Программа курса «Дифференциальные уравнения»
Лектор — профессор И.Н. Сергеев

1. **Поля направлений на плоскости**
   1.1. Поле направлений, поле нормалей и интегральные кривые. Уравнение в дифференциалах и дифференциальное уравнение. Уравнение первообразной. Интеграл и общее решение уравнения. Уравнение в полных дифференциалах, его потенциал.
   1.2. Автономное уравнение. Особая точка: интегральный критерий и дифференциальный признак единственности. Уравнения остывания тела и вытекания жидкости. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородное уравнение, замена переменных.

2. **Существование и единственность решений**
   2.1. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши, её сведение к интегральному уравнению. Приближения Пикара. Локальная теорема существования и единственности. Глобальная единственность решений. Теорема существования (Пеано). Непродолжаемые решения: продолжаемость решения до единственного непродолжаемого и до границы области.
   2.2. Уравнение произвольного порядка. Каноническая замена и её свойства. Сведение уравнения к нормальной системе. Задача Коши: локальная теорема существования и единственности, глобальная теорема единственности, теорема существования, продолжаемость решения до единственного непродолжаемого и до границы области.
   2.3. Леммы об интегральном (Гронуолла — Беллмана) и дифференциальном неравенствах. Теоремы существования, единственности и продолжаемости для линейной системы и линейного уравнения. Уравнения колебаний маятника и его малых колебаний.
   2.4. Уравнение, не разрешённое относительно производной. Локальная теорема существования и единственности. Особое решение, дискриминантная кривая. Уравнение, разрешённое относительно функции. Метод введения параметра. Сглаженное уравнение вытекания жидкости.

3. **Общая теория линейных уравнений и систем**
   3.1. Линейная однородная система. Теорема об изоморфизме. Общее решение, фундаментальная система решений и фундаментальная матрица. Оператор и матрица Коши. Определитель Вронского и линейная зависимость векторных функций и решений. Формула Лиувилля — Остроградского.
   3.2. Линейное однородное уравнение, его сведение к линейной системе. Общее решение. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и линейная зависимость скалярных функций и решений, формула Лиувилля — Остроградского. Восстановление линейного уравнения по его фундаментальной системе решений.
   3.3. Линейные неоднородные система и уравнение. Общее решение, частное решение, метод вариации постоянных. Функция Грина задачи Коши.
   3.4. Линейная периодическая система. Матрица монодромии и мультипликаторы. Краевая задача о периодическом решении, критерий её невырожденности. Одномерный случай.
   3.5. Линейное неоднородное уравнение второго порядка. Краевая задача, её невырожденность, теорема об альтернативе. Функция Грина краевой задачи, теорема существования. Уравнение равновесия струны.

3.6. Линейное однородное уравнение второго порядка. Нули решений: конечность их числа на отрезке, их перемежаемость. Устранение первой производной в уравнении. Теорема Штурма. Оценки колеблемости. Теорема Кнезера. Колеблемость маятника.

4. **Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами**
   4.1. Экспонента матрицы, её свойства и вычисление методом жордановых форм. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами: связь её матрицы Коши с экспонентой матрицы системы. Действительные и комплексные решения, стандартная фундаментальная система решений. Метод неопределённых коэффициентов, вид общего решения.
   4.2. Логарифм матрицы, его свойства и вычисление методом жордановых форм. Ляпуновское преобразование. Линейная периодическая система. Теорема Флоке — Ляпунова.
   4.3. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристические многочлены уравнения и соответствующей системы. Общее решение и стандартная фундаментальная система решений. Уравнение Эйлера. Решение уравнения малых колебаний маятника.
   4.4. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части. Резонанс и его кратность. Вид частного решения. Ограниченность и неограниченность вынужденных колебаний маятника.

5. **Зависимость решений от параметров**
   5.1. Семейство задач Коши для нормальной системы. Теорема о непрерывной зависимости решения от правых частей, существенность условия компактности в ней. Компактно-открытая топология в пространстве решений и топологическое усиление теоремы. Непрерывная зависимость решения от параметра и от начального значения. Свойства решения всего семейства задач Коши.
   5.2. Дифференцируемость решения по параметру и по начальному значению. Система в вариациях. Разложение решения в ряд до линейного члена включительно, равномерное на временных компактах.
   5.3. Семейство задач Коши для уравнения произвольного порядка. Каноническое преобразование топологии. Непрерывность и дифференцируемость решения по параметру. Колебания маятника, близкие к резонансным. Уравнение в вариациях и разложение решения в ряд до линейного члена. Переход к уравнению малых колебаний маятника.

6. **Устойчивость по Ляпунову**
   6.1. Определение устойчивости и асимптотической устойчивости решения нормальной системы или уравнения произвольного порядка. Инвариантность факта устойчивости относительно начального момента, нормы и сдвига начала координат.
   6.2. Необходимые и достаточные условия устойчивости решений линейных однородных и неоднородных систем. Критерии устойчивости линейной системы с постоянными и периодическими коэффициентами. Устойчивость малых колебаний маятника.
   6.3. Функция Ляпунова и её производная в силу системы. Леммы Ляпунова об устойчивости и об асимптотической устойчивости. Признак не асимптотической устойчивости. Система первого приближения. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению. Исследование устойчивости положений равновесия маятника.

7. **Автономные системы**
   7.1. Фазовое пространство. Фазовые кривые, их инвариантность относительно временных сдвигов. Три типа фазовых кривых системы. Точка покоя. Цикл, его период.
   7.2. Выпрямляющий диффеоморфизм. Теорема о локальном выпрямлении векторного поля. Первый интеграл, его дифференциальный критерий. Автономная гамильтонова система. Независимые первые интегралы в точке и в области. Полная система первых интегралов. Локальные теоремы существования полной и универсальной полной системы независимых первых интегралов. Первые интегралы малых колебаний маятника.
   7.3. Одномерное фазовое пространство. Критерий устойчивости особой точки на прямой. Бифуркация особой точки.
   7.4. Двумерное фазовое пространство. Уравнение фазовых кривых на плоскости. Система Лотки — Вольтерры. Уравнение Ньютона, интеграл Энергии. Фазовый портрет уравнения колебаний маятника. Классификация Пуанкаре особых точек на плоскости. Седло, узел, центр, фокус. Особые точки уравнения колебаний маятника.
   7.5. Семейство отображений Коши. Динамическая система и фазовый поток. Генератор фазового потока. Генератор экспоненты.
   7.6. Колебания маятника и поворот окружности. Замкнутость орбит рационального поворота. Иррациональный поворот окружности: фазовое и временное среднее, теорема Вейля об их совпадении. Колебание пары маятников и обмотка тора. Каскад Пуанкаре. Замкнутость рациональной обмотки. Всюду плотность на торе его иррациональной обмотки.
   7.7. Цикл: его мультипликаторы, невозможность асимптотической устойчивости. Отображение Пуанкаре, корректность его построения. Предельные множества фазовой траектории и их свойства. Виды циклов на плоскости: изолированный, предельный, устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый. Мешок Бендиксона. Связь устойчивости цикла с функцией последования и с его мультипликатором.

8. **Уравнения в частных производных первого порядка**
   8.1. Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка, его характеристики и общее решение. Первые интегралы гамильтоновой системы. Задача Коши: локальная теорема существования и единственности, возможность глобальной неединственности, существенность условия трансверсальности.
   8.2. Квазилинейное однородное уравнение в частных производных первого порядка, его характеристики. Задача Коши: локальная теорема существования и единственности решения. Уравнение Хопфа.

Примечание: некоторые из вопросов программы на лекциях обсуждаются лишь вскользь или приводятся без доказательства, а порой даже и не рассматриваются вовсе.

О коллоквиумах

В течение учебного года проводятся четыре письменных коллоквиума — по одному в конце каждой четверти этого года.

Программа каждого из коллоквиумов совпадает с программой очередной пары пунктов, взятой от всех восьми пунктов общей лекционной программы, а именно: коллоквиумы 1, 2, 3 и 4 проводятся по её пунктам 1–2, 3–4, 5–6 и 7–8 соответственно.

Вопросы коллоквиума носят в основном теоретический характер. Они проверяют знание и, главное, понимание лекционного материала, прочитанного в течение подконтрольной четверти, охватывают основные понятия и определения, теоремы и леммы, а также методы их доказательства и сопутствующие им рассуждения. Вопросы коллоквиума, помимо кратких ответов типа «да» или «нет», предполагают ясную или подробную аргументацию, без которой вес правильных ответов сильно снижается.

При подготовке ответов на вопросы коллоквиума можно пользоваться литературой и своими записями, однако время на выдачу ответов сильно ограничено. Поэтому не стоит рассчитывать на успех за счёт работы исключительно на коллоквиуме, без предварительного и вдумчивого изучения соответствующего материала.

Список литературы по курсу

Прежде всего:

1. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ РХД, 2000;
2. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Издательский центр «Академия», 2013;
3. Сергеев И.Н. Лекции по дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2019,

а также, возможно:

4. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984;
5. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ РХД, 2004;
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Мышкиса А.Д., Олейник О.А. — М.: МГУ, 1984;
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974;
8. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2007.