна на* $[t_0, +\infty)$. *Тогда всякое предельное решение этой системы есть одновременно обычное решение некоторой системы*

$$\frac{dx^*}{dt} = A^*(t)x^*, \tag{2.1}$$

где

$$A^*(t) = \lim_{t_k \to +\infty} A(t_k + t) \tag{2.2}$$

(предел, равномерный на отрезках).

Наоборот, всякое обычное решение всякой системы (1.2), *где $A^*(t)$ определено формулой* (2.2), *есть предельное решение системы* (I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть $x^*(t) = \lim\limits_{t_k \to +\infty} x_k(t_k + t)$ - предельное решение системы (I). Имеем

$$x_k(t_k + t) = x_k(t_k) + \int\limits_0^t A(t_k + \tau) x_k(t_k + \tau)\, d\tau. \tag{2.3}$$

Последовательность $A(t_k+t)$ удовлетворяет условиям теоремы Асколи (см. [4|, стр. 43), так как $\|A(t)\| \leqslant a$ и $A(t)$ равномерно непрерывна на $[t_0,+\infty)$; поэтому некоторая подпоследовательность $A(t_k+t)$ сходится равномерно на отрезках к некоторой непрерывной функции $A^*(t)$. Положив в (2.3) $k=kj$ и перейдя к пределу при $j\to\infty$, получаем

$$x^*(t)=x^*(0)+\int_0^t A^*(\tau)x^*(\tau)\,d\tau,$$

следовательно, $x^*(t)$ дифференцируема и удовлетворяет системе (2.1).

2°. Пусть $x^*(t)$ — решение системы (2.1), где $A^*(t)$ определена (2.2). Рассмотрим решения $x_k(t)$ системы (I), удовлетворяющие (2.3), где $x_k(t_k)=x^*(0)$. Имеем:

$$\|x_k(t_k+t)\| \leqslant e^{at}\|x^*(0)\|,$$

$$\left\|\frac{d}{dt}x_k(t_k+t)\right\| \leqslant a\|x_k(t_k+t)\|,$$

значит, последовательность $x_k(t_k+t)$ удовлетворяет условиям теоремы Асколи (см. [4], стр. 43), и потому существует подпоследовательность $x_{k_j}\left(t_{k_j}+t\right)$, сходящаяся равномерно на отрезках к некоторой функции $\overline{x}(t)$. Положив в (2.3) $k=kj$ и перейдя к пределу при $j\to\infty$, получаем

$$\overline{x}(t)=x^*(t)+\int_0^t A^*(\tau)\overline{x}(\tau)\,d\tau,$$

откуда по теореме единственности

$$x^*(t)=\overline{x}(t)=\lim_{t_{k_j}\to+\infty} x_{k_j}\left(t_{k_j}+t\right),$$

т е. $x^*(t)$ — предельное решение системы (I), что и требовалось доказать.

Обозначение. Обозначим M — множество частичных пределов $\lambda(t)$ при $t\to+\infty$, где $\lambda(t)$ — собственное значение матрицы $A(t)$. Очевидно

$$M=\overline{M}. \tag{2.4}$$

Далее всюду в главе II будем рассматривать систему (I) с замедляющейся матрицей $A(t)$.

Теорема 2.1. *Пусть $A(t)$ замедляющаяся матрица. Тогда* $\Lambda_s^\infty=\Lambda^\infty=M$.

Доказательство 1°. Пусть $\mu\in M$, т. е.

$$\mu=\lim_{k\to\infty}\lambda(t_k) \qquad \left(t_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty\right),$$

где $\lambda(t_k)$—собственное значение матрицы $A(t_k)$. Из последовательности $A(t_k,t)$ выберем последовательность, сходящуюся равномерно на отрезках к некоторой $A^*(t)$. Из того, что $A(t)$ — замедляющаяся матрица, вытекает $A^*(t)\equiv A^*$ (не зависит от t). μ —

собственное значение матрицы A^* (в силу непрерывной зависимости спектра матрицы от ее элементов). Значит, μ — характеристический показатель некоторого решения $x^*(t)$ системы (2.1), которое, по лемме 2.1, является предельным решением системы (I), т. е. $\mu \in \Lambda^\infty$; таким образом, доказано

$$M \subseteq \Lambda^\infty. \tag{2.5}$$

2°. Пусть $\lambda \in \Lambda^\infty$, т. е. λ — характеристический показатель некоторого предельного решения $x^*(t)$ системы (I); по лемме 2.1, $x^*(t)$ удовлетворяет (2.1), где $A^*(t)$ определена (2.2). Так как $A(t)$ — замедляющаяся матрица, то $A^*(t) \equiv A^*$; значит λ — собственное значение матрицы A^*, а следовательно, $\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda(t_k)$, где $\lambda(t_k)$ одно из собственных значений $A(t_k)$, т. е. $\lambda \in M$.

Таким образом, доказано

$$\Lambda^\infty \subseteq M. \tag{2.6}$$

Кроме того, так как $x^*(t)$ — решение системы с постоянными коэффициентами ($A^*(t) \equiv A^*$), то λ одновременно является максимальным показателем $x^*(t)$, значит, по теореме 1.9, $\lambda \in \Lambda_s^\infty$, таким образом, доказано

$$\Lambda^\infty \subseteq \Lambda_s^\infty. \tag{2.7}$$

Из (1.6.4), (2.4) — (2.7) следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. У М. Г. Крейна (см. [3]) доказано, что для системы с замедляющимися коэффициентами $\Omega_0 \leqslant \sup M$.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть $A(t)$ — замедляющаяся матрица. Тогда*

$$\Lambda \subseteq \Lambda^\infty. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Очевидно,

$$\Lambda^\infty \subseteq \Lambda. \tag{2.9}$$

Докажем обратное включение. Пусть $x(t)$ — обычное решение системы (I) и λ — его характеристический показатель. Обозначим

$$p(t) = \frac{d}{dt} \ln \|x(t)\|. \tag{2.10}$$

Тогда найдутся $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k - t_0} \int_{t_0}^{t_k} p(\tau)\,d\tau = \lambda. \tag{2.11}$$

Выберем τ_k $(k = 1, 2, ...)$ так, чтобы

$$\tau_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \ \frac{t_k}{\tau_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{2.12}$$

Тогда

$$\frac{1}{t_k - t_0} \int_{t_0}^{t_k} p(\tau)\,d\tau = \frac{\tau_k - t_0}{t_k - t_0} \cdot \frac{1}{\tau_k - t_0} \int_{t_0}^{\tau_k} p(\tau)\,d\tau + \frac{t_k - \tau_k}{t_k - t_0} \cdot \frac{1}{t_k - \tau_k} \int_{\tau_k}^{t_k} p(\tau)\,d\tau. \tag{2.13}$$

Первое слагаемое в правой части (2.13) $\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (в силу (2.12) и неравенства $|p(t)| \leqslant a$, вытекающего из $\|A(t)\| \leqslant a$). Поэтому в силу (2.13), (2.12), (2.11)

$$\lambda_k = \frac{1}{t_k - \tau_k}\int_{\tau_k}^{t_k} p(\tau)\,d\tau \underset{k\to\infty}{\to} \lambda . \tag{2.14}$$

2°. Пусть даны отрезок $[\sigma_1,\sigma_2]$ и число $T \leqslant \sigma_2 - \sigma_1$. Пусть

$$\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} p(\tau)\,d\tau = \mu . \tag{2.15}$$

Тогда найдется отрезок $[\rho_1,\rho_2] \subseteq [\sigma_1,\sigma_2]$ такой, что $T \leqslant \rho_2 - \rho_1 \leqslant 2T$ и

$$\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\int_{\rho_1}^{\rho_2} p(\tau)\,d\tau = \mu. \tag{2.16}$$

Докажем это. Отложим на отрезке $[\sigma_1,\sigma_2]$ слева направо отрезки длины T. Получим m отрезков $Q_1,Q_2,...,Q_m$ длины T и остаток Q_{m+1} длины $<T$. Если среднее от $p(t)$ на каком-то Q_i $i\leqslant m$ равно μ, то все доказано. Если нет, то (предположим, для определенности, что среднее от $p(t)$ на Q_1 меньше μ) пусть i_0 — наименьшее из тех $i \leqslant m+1$, для которых

$$\frac{1}{\mathrm{mes}Q_i}\int_{Q_i} p(\tau)\,d\tau > \mu$$

(такие i существуют в силу (2.15)).

Тогда (обозначим $a<b<c$ концы отрезков Q_{i_0-1},Q_{i_0})

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(\tau)\,d\tau < \mu \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{c-b}\int_b^c p(\tau)\,d\tau > \mu. \tag{2.18}$$

Рассмотрим три случая:

а) $i_0 \leqslant m$, $\dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^c p(\tau)\,d\tau \leqslant \mu$, (2.19)

б) $i_0 \leqslant m$, $\dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^c p(\tau)\,d\tau > \mu$, (2.20)

в) $i_0 = m+1$. (2.21)

Случай а).

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{c-t}\int_t^c p(\tau)\,d\tau$$

непрерывная функция,

$$\bar{u}(b) \underset{(2.18)}{>} \mu, \quad \bar{u}(a) \underset{(2.19)}{\leqslant} \mu .$$

Значит найдется $\bar{t} \in [a,b]$ такое, что $\bar{u}(\bar{t}) = \mu$; тогда отрезок $[\rho_1,\rho_2] = [\bar{t},c]$ — искомый.

Случай б).

$$\underline{u}(t) = \frac{1}{t-a}\int_a^t p(\tau)\,d\tau$$

непрерывная функция,

$$\underline{u}(b) \underset{(2.17)}{<} \mu, \quad \underline{u}(c) \underset{(2.20)}{>} \mu .$$

Значит найдется $\underline{t} \in [b,c]$ такое, что $\underline{u}(\underline{t}) = \mu$; тогда отрезок $[\rho_1,\rho_2] = [a,\underline{t}]$ — искомый.

Случай в). В этом случае

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c p(\tau)\,d\tau > \mu,$$

поэтому рассматривается так же, как случай б).

3°. Согласно доказанному в пункте 2° на каждом отрезке $[\tau_k, t_k]$ найдется отрезок

$$\left[\tau_k^{(m_k)}, t_k^{(m_k)}\right] \subseteq [\tau_k, t_k]$$

длины, заключенной между $m_k = E(t_k - \tau_k)$ и $2m_k$ ($E(x)$ — целая часть x), на котором среднее от $p(t)$ равно λ_k, где λ_k определено (2.14). Применим теперь доказанное в пункте 2° к отрезку $\left[\tau_k^{(m_k)}, t_k^{(m_k)}\right]$ и т. д. Получаем при каждом $k = 1, 2, \ldots$ отрезки

$$[\tau_k, t_k] \supseteq \left[\tau_k^{(m_k)}, t_k^{(m_k)}\right] \supseteq \ldots \supseteq \left[\tau_k^{(1)}, t_k^{(1)}\right], \tag{2.22}$$

причем

$$2j \geqslant t_k^{(j)} - \tau_k^{(j)} \geqslant j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m_k). \tag{2.23}$$

и

$$\frac{1}{t_k^{(j)} - \tau_k^{(j)}} \int_{\tau_k^{(j)}}^{t_k^{(j)}} p(\tau)\,d\tau = \lambda_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, m_k). \tag{2.24}$$

Выберем подпоследовательность $\{k_{s,1}\}$ так, чтобы последовательность $t_{k_{s,1}}^{(1)} - \tau_{k_{s,1}}^{(1)}$ сходилась (к $\theta^{(1)}$). Из $\{k_{s,1}\}$ выберем подпоследовательность $\{k_{s,2}\}$ так, что

$$t_{k_{s,2}}^{(2)} - \tau_{k_{s,2}}^{(1)} \underset{s\to\infty}{\to} \theta^{(2)},$$

$$\tau_{k_{s,2}}^{(2)} - \tau_{k_{s,2}}^{(1)} \underset{s\to\infty}{\to} \theta_{(2)}$$

и т. д. Тогда

$$t_{k_{s,s}}^{(j)} - \tau_{k_{s,s}}^{(1)} \underset{s\to\infty}{\to} \theta^{(j)},, \tag{2.25}$$

$$\tau_{k_{s,s}}^{(j)} - \tau_{k_{s,s}}^{(1)} \underset{s\to\infty}{\to} \theta_{(j)} \tag{2.26}$$

при всяком $j = 1, 2, \ldots$. Из последовательности функций

$$\frac{1}{\left\| x\left(\tau_{k_{s,s}}^{(1)}\right) \right\|} x\left(\tau_{k_{s,s}}^{(1)} + t\right) \tag{2.27}$$

по теореме Асколи (см. [4], стр 43) выберем подпоследовательность, сходящуюся равномерно на отрезках к некоторой функции $x^*(t)$. Так как $\tau_{k_{s,s}}^{(1)} \geqslant \tau_{k_{s,s}} \underset{s\to\infty}{\to} +\infty$, то $x^*(t)$ — предельное решение системы (I). В силу (2.25) — (2.27), (2.24), (2.14)

$$\ln \frac{\left\| x^*\left(\theta^{(j)}\right) \right\|}{\left\| x^*\left(\theta_{(j)}\right) \right\|} = \lambda\left(\theta^{(j)} - \theta_{(j)}\right). \tag{2.28}$$

В силу (2.25), (2.26), (2.23)

$$2j \geqslant \theta^{(j)} - \theta_{(j)} \geqslant j \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{2.29}$$

Так как, согласно лемме 2.1, $x^*(t)$ есть обычное решение некоторой линейной системы с постоянными коэффициентами, то

$$0<\overline{C}_\varepsilon e^{(\lambda^*-\varepsilon)(t-\tau)} \leqslant \frac{\|x^*(t)\|}{\|x^*(\tau)\|} \leqslant C_\varepsilon e^{(\lambda^*+\varepsilon)(t-\tau)} \tag{2.30}$$

для всякого $\varepsilon>0$ и всех $t>\tau$, где $\lambda^*=\mathrm{const}$.

Из (2.28) — (2.30) следует $\lambda^*=\lambda$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.3 (в [28] содержится большая часть этой теоремы). *Пусть* $A(t)$ — *замедляющаяся матрица. Тогда*

$$\Lambda_s=\Lambda=\Lambda_s^\infty=\Lambda^\infty=M. \tag{2.31}$$

Доказательство. Имеем

$$\Lambda_s \underset{(1.6.2)}{\subseteq} \overline{\Lambda} \underset{(2.8)}{=} \overline{\Lambda^\infty} \underset{\substack{\text{теорема}\\ 2.1}}{=} \overline{M} \underset{(2.4)}{=} M \underset{\substack{\text{теорема}\\ 2.1}}{=} \Lambda_s^\infty \tag{2.32}$$

Из (2.32) и (1.6.3) получаем

$$\Lambda_s=\Lambda_s^\infty. \tag{2.33}$$

Из теоремы 2.1, (2.8), (2.33) вытекает (2.31).

Рассмотрим известный пример Перрона (вернее, видоизменение примера Перрона, приведенное в [1], стр. 199):

$$\frac{dx}{dt}=(\sin\ln t+\cos\ln t)x,$$
$$\frac{dy}{dt}=(-\sin\ln t+\cos\ln t)y$$

(характеристические показатели обычных решений этой системы неустойчивы). Это система с замедляющимися коэффициентами, так как здесь $\|\dot{A}(t)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Множество M для нее легко вычислить — это множество частичных пределов коэффициентов системы при $t\to+\infty: M=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. По теореме 2.3

$$\Lambda_s=\Lambda=\Lambda_s^\infty=\Lambda^\infty=M=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right].$$

Опубликовано в [28].)

ГЛАВА III.

ПРИМЕРЫ

Цель приведенных в этой главе примеров — доказать, что результаты предыдущих глав не могут быть существенно усилены.

1. Пример системы, у которой $\Lambda\notin M$, причем $\Lambda^0\notin M$;

$$\Lambda^\infty\notin M,\ \Lambda_s\notin M,\ \Omega_0=\sup\Lambda=\sup\Lambda_s>\sup M$$

Выше (теорема 2.1) было доказано, что для системы с замедляющимися коэффициентами $\Lambda=M$. В общем случае это не так. В самом деле, известно (см. [21]), что существует пример системы (I), для которой $\sup\limits_{t\geq t_0}\lambda(t)<0$, а система неустойчива[1].

---

[1] Вот такой пример. Сделаем в неустойчивой по Ляпунову системе (I) с матрицей $A(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ ортогональное преобразование $x=U^{-1}(t)\overline{x}$, где

$$U(t)=\begin{pmatrix}\cos 2t & \sin 2t\\ -\sin 2t & \cos 2t\end{pmatrix}.$$

В результате система останется неустойчивой, но ее матрица

Следовательно, у этой системы существует обычное решение с характеристическим показателем

$$\lambda_0 \geqslant 0 > \sup_{t \geq t_0} \lambda(t) \geqslant \sup M$$

Имеем в силу теоремы 1.4 $\Omega_0 \geqslant \lambda_0 > \sup M$, следовательно: $\lambda_0 \in \Lambda^0$, $\lambda_0 \notin M$, $\Omega_0 \in \Lambda^\infty$, $\Omega_0 \notin M$.

2. Пример системы, у которой $\Lambda^0 \notin \Lambda_s$.

Пример строится с использованием методики Перрона (см. [5]). Обозначим

$$\tau_k = 4^k + 1 \qquad (k \geqslant 1), \qquad\qquad t_k = 4^k - 1 \qquad (k \geqslant 0), \tag{3.1}$$

Введем функцию

$$\underset{(t\geq 0)}{p(t) =} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ (-1)^k & \text{при} \quad \tau_k \leqslant t \leqslant t_k, \\ (-1)^k \left(t - 4^k\right) & \text{при} \quad \tau_{k-1} \leqslant t \leqslant \tau_k, \end{cases} \tag{3.2}$$

$p(t)$ непрерывна, и

$$\left|p(t)\right| \leqslant 1. \tag{3.3}$$

Обозначим

$$\overline{p}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t p(\tau)\, d\tau. \tag{3.4}$$

Рассмотрим систему (в примере Перрона в [5] такая же система, но с другой функцией $p(t)$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p(t)\, x, \\ \frac{dy}{dt} &= 2p(t)\, y + be^{-ct}x \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

($c \leqslant \frac{1}{8}$, b — произвольное).

Решение невозмущенной $(b = 0)$ системы:

$$x \underset{(3.4)}{=} C_1 e^{t\overline{p}(t)}$$

$$y \underset{(3.4)}{=} C_2 e^{2t\overline{p}(t)}$$

Характеристические показатели обычных решений равны

$$\lambda_0 = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \overline{p}(t) \underset{(3.2)}{=} \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \overline{p}(t_{2k}) \tag{3.6}$$

и $2\lambda_0$. Решение возмущенной $(b \neq 0)$ системы

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{t\overline{p}(t)}, \\ y &= e^{2t\overline{p}(t)}\left(C_2 + C_1 b\int_0^t e^{-\tau\overline{p}(\tau) - c\tau}\, d\tau\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$B(t) = U\left(A + U^{-1}\dot{U}\right)U^{-1} = U\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}U^{-1}$$

имеет при всех t собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Докажем, что характеристический показатель этого решения при $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ больше $2\lambda_0$. Для этого достаточно доказать, что $\lambda_1 > 2\lambda_0$, где

$$\lambda_0 = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln\left(e^{2t\bar{p}(t)} \int_0^t e^{-\tau\left[\bar{p}(\tau)+c\right]} d\tau \right). \tag{3.8}$$

Обозначим

$$\theta_k = \frac{\tau_k + t_k}{2} \underset{(3.1)}{=} \frac{1}{2}\left(4^{k+1} + 4^k\right) \tag{3.9}$$

Пусть $t \in \left[\theta_{2k-1}, t_{2k-1}\right], k \geqslant 2$, тогда

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t p(\tau)\,d\tau = \frac{\tau_{2k-1}}{t} \cdot \frac{1}{\tau_{2k-1}} \int_0^{\tau_{2k-1}} p(\tau)\,d\tau + \frac{t-\tau_{2k-1}}{t} \cdot \frac{1}{t-\tau_{2k-1}} \int_{\tau_{2k-1}}^t p(\tau)\,d\tau \leqslant$$

$$\underset{\substack{(3.3)\\(3.2)}}{\leqslant} \frac{\tau_{2k-1}}{t} - \frac{t-\tau_{2k-1}}{t} \leqslant \frac{2\tau_{2k-1}}{\theta_{2k-1}} - 1 \underset{(3.1)}{<} -\frac{1}{8},$$

т. е.

$$\bar{p}(t) \leqslant -c - \alpha \text{, где } \alpha > 0 \text{, при } t \in \left[\theta_{2k-1}, t_{2k-1}\right],\ k \geq 2. \tag{3.10}$$

Имеем

$$\int_0^{t_{2k}} e^{-\tau\left(\bar{p}(\tau)+c\right)} d\tau \geqslant \int_{\theta_{2k-1}}^{t_{2k-1}} e^{-\tau\left(\bar{p}(\tau)+c\right)} d\tau \underset{(3.10)}{\geqslant} \int_{\theta_{2k-1}}^{t_{2k-1}} e^{\alpha\tau} d\tau \underset{\substack{(3.1)\\(3.9)}}{\geqslant} e^{\alpha\theta 2k-1} \underset{\substack{(3.1)\\(3.9)}}{\geqslant} e^{\beta t_{2k}}, \tag{3.11}$$

где $\beta > 0$. Теперь

$$\lambda_1 \underset{(3.8)}{\geqslant} 2\overline{\lim_{k\to\infty}} \bar{p}\left(t_{2k}\right) + \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_{2k}} \ln \int_0^{t_{2k}} e^{-\tau\left(\bar{p}(\tau)+c\right)} d\tau \underset{\substack{(3.6)\\(3.11)}}{\geqslant} 2\lambda_0 + \beta > 2\lambda_0.$$

Характеристический показатель решения возмущенной системы в случае $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ равен $2\lambda_0$. Так как у системы второго порядка не может быть больше двух различных характеристических показателей, то для возмущенной системы Λ^0 состоит из двух чисел $2\lambda_0$ и λ_1:

$$0 < \lambda_0 < 1. \tag{3.12}$$

Докажем $\lambda_0 < 1$ ($\lambda_0 > 0$ доказывается аналогично):

$$\lambda_1 \underset{(3.6)}{=} \overline{\lim_{k\to\infty}} \bar{p}\left(t_{2k}\right) \underset{(3.4)}{=} \overline{\lim_{k\to\infty}} [\frac{t_{2k-1}-\tau_{2k-1}}{t_{2k}} \cdot \frac{1}{t_{2k-1}-\tau_{2k-1}} \int_{\tau_{2k-1}}^{t_{2k-1}} p(\tau)\,d\tau + \frac{\int_0^{\tau_{2k-1}} p(\tau)\,d\tau + \int_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} p(\tau)\,d\tau}{\tau_{2k-1} + t_{2k} - t_{2k-1}} \times$$

$$\times \frac{\tau_{2k-1} + t_{2k} - t_{2k-1}}{t_{2k}}] \underset{\substack{(3.2)\\(3.3)}}{\leqslant} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_{2k}} \left[-\left(t_{2k-1} - \tau_{2k-1}\right) + \tau_{2k-1} + t_{2k} - t_{2k-1} \right] = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left[1 - 2\frac{t_{2k-1}-\tau_{2k-1}}{t_{2k}} \right] \underset{(3.1)}{\leqslant} 1 - 2\varepsilon$$

где $\varepsilon > 0$.

Обозначим систему (3.5) так:

$$\frac{dv}{dt} = A_b(t)v, \tag{3.13}$$

где $v = (x, y)$. Пусть $v^*\left(\bar{t}\right)$ — предельное решение системы (3.13). По лемме 2.1, $v^*(t)$ является также обычным решением некоторой системы

$$\frac{dv^*}{dt} = A_b^*(t)v^* \text{, где } A_b^*(t) = \lim_{k\to\infty} A_b\left(h_k + t\right) \quad \left(h_k\right) \underset{k\to\infty}{\to} +\infty \tag{3.14}$$

(предел, равномерный на отрезках).

Из (3.5) следует, что

$$A_b^*(t)=\begin{pmatrix} p^*(t) & 0 \\ d & 2p^*(t) \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

где

$$d=\begin{cases} b & \text{при} \quad c=0, \\ 0 & \text{при} \quad c>0, \end{cases} \tag{3.16}$$

$$p^*(t)=\lim_{k\to\infty} p(h_k+t) \tag{3.17}$$

(предел, равномерный на отрезках).

Из (3.2) следует, что при $t \geqslant$ некоторого t_0 (зависящего от $p^*(t)$) либо $p^*(t)\equiv 1$, либо $p^*(t)\equiv -1$. Следовательно, характеристический показатель $v^*(t)$ равен ± 1 или ± 2. Итак, найдется $\varepsilon_0>0$ такое, что при любом b у системы (3.5) нет обобщенного решения, характеристический показатель которого $\in(\lambda_0-\varepsilon_0,\lambda_0+\varepsilon_0)$; значит, $\lambda_0 \notin$ грубому спектру системы (3.5) при $b=0$.

3. Пример системы, у которой $\Lambda^0 \notin \Lambda_s$, $\Lambda^\infty \notin \Lambda_s$. (Усложнение предыдущего примера). В этом примере мы несколько изменим функцию $p(t)$ в системе (3.5) при $c=0$, т. е. рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=q(t)x, \\ \frac{dy}{dt}&=2q(t)y+bx. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Функцию $q(t)$ определим так: она совпадает с $p(t)$ всюду, кроме интервалов $(\tau_{2k},\tau_{2k}+k+1)$, причем $q(t)=p(t-\tau_{2k})$ на $(\tau_{2k},\tau_{2k}+k)$, а на $(\tau_{2k}+k,\tau_{2k}+k+1)$ доопределим $q(t)$ линейно, т. е. на этом интервале

$$q(t)=(t-\tau_{2k}-k)q(\tau_{2k}+k+1)+(\tau_{2k}+k+1-t)q(\tau_{2k}+k),$$

Отметим, что

1) $|q(t)|\leqslant 1$.

2) Пусть $m(t)$ — мера того подмножества отрезка $[0,t]$, на котором $q(t)\neq p(t)$; тогда $\dfrac{m(t)}{t}\underset{t\to\infty}{\to} 0$.

3) (Вытекает из 1) и 2))

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{q}(t_{2k})=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{p}(t_{2k})=\lambda_0,$$

где

$$\overline{q}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t q(\tau)\,d\tau$$

4) Рассуждения, приводящие к неравенствам (3.10), (3.11), полностью остаются в силе, если там вместо $p(t)$ (соответственно $\overline{p}(t)$) писать $q(t)$ (соответственно $\overline{q}(t)$). В самом деле, в этих рассуждениях использованы только следующие свойства $p(t)$:

а) $p(t)\leqslant 1$,

б) $p(t)=-1$ на $[\tau_{2k-1},t_{2k-1}]$,

в) $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\,\overline{p}(t_{2k})=\lambda_0$, но этими же свойствами обладает и $q(t)$.

Таким образом, обычные решения системы (3.18) при $b \neq 0$ имеют характеристические показатели $2\lambda_0$ и $\lambda_1 > 2\lambda_0$, а при $b = 0$ $2\lambda_0$ и λ_0.

5) В рассуждениях о предельных решениях $v^*(t)$ изменение следующее: все остается, за исключением вида матрицы $A_b^*(t)$. Теперь

$$A_b^*(t) = \begin{pmatrix} q^*(t) & 0 \\ b & 2q^*(t) \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

где

$$q^*(t) = \lim_{k\to\infty} q(h_k + t) \quad h_k \underset{k\to\infty}{\rightarrow} +\infty$$

(предел, равномерный на отрезках); из определения функции $q(t)$ видно, что реализуются такие и только такие возможности:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & q^*(t) \equiv p^*(t), \\ 2) & q^*(t) \equiv p(t+h) \end{array}\right. \quad \left(t \geqslant t_0\left(q^*(t)\right)\right)$$

для (любого) $h = \text{const}$.

Поэтому предельные решения $v^*(t) = \left(x^*(t), y^*(t)\right)$ системы (3.18), являющиеся вместе с тем, по лемме 2.1, обычными решениями системы (3.14), где вид $A_b^*(t)$ указан в (3.19), имеют характеристические показатели $2,-2,1,-1,2\lambda_0,\lambda_1$ (λ_1 определено (3.8) и зависит от c, здесь λ_1 берется при $c = 0$) при всех $b \neq 0$ и $2,-2,1,-1,2\lambda_0,\lambda_0$ при $b = 0$.

Так как λ_0 отлично от $0,1-1,2-2,\lambda_1$, то $\lambda_0 \notin \Lambda_s$, тогда как $\lambda_0 \in \Lambda^0 \bigcap \Lambda^\infty$.

Легко видеть, что в системах из примеров 1—3, так же, как и во всех примерах Р. Э. Винограда и Б. Ф. Былова, несмотря на всю «экзотичность» этих систем, $A(t) \in R$; таким образом, развитая в настоящей работе теория R-систем охватывает весьма обширный класс систем (I). Подчеркнем также, что теоремы 1.3—1.8 и 1.11 (см. выше) доказаны для произвольных систем (I), а теоремы главы II относятся к системам, определение которых дает возможность распознавать их только по коэффициентам, ничего не зная о решениях.

Поступило
1. IX. 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2-е изд., М.— Л., Гостехиздат, 1949.

2. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8-е изд., М., Физмат-гиз, 1959.

3. Крейн М. Г., Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изд-во АН УССР, Институт математики, 1964.

4. Bourbaki H., Topologie generale, Chapitre 10. Espaces fonctionnels, Paris, 1949.

5. Perron O., Die Ordnungszahlen finearer Differentialgleichungssysteme, Math. Zeitschr. **31** : 5 (1930), 748—766.

6. Perron O., Über eine Matrixtransformation, Math. Zeitschr. **32**:3 (1930). 465—473.

7. Былов Б. Ф., О характеристичных числах решений систем линейных дифференциальных уравнений, ПММ **14**, вып. 4 (1950), 341—352.

8. Былов Б. Ф., Устойчивость характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений, Дисс. МГУ, 1954.

9. Былов Б. Ф., Гробман Д. М., Принцип линейного включения для систем дифференциальных уравнений, УМН, **17**, вып. 3 (1962), 159—161.

10. Былов Б. Ф., Об устойчивости сверху наибольшего характеристического показателя системы линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами, Матем. сб. **48 (90)** : 1 (1959), 117—128.

11. Виноград Р. Э., Новое доказательство теоремы Перрона и некоторые свойства правильных систем, УМН **9**, вып. 2 (60), (1954), 129—136.

12. Виноград Р. Э., Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем, ПММ **17**, вып. 6 (1953), 645—650.

13. Виноград Р. Э., Общий случай устойчивости характеристических показателей и существования ведущих координат, ДАН **119,** № 4 (1958), 633—635.

14. Виноград Р. Э., О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений, Матем. сб. **42 (82)** : 2 (1957), 207—222.

15. Виноград Р. Э., К теории характеристических показателей Ляпунова, Автореферат докт. дисс, УМН **15**, вып. 5 (1960), 227—233.

16. Виноград Р. Э., К теории характеристических показателей Ляпунова, Докт. дисс, МГУ, 1958.

17. Гробман Д. М., О характеристических показателях систем, близких к линейным, ДАН, **75**, № 2 (1950), 157—160.

18. Гробман Д. М., Характеристические показатели систем, близких к линейным, Матем. сб. **30 (72)** : 1 (1952), 121—166.

19. Гробман Д. М., Системы дифференциальных уравнений, аналогичные линейным, ДАН **86**, № 1 (1952), 19—22.

20. Гробман Д. М., Показатели и минус-показатели систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. сб. **46 (88)** : 3 (1958), 343—358.

21. Валиков К. В., Некоторые критерии устойчивости движения в гильбертовом пространстве, УМН **19,** вып. 4 (1964), 179—184.

22. Diliberto S. P., On systems of ordinary differential equations, Contrubutions to the theory of nonlinear oscillations, 1950.

23. Lillo J. C, Perturbations of nonlinear systems, Acta Math. **103** (1960) 123— 128.

24. Миллионщиков В. М., К теории дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$. в локально выпуклых пространствах, ДАН **131,** № 3 (1960), 510—513.

25. Миллионщиков В. М., К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах, Матем. сб. **57 (99)** : 4 (1962), 385—406.

26. Миллионщиков В. М., Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений, ДАН **161** №1 (1965), 43—44.

27. Миллионщиков В. М., Асимптотика решений линейных систем с малыми возмущениями, ДАН **162,** № 2 (1965), 266—268.

28. Миллионщиков В. М., Об устойчивости характеристических показателей предельных решений линейных систем, ДАН **166,** № 1 (1966).

29. Stokes A., The application of a fixed — point theorem to a variety of nonlinear stability problems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45**, № 2 (1959), 231—235.

30. Tichonoff A., Ein Fixpunktsatz, Math. Ann. **3**:5 (1935), 767—776.