Доклады Академии наук СССР
1960. Том 131, № 3

МАТЕМАТИКА

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 XI 1959)

В этой работе обобщаются на случай полных локально выпуклых пространств некоторые теоремы, известные для уравнения $dx/dt = f(x,t)$ в банаховых пространствах ([1], [12]).

Пусть E — полное локально выпуклое пространство и $\{p(x)\}$ — достаточное множество полунорм в E ([2]). Пусть $\mathfrak{F}(S,E)$ — множество отображений измеримого множества $S \subseteq E^n$ ($\text{mes S} \leqslant \infty$) в E (E^n — $n-$мерное эвклидово пространство).

Функция $x(a) \in \mathfrak{F}(S,E)$ называется *интегрируемой* на S, если существует направленная последовательность функций $x_\beta(\alpha) \in \mathfrak{F}(S,E)$ (где $\beta \in B$; B — направленное множество) такая, что:

1) каждая $x_\beta(\alpha)$ счетнозначная функция ([3]);

2) для каждой полунормы $p(x) \in \{p(x)\}$ $Is(x_\beta(\alpha)) = \sum_{i=1}^{\infty} p\left[x_\beta(\alpha_{i\beta})\right] \times \text{mes S}_{i,\beta} < \infty$,

где $\text{S}_{i,\beta} (i = 1,...,n,...)$ — множества, на которых $x_\beta(\alpha)$ постоянна, а $\alpha_{i,\beta} \in \text{S}_{i,\beta}$;

3) для всякого $\varepsilon > 0$ и $p(x) \in \{p(x)\}$ существует $\beta \in B$ такое, что $Is(x_{\beta'}(\alpha) - x_{\beta''}(\alpha)) < \varepsilon$ для всяких $\beta', \beta'' > \beta; \beta', \beta'' \in B$;

4) для всякого $\varepsilon > 0$ существует $S_\delta \subset S$, $\text{mes S}_\varepsilon < \varepsilon$, такое, что $\{x_\beta(\alpha)\}$ равномерно на $\text{S} \setminus \text{S}_\varepsilon$ сходится к $x(\alpha)$.

Тогда $I = \frac{\lim}{\beta \in B} \sum_{i=1}^{\infty} x_\beta(\alpha_{i\beta}) \text{mes} S_{i,\beta}$ существует и не зависит от выбора $\{x_\beta(\alpha)\}$ со свойствами 1) — 4).

I называем *интегралом* $\int_S x(\alpha) d\alpha$ (более общий интеграл введен в ([4])).

Введенный интеграл обладает следующими свойствами:

1°. I вполне аддитивная функция множеств.

2°. I абсолютно непрерывная функция множеств.

3°. Если $x(\alpha)$ и $y(\alpha)$ интегрируемы, то

$$\int_S \left[\mu x(\alpha) + \nu y(\alpha)\right] d\alpha = \mu \int_S x(\alpha) d\alpha + \nu \int_S y(\alpha) d\alpha$$

4°. Если $x(\alpha)$ интегрируема, то суммируема $p(x(\alpha))$ и

$$p\left(\int_S x(\alpha) d\alpha\right) \leqslant \int_S p(x(\alpha)) d\alpha$$

5°. Пусть $x(\alpha)$ определена на компактном $S \subset E^n$ и множество $\mathfrak{X}$ ее значений ограничено ([5]). Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ существует $S_\delta \subset S$, $\text{mes S}_\varepsilon < \varepsilon$, такое, что $x(\alpha)$

непрерывна на $S \setminus S_\varepsilon$. Тогда $x(\alpha)$ интегрируема на S и $\int_S x(\alpha)d\alpha \in \mathrm{mes}S \cdot [\mathfrak{X}]$, где $[\mathfrak{X}]$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $\mathfrak{X}$.

6°. Если $x(\alpha)$ интегрируема на S и непрерывна в $\alpha_0 \in S$ (по отношению к S), то $\lim\limits_{d(Q)\to 0, \alpha_0 \in Q} \frac{1}{\mathrm{mes}Q}\int_Q x(\alpha)d\alpha$ существует и равен $x(\alpha_0)$.

7°. Система

$$x(t_0) = x_0, \ \frac{dt}{dx} = f(x,t), \ x(t) \in M \subseteq E \text{ для} \left|t - t_0\right| \leqslant \alpha,$$

где $f(x,t)$ непрерывно отображает $M \times E^1$ в E, эквивалентна уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)d\tau .$$

О п р е д е л е н и е. Оператор $A(A(E) \subseteq E)$ называется с ж и м а ю щ и м, если существует $0 \leqslant q < 1$ такое, что для всяких $p(x) \in \{p(x)\}, x, \ y \in E$

$$p(A(x) - A(y)) \leqslant qp(x - y). \tag{1}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть A — сжимающий оператор, $\phi \neq T = \overline{T} \subseteq E$, $A(T) \subseteq T$.*

Тогда существует, и притом единственный в E, $x \in T$ такой, что $A(x) = x$.

Т е о р е м а 2 ([6]). *Пусть T — замкнутое выпуклое множество $\subseteq E$*. Пусть *на T заданы операторы $A_i(A_i(E) \subseteq E, \ i - 1,2)$, причем:* 1) A_1 — *сжимающий оператор;* 2) $\overline{A_2(T)}$ *бикомпактно;* 3) A_2 *непрерывен*; 4): *если $x, y \in T$, то* $A_1(x) + A_2(y) \in T$.

Тогда существует $x \in T$ такой, что $A_1(x) + A_2(y) = x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in T$. Тогда (условия 1), 4) и теорема 1) существует, и притом единственный, $y \in T$ такой, что $y = A_1(y) + A_2(x)$ т. е. На T определен оператор $y = C(x)$, для которого

$$C(x) = A_1C(x) + A_2(x), \ C(T) \subseteq T \tag{2}$$

Пусть z, $\upsilon \in T$. Тогда из (2) и условия 1) получаем $p(C(z) - C(\upsilon)) \leqslant \frac{1}{1-q}p(A_2(z) - A_2(\upsilon))$ для всякой полунормы $p(x) \in \{p(x)\}$. Отсюда, в силу условий 2), 3), C непрерывен и $\overline{C(T)}$ бикомпактно (последнее при помощи ([8])). Рассматривая C лишь на замкнутой выпуклой оболочке множества $\overline{C(T)}$ ([7]) и применяя принцип Тихонова ([9]), получаем утверждение теоремы.

Пусть $\tilde{E}_s$ — пространство равномерной сходимости на компактах непрерывных отображений множества $S \subseteq E^1$ в E. Тогда $\tilde{E}_s$ — полное локально выпуклое пространство с достаточным множеством полунорм $\left\{\tilde{p}_{p,B}(\tilde{x}) = \sup\limits_{t \in B} p(x(t))\right\}$, $\left|\tilde{x} = x(t) \in \tilde{E}_S\right|$, где $p(x)$ пробегает $\{p(x)\}$, а B пробегает некоторое покрытие S компактами. $\tilde{M}_S$ обозначает множество отображений S в $M \subseteq E$.

Л е м м а 1. *Пусть $f(x,t)$ непрерывно отображает $M \times S$ в E, где $M \subseteq E$, $S = [t_0 - h, t_0 + h] \subset E^1$. Пусть $K(t) \geqslant 0$ — действительная функция такая, что* $\left|(L)\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\right| \leqslant q < 1$ $(t \in S)$ *и при всяких x, $y \in M$,* $p(x) \in \{p(x)\}$

$$p(f(x,t) - f(y,t) \leqslant K(t)p(x - y)$$

Тогда $A(\tilde{x}) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)d\tau$ — *сжимающий оператор, определенный на* $\tilde{M}_S$.

Лемма вытекает из свойств 5°, 2°, 4° интеграла.

Теорема 3. *Пусть* $f(x,t)$ *непрерывно отображает* $U \times [t_0 - a, t_0 + a]$ *в* E, *где* $U = U(x : p_i(x - x_0) \leqslant \varepsilon$, $p_i(x) \in \{p(x)\}$, $(i = 1,...,n)$ *и пусть* $\sup\limits_{x\in U;|t-t_0|\leqslant a} p_i(f(x,t)) < \infty$ $(i = 1,...,n)$. *Пусть* $K(t) \geqslant 0$ *суммируема на* $[t_0 - a, t_0 + a]$ *и для всяких* x, $y \in U$, $p(x) \in \{p(x)\}$

$$p(f(x,t) - f(y,t) \leqslant K(t)p(x - y).$$

Тогда существует h_0, $0 < h_0 \leqslant a$, *такое, что для всякого* h, $0 < h \leqslant h_0$ *существует, и притом единственное, решение* $x(t)$ *начальной задачи* $dx/dt = f(x,t), x(t_0) = x_0$, *определенное на* $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Доказательство. Положим $h_0 = \min(h_1, h_2)$, где таково, h_1 что

$$\max\left(\int_{t_0}^{t_0+h_1} K(\tau)d\tau, \quad \int_{t_0-h_1}^{t_0} K(\tau)d\tau\right) \leqslant q < 1 \quad h_2 = \frac{\varepsilon}{\sup\limits_{x\in U;|t-t_0|\leqslant a, i=1,...,n} pi(f(x,t))}.$$

Пусть $h < h_0$. Тогда, по лемме 1, выбору $h_2 > h$ и теореме 1, оператор $A(\tilde{x}) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)d\tau$ имеет в замкнутом множестве $\tilde{U}_{[t_0-h,t_0+h]} \subset \tilde{E}_{[t_0-h,t_0+h]}$ единственную неподвижную точку. Так как для всякого решения $x(t)$ системы, $dx/dt = f(x,t), x(t_0) = x_0$ существует $\delta > 0$ такое, что $x(t) \in U$ при $|t - t_0| < \delta$, то теорема доказана.

Замечание. Если в условии теоремы 3 заменить U на все E и $\int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)d\tau < 1$, то существует решение, определенное на всей прямой.

Лемма 2. *Пусть* $f(x,t)$ *непрерывно отображает* $M \times S$ *в* E, *где* $M \subseteq E$, $S \subseteq E^1$.

Тогда оператор $F(\tilde{x}) = f(x(t),t)$: 1) *определен на* $\tilde{M}_S$ *и действует в* $\tilde{E}_S$; 2) *непрерывен.*

Доказательство 1) см. ([10]). Идея доказательства 2) состоит в том, что непрерывный оператор $f(x,t)$ непрерывен равномерно относительно каждого бикомпактного множества $\mathfrak{X} \times B$, где — $B \subset S$ произвольный компакт, а $\mathfrak{X}$ — множество значений произвольной $\tilde{x} \in \tilde{E}_S$ на нем.

Лемма 3. *Пусть* $f(x,t)$ *непрерывно отображает* $M \times S$ *в* E $(M \subseteq E, S \subseteq E^1)$, *причем для каждого компакта* $B \subseteq S$ *существует бикомпакт* $F_B \subset E$ *такой, что* $f(M \times B) \subseteq F_B$.

Тогда оператор $A(\tilde{x}) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)d\tau$: 1) *непрерывен на* $\tilde{M}_S$ *и действует в* $\tilde{E}_S$; 2) $\overline{A(\tilde{M}_S)}$ *бикомпактно.*

Доказательство. 1) следует из леммы 2 и свойства 4° интеграла. 2) следует из свойства 5° интеграла и теоремы Асколи ([11]).

Теорема 4. *Пусть* $f(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t)$, *где* $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$ *непрерывно отображают* $U \times [t_0 - a, t_0 + a]$ *в* $E(U = U(x : p_i(x - x_0) \leqslant \varepsilon$, $p_i(x) \in \{p(x)\}$, $(i = 1,...,n)$.

Пусть $\overline{f_2(U\times[t_0-a,t_0+a])}$ *бикомпактно, удовлетворяет* $f_1(x,t)$ *условиям теоремы* 3.

Тогда найдется $h>0$ *такое, что существует решение начальной задачи* $x(t_0)=x_0$, $dx/dt=f(x,t)$, *определенное на* t_0-a,t_0+a.

Теорема 5 ([12]). *Пусть* $f(x,t)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3, *где* $M=E$ $S=[t_0,+\infty]$, *и пусть существует* $p_0(x)\in\{p(x)\}$ *и непрерывная функция* $G(r,t)$, *неубывающая по* $r (t\geqslant 0, r\geqslant 0)$ *такая, что при* $x\in E, t\in S$

$$p_0(f(x,t))\leqslant G(p_0(x),t) \tag{3}$$

Пусть для всякого $r_0>0$ *существует функция* $g(t)$, *определенная на* S, *такая, что*

$$\frac{dg}{dt}\geqslant G(g(t),t),\ g(t_0)=r_0 \tag{4}$$

Тогда для всякого $x_0\in E$ *существует решение начальной задачи* $dx/dt=f(x,t)$, $x(t_0)=x_0$, *определенное на всем* S.

Доказательство. На замкнутом выпуклом множестве $T=T(\tilde{x}=x(t): p_0(x(t))\leqslant g(t))$ $(T\subset\tilde{E}_S)$ определим оператор $A(\tilde{x})=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x(\tau),\tau)d\tau$. По лемме 3 $\overline{A(T)}$ бикомпакт $\subset\tilde{E}_S$ и A непрерывен на T. Из (3) и (4) выводим $A(T)\subseteq T$. Применяя принцип Тихонова, заканчиваем доказательство.

Аналогично доказываются теоремы 6 и 7([12]).

Теорема 6. *Пусть условия теоремы* 5 *выполнены для всякой* $p_0(x)\in\{p(x)\}$, *а* $g(t)$ *ограничена.*

Тогда решение $x(t)$ *начальной задачи ограничено (т. е. множество значений функции* $x(t)$ *ограничено* ([5])).

Теорема *7.* Пу*сть условия теоремы* 5 *выполнены для всякой* $p_0(x)\in\{p(x)\}$, *причем* (3) *может быть выполнено лишь для* x в *некоторой окрестности нуля, а в* (4) — *строгое равенство. Пусть* $f(0,t)=0$, $G(0,t)=0$, *причем точка* $g=0$ *для уравнения* $dg/dt=G(g(t),t)$ *устойчива (асимптотически устойчива).*

Тогда $x=0$ *устойчивая (соответственно асимптотически устойчивая) точка для уравнения* $dx/dt=f(x,t)$.

Выражаю благодарность В. В. Немыцкому за постановку задачи и указания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 XI 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, Тр. семинара по функциональн. анализу Воронежск. гос. унив., в. 2 (1956). [2] М. А. Наймарк, Нормированные кольца, М., 1956, стр. 46—52. [3] Э. Хилл, Функциональный анализ полугруппы, ИЛ, 1951, стр. 54, определение 3.2.2 (3). [4] R. S. Phillips, Trans. Am. Math. Soc, **47**, № 1, 114 (1940). [5] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, в. 2, Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958, стр. 45. [6] М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, **10**, в. 1 (63), 123 (1955). [7] Н. Бурбаки, Векторные топологические пространства, ИЛ, 1959, гл. II, § 4, п. 1. [8] Н. Бурбаки, Общая топология, М., 1958, гл. II, § 4, теорема 3. [9] A. Tychonoff. Math. Ann., **111**, 767 (1935). [10] Н. Бурбаки, Общая топология, М., 1958, гл. I, §4, теорема 1. [11] N. Bourbaki, Topologie generate, 1953, Ch. X, § 4, theoreme 1. [12] A. Stokes, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **45**, № 2, 231 (1959).