ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2019, том 55, № 6, с. 1–18

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*

Ниже публикуются† аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2020 г. и частично в осеннем семестре 2019 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале "Дифференц. уравнения". 2019. Т. 55. № 11).

DOI:

В. В. Рогачев (Москва) "О теоремах типа Штурма для нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка" (13 декабря 2019 г.).

Для заданного натурального $n \geqslant 3$ при $1 \neq k > 0$ рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad 0 < m \leqslant p \leqslant M < \infty, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где непрерывная функция (*потенциал*) $p = p(x, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ липшицева по $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Уравнение (1) можно воспринимать как нелинейный аналог линейного уравнения

$$y^{(n)} + q(x)y = 0, \quad q \in C(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Теорема [1]. *При $n = 2$ между двумя последовательными нулями данного решения уравнения (2) любое линейно независимое с ним решение имеет ровно один нуль.*

Этот результат был обобщён на линейные уравнения более высокого порядка.

Теорема [2, 3]. *При $n = 3$ и $q > 0$ или $q < 0$ между двумя последовательными нулями данного решения уравнения (2) число нулей любого линейно независимого с ним решения не превосходит двух, при $n = 4$ и $q < 0$ – не превосходит трёх, при $n = 4$ и $q > 0$ – не превосходит четырёх, а при $n \geqslant 5$ и $q \geqslant 0$ – может быть любым конечным числом.*

Для уравнения (1) методами из работ [4–6] получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для любого целого $s \geq 2$ и любого отрезка $[a, b]$ существует решение уравнения (1), имеющее на этом отрезке ровно s нулей и равное нулю в его концах.*

Теорема 2. *При $k > 1$ для любого полуинтервала $[a, b)$ существует решение уравнения (1), множество нулей которого на этом полуинтервале счётно и содержит его левый конец.*

Теорема 3. *При $0 < k < 1$ и $p = \mathrm{const} > 0$ для любого отрезка $[a, b]$ существует решение уравнения (1), множество нулей которого на этом отрезке счётно и содержит его концы, а также существует другое ненулевое решение уравнения (1), множество нулей которого на этом отрезке имеет мощность континуума и содержит его концы.*

Теоремы 1–3 распространяют результаты В.А. Кондратьева на случай нелинейных уравнений с положительным ограниченным потенциалом: на отрезке, ограниченном последовательными нулями какого-либо решения уравнения (1) произвольного порядка $n \geqslant 3$, может лежать любое число нулей (не обязательно конечное) другого решения. Это отличает нелинейные уравнения (1) от линейных уравнений (2) порядка $n < 5$, где число нулей одного решения между последовательными нулями другого ограничено сверху.

Замечание. Для уравнения (1) нечётного порядка теоремы 1–3 имеют аналоги [7–9] и в случае отрицательного ограниченного потенциала. Для уравнения 4-го порядка с отрицательным постоянным потенциалом существует решение с любым конечным числом нулей на

*Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков. В настоящее время руководители семинара – Н.Х. Розов, И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

†Хроника составлена И.Н. Сергеевым.

заданном отрезке, что следует из результатов работы [10], однако в целом для уравнений чётного порядка соответствующий вопрос остается открытым.

Литература. 1. Sturm J.h.F. Memoire sur la resolution des equations numeriques. // In: Pont JC. (eds) Collected Works of Charles Francois Sturm. Birkhauser Basel. 2009. 2. Кондратьев В.А. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка // Труды ММО. 1959. Т. 8. С. 259–281. 3. Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)}+p(x)y=0$ // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 419–436. 4. Astashova I.V., Rogachev V.V. On the number of zeros of oscillating solutions of the third- and fourth-order equations with power nonlinearities // J. of Math. Sci. 2015. V. 205. № 6. P. 733–748. 5. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / Под ред. И.В. Асташовой. М., 2012. С. 22–288. 6. Astashova I.V. On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden–Fowler type differential equation // Boundary Value Problems. 2014. V. 174. P. 1–8. 7. Rogachev V.V. On existence of solutions to higher-order singular nonlinear Emden–Fowler type equation with given number of zeros on prescribed interval // Functional Differential Equations. 2016. V. 23. № 3–4. P. 141-151. 8. Rogachev V.V. On the Existence of Solutions to Higher-Order Regular Nonlinear Emden–Fowler Type Equations with Given Number of Zeros on the Prescribed Interval // Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys. 2018. V. 78. P. 123–129. 9. Рогачев В.В. Существование решений с заданным числом нулей у регулярно нелинейного уравнения типа Эмдена–Фаулера произвольного порядка // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1638–1644. 10. Astashova I. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differ. and Difference Equat. with Appl. 2016. V. 164. P. 191–204.

А. Н. Ветохин (Москва) “О свойствах топологической энтропии линейных систем” (28 февраля 2020 г.).

По линейной дифференциальной системе

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,\infty), \tag{1}$$

с непрерывной оператор-функцией A зададим на пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|$ набор метрик

$$d_t^A(x_0,y_0)=\max_{\tau\in[0,t]}|x(\tau,x_0)-x(\tau,y_0)|,\quad x_0,y_0\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $x(\cdot,a)$ – решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0,x_0)=a.$ Через $S_{|\cdot|}(A,\mathcal{K},\varepsilon,t)$ обозначим *ε-энтропию* компактного метрического пространства $\mathcal{K}\subset\mathbb{R}^n$ с метрикой d_t^A [1] (т.е. минимальное количество покрывающих его отрытых шаров радиуса $\varepsilon>0$), а *топологическую энтропию* [2] системы (1) определим формулой

$$h_{\rm top}(A)=\sup_{\mathcal{K}\subset\mathbb{R}^n}\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln S_{|\cdot|}(A,\mathcal{K},\varepsilon,t)$$

(её правая часть не зависит от выбора нормы $|\cdot|,$ поэтому определение корректно).

В статье [3] утверждается, что для показателей Ляпунова $\lambda_1(A)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n(A)$ любой системы (1) с ограниченной оператор-функцией A имеет место равенство

$$h_{\rm top}(A)=\sum_{i\colon\,\lambda_i(A)>0}\lambda_i(A)\quad(\equiv0,\ \text{если}\ \lambda_n(A)\leqslant0). \tag{3}$$

На самом деле, оно может и не выполняться, как показывает

Теорема 1. *Для системы (1) с оператор-функцией*

$$A(t)=\operatorname{diag}(a(t),b(t)),\quad (a(t),b(t))=\begin{cases}(0,1), & t\in[0,\,1];\\ (1,0), & t\in[(n-1)!+1,\,n!];\quad n=3,5,\ldots,\\ (0,1), & t\in[n!+1,\,(n+1)!],\end{cases}$$

доопределённой для остальных $t\in\mathbb{R}_+$ *с сохранением непрерывности, соотношение (3) обращается в неравенство* $1<2$.

Оказывается, для произвольной системы (1) справедлива

Теорема 2. *Для любой системы (1) выполнено двойное неравенство*

$$\max\{0,\lambda_n(A)\}\leqslant h_{\mathrm{top}}(A)\leqslant\sum_{i\colon\,\lambda_i(A)>0}\lambda_i(A).$$

Выделим множество $\mathcal{R}_+$ систем вида (1), каждая из которых имеет *нормальный* базис решений $x_1,\ldots,x_n$ [4], для которого $\lambda_i(A)=\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\ln|x_i(t)|$ всякий раз, когда $\lambda_i(A)>0$.

Теорема 3. *Для любой системы* $A\in\mathcal{R}_+$ *выполнено равенство (3).*

Равенство (3) оказывается верным, в частности, для правильных ограниченных систем (1).

Для дифференциальной системы

$$\dot{x}=f(t,x),\quad f(t,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad f,\,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n),\tag{4}$$

и шара $B_\delta=\{y\in\mathbb{R}^n:|y|\leqslant\delta\}$ через $S_{|\cdot|}(f,B_\delta,\varepsilon,t)$ обозначим *ε-энтропию* компактного метрического пространства B_δ с метрикой d_t^f, задаваемой по решениям системы (4) формулой, аналогичной формуле (2), а *локальной энтропией* системы (3) назовём [5, с. 274] величину

$$h_{\mathrm{top}}^{\mathrm{loc}}(f)=\lim_{\delta\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln S_{|\cdot|}(f,B_\delta,\varepsilon,t).$$

Из теоремы 29.1.1 [6, с. 395] с помощью *показателя неправильности* Гробмана $\gamma(A)$ ограниченной системы (1) [6, с. 44] выводится

Теорема 4. *Если для системы (4) существуют такие непрерывная ограниченная оператор-функция* A *и константы* $C,\delta,\sigma>0$, *что для любых* $x\in B_\delta$ *и* $t\in\mathbb{R}_+$ *выполняется неравенство* $|A(t)x-f(t,x)|\leqslant Ce^{-(\gamma(A)+\sigma)t}|x|$, *то верно равенство* $h_{\mathrm{top}}^{\mathrm{loc}}(f)=h_{\mathrm{top}}(A)$.

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному отображению

$$A:\mathcal{M}\times X\to X\tag{5}$$

образуем функцию

$$\mu\mapsto h_{\mathrm{top}}(A(\mu,\cdot)).\tag{6}$$

Из результатов работ [7, 8] выводится

Теорема 5. *Для любого отображения (5) функция (6) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве* $\mathcal{M}$, *а если* $\mathcal{M}=[0,1]$, *то функция (6) для некоторого отображения (5) не принадлежит первому бэровскому классу.*

Литература. 1. Колмогоров А.Н. Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // ДАН. 1956. 179. № 3. С. 585–589. 2. Bowen R. Topological entropy for noncompact sets // Transactions, American Mathematical Society. 1973. V. 184. P. 125–136. 3. Tien L.H., Nhien L.D. On the topological entropy of nonautonomous differential equations // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2019. V. 7. P. 418–429. 4. Миллионщиков В.М. Нормальные базисы семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 5. С. 691–708 5. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005. 6. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 7. Ветохин А.Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С. 341–348. 8. Ветохин А.Н. К задаче о минорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 7. С. 950–952.

В. В. Быков (Москва) “Спектры показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами” (13 марта 2020 г.).

Для заданных метрического пространства M и числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство линейных систем

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M. \tag{1}$$

Показатели Ляпунова системы (1) обозначим через $\lambda_1(\mu,A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu,A)$, а её *спектр показателей Ляпунова* – через $\Lambda(\mu,A) \equiv (\lambda_1(\mu,A),\ldots,\lambda_n(\mu,A))$. Поскольку мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными на полуоси, их показатели Ляпунова являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty,\infty\}$.

Напомним, что функция $g : M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(*,G_\delta)$ [1, с. 224], если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $g^{-1}([r,\infty)) \subset M$ луча $[r,\infty)$ является G_δ-множеством.

В.М. Миллионщиков установил [2], что для любых $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ и непрерывного отображения $A : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ функция, ставящая в соответствие точке $\mu \in M$ значение i-го показателя Ляпунова $\lambda_i(\mu,A)$ системы (1), принадлежит классу $(*,G_\delta)$, а в работе [3] (см. также [4]) для каждых n и M получено полное описание спектров показателей Ляпунова семейств (1) с непрерывной матричнозначной функцией A.

Через $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ обозначим класс семейств (1) с функцией A, непрерывной в следующем смысле

$$A \in C(\mathbb{R}_+ \times M), \quad \lim_{\nu\to\mu} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|A(t,\nu) - A(t,\mu)\| = 0, \quad \mu \in M, \tag{2}$$

а через $\mathcal{U}^n(M)$ – его подкласс семейств (1), состоящих из систем, ограниченных на $\mathbb{R}_+$.

В работе [5] для любых метрического пространства M и числа $n \in \mathbb{N}$ описан класс вектор-функций $\{\Lambda(\cdot,A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$. Цель настоящего доклада – для каждых M и n дать полное описание класса $\{\Lambda(\cdot,A) : A \in \widetilde{\mathcal{U}}^n(M)\}$ спектров показателей Ляпунова семейств систем (1), коэффициенты которых непрерывны в том же смысле (2), но не обязательно ограничены.

Теорема 1. *Для каждых метрического пространства M и числа $n > 1$ вектор-функция $f \colon M \to \overline{\mathbb{R}}^n$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{U}}^n(M)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

1) для любого $\mu \in M$ справедливы неравенства $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$;

2) все компоненты $f_1,\ldots,f_n$ вектор-функции f принадлежат классу $(*,G_\delta)$.

Теорема 2. *Для каждого метрического пространства M функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{U}}^1(M)$ тогда и только тогда, когда она непрерывна, а множество $f^{-1}(\mathbb{R})$ замкнуто в M.*

Отметим, что необходимость условия 1) теоремы 1 вытекает непосредственно из определений, а необходимость условия 2) – из результата [2]. Достаточность же указанных условий выводится из следующего утверждения.

Теорема 3. *Для каждого $n \geqslant 2$ существует такая бесконечно гладкая матричнозначная функция $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, что для любых метрического пространства M и вектор-функции $f : M \to \overline{\mathbb{R}}^n$, удовлетворяющей условиям 1) и 2) теоремы 1, найдётся матричнозначная функция $Q : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющая равенствам*

$$\Lambda(\cdot, A+Q) = f, \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \sup_{\mu\in M} \ln \|Q(t,\mu)\| = -\infty.$$

Литература. 1. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.–Л., 1937. 2. Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сборник. 1988. Т. 137. № 3. С. 364–380. 3. Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов обобщённых расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2016. Т. 24. № 2. С. 55–71. 4. Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1332–1138. 5. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.

А. Н. Ветохин (Москва) “Дескриптивный тип множества точек полунепрерывности сверху ε-ёмкости неавтономных динамических систем” (13 марта 2020 г.).

На компактном метрическом пространстве X по последовательности $f \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ непрерывных отображений из X в X, наряду с исходной метрикой d, определим дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)), \quad f^{\circ i} \equiv f_i \circ \cdots \circ f_1 \circ \mathrm{id}_X, \quad x,y \in X, \quad i,n \in \mathbb{N}.$$

Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ через $N_d(f,\varepsilon,n)$ обозначим *ε-ёмкость* пространства (X, d_n^f) [1], т.е. максимальное количество точек в X, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше ε, а *топологическую энтропию* [2] системы (X,f) определим формулой

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \ln N_d(f,\varepsilon,n)$$

(в которой правая часть не зависит от метрики d, задающей в X фиксированную топологию).

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и последовательности непрерывных отображений

$$f \equiv (f_1, f_2, \ldots), \quad f_i : \mathcal{M} \times X \to X, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)). \tag{2}$$

Для любых $\mathcal{M}, X$ и последовательности (1) функция (2) принадлежит третьему бэровскому классу [3], а если $X = [0,1]$ и $\mathcal{M}$ – множество иррациональных чисел на прямой, то функция (2) для некоторой последовательности (1) не принадлежит второму бэровскому классу [4].

При $\varepsilon > 0$ для данной неавтономной динамической системы определим её *ε-ёмкость*

$$h_d(f,\varepsilon) \equiv \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \ln N_d(f,\varepsilon,n)$$

(уже зависящую от выбора метрики на пространстве X) и рассмотрим функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon). \tag{3}$$

В докладе [5] установлено, что для любой последовательности отображений (1) функция (3) принадлежит второму бэровскому классу, причём множество точек её полунепрерывности сверху имеет тип G_δ (в случае полноты пространства $\mathcal{M}$ – ещё и всюду плотно в нём), а множество точек её полунепрерывности снизу имеет тип $F_{\sigma\delta}$.

Ниже получено полное описание множества точек полунепрерывности сверху функции (3) для любого полного метрического сепарабельного *нульмерного* (т.е. такого, что любая его точка имеет сколь угодно малую окрестность с пустой границей [6, с. 286]) пространства $\mathcal{M}$. Примером такого пространства является *совершенное множество Кантора* $\mathcal{K}$ на отрезке $[0,1]$, т.е. множество бесконечных троичных дробей $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$, где $a_i \in \{0,2\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим метрическое пространство Ω_2 двусторонних последовательностей

$$x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots), \quad x_i \in \{0,1\}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 2^{-\min\{|i| :\, x_i \neq y_i\}}, & x \neq y. \end{cases}$$

Теорема. *Если $X = \Omega_2$ и $\mathcal{M}$ – полное метрическое сепарабельное нульмерное пространство, а $G \subset \mathcal{M}$ – всюду плотное подмножество типа G_δ, то для некоторой последовательности (1) и любых $\mu \in \mathcal{M}$, $\varepsilon \in (0;1/4]$ и $k \in \mathbb{N}$ отображение $x \mapsto f_k(\mu,x)$ – гомеоморфизм, а множество точек полунепрерывности сверху функции (3) совпадает с G.*

Известно [7], что в условиях этой теоремы также для некоторой стационарной последовательности (1) множество точек полунепрерывности снизу функции (2) совпадает с G.

Литература. 1. Колмогоров А.Н. Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // ДАН. 1956. Т. 179. № 3. С. 585–589. 2. Kolyada S., Snoha L'. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random&Computational dynamics. 1996. V. 4. № 2–3. P. 205–233. 3. Ветохин А.Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С. 341–348. 4. Ветохин А.Н. О непринадлежности второму бэровскому классу топологической энтропии одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 133–136. 5. Ветохин А.Н. Бэровская классификация топологической ε-энтропии неавтономных динамических систем на отрезке // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 890–891. 6. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 7. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1319–1327.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) "О задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения при наличии конвекции и обедняющего потенциала" (20 марта 2020 г.).

Для следующей системы, моделирующей температуру в промышленных теплицах,

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + d(x,t)u, \quad (x,t) \in Q_T = (0,1) \times (0,T), \quad T > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad t \in (0,T), \qquad u(x,0) = \xi(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

где функции a, b, d достаточно гладки, $0 < a_0 \leqslant a \leqslant a_1$, а $\psi \in W_2^1(0,T)$ и $\xi \in L_2(0,1)$ фиксированы, ставится задача *управления с точечным наблюдением* [1–6] (см. также [7, 8]), а именно: управляя температурой $\varphi \in W_2^1(0,T)$, сделать температуру $u(c,t)$ в заданной точке $c \in (0,1)$ близкой к заданной функции $z(t)$ при всех $t \in (0,T)$. Пусть [9, с. 15] $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для каждой из которых $t \mapsto u(\cdot,t)$ – непрерывное отображение $[0,T] \to L_2(0,1)$, а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(\cdot,T) = 0$, $\eta(0,\cdot) = 0$.

Определение 1. *Слабым* решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,t) = \varphi(t)$ и при всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – тождеству

$$\int_{Q_T} (a(x,t)u_x\eta_x - b(x,t)u_x\eta - d(x,t)u\eta - u\eta_t)\,dx\,dt = \int_0^1 \xi\eta(x,0)\,dx + \int_0^T a(1,t)\psi\,\eta(1,t)\,dt.$$

Теорема 1. *Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём для некоторой константы C_1 (не зависящей от φ, ψ, ξ) выполнено неравенство*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_1 \left(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)} \right).$$

Пусть $Z \subset L_2(0,T)$ и $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ – множества целевых z и управляющих φ функций соответственно, причём последнее – непусто, замкнуто, выпукло и ограничено. Для решения $u_\varphi \in V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (1), (2) с функцией φ обозначим

$$m[z,\Phi] \equiv \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\varphi], \quad \text{где} \quad J[z,\varphi] \equiv \int_0^T (u_\varphi(c,t) - z(t))^2\,dt, \quad z \in Z, \quad \varphi \in \Phi. \tag{3}$$

Определение 2. Будем говорить, что задача (1)–(3) является *плотно управляемой* из Φ в Z, если для всех $z \in Z$ выполнено равенство $m[z,\Phi] = 0$. Через $\varphi_0 \in \Phi$ обозначим *минимизирующую* функцию, т.е. функцию, удовлетворяющую равенству $m[z,\Phi] = J[z,\varphi_0]$.

Теорема 2. *Для любой функции* $z \in L_2(0,T)$ *существует единственная функция* $\varphi_0 \in \Phi$.

Теорема 3. *Если функции* a, b, d *в (1) не зависят от* t *и* $m[z,\Phi] > 0$, *то* $\varphi_0 \in \partial\Phi$.

Теорема 4. *Если функции* a, b, d *в (1) не зависят от* t, *а множества* $\Phi_1, \Phi_2 \subset W_2^1(0,T)$ *ограничены, выпуклы и замкнуты, причём* $\Phi_2 \subset \mathrm{Int}\Phi_1$ *и* $m[z,\Phi_1] > 0$, *то* $m[z,\Phi_1] < m[z,\Phi_2]$.

Теорема 5. *Если функции* a, b, d *в (1) не зависят от* t, *то задача (1)–(3) плотно управляема из* $W_2^1(0,T)$ *в* $L_2(0,T)$.

Теорема 6. *Минимизирующая функция* $\varphi_0 \in \Phi$ *удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^T (u_{\varphi_0}(c,t) - z(t))\,(u_\varphi(c,t) - u_{\varphi_0}(c,t))\,dt \geqslant 0, \quad \varphi \in \Phi.$$

Определение 3. Обозначив через u_φ решение задачи (1), (2), назовём *сопряжённой* к задаче (1)–(3) задачу

$$p_t + (a(x,t)p_x)_x - (b(x,t)p)_x + d(x,t)p = (u_\varphi(c,t) - z(t)) \cdot \delta(x-c), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{4}$$

$$p(0,t) = 0, \quad a(1,t)p_x(1,t) - b(1,t)p(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \qquad p(x,T) = 0, \quad x \in (0,1). \tag{5}$$

Определение 4. *Слабым* решением задачи (4), (5) будем называть функцию $p \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $p(0,\cdot) = 0$ и при всех $\eta \in W_2^1(Q_T)$, для которых $\eta(\cdot,0) = 0$ и $\eta(0,\cdot) = 0$, – тождеству

$$\int_{Q_T} ((a(x,t)p_x - b(x,t)p)\eta_x - d(x,t)p\eta + p\eta_t)\,dx\,dt = -\int_0^T (u_{\varphi_0}(c,t) - z(t))\,\eta(c,t)\,dt.$$

Теорема 7. *Задача (4), (5) имеет единственное слабое решение* $p \in V_2^{1,0}(Q_T)$, *причём для некоторой константы* C_2 *(не зависящей от* φ, ψ, ξ, z*) выполнено неравенство*

$$\|p\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_2 \left(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)} + \|z\|_{L_2(0,T)} \right).$$

Теорема 8. *Минимизирующая функция* $\varphi_0 \in \Phi$ *удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^T a(0,t)p_x(0,t)\,(\varphi(t) - \varphi_0(t))\,dt \leqslant 0, \quad \varphi \in \Phi,$$

где p *– решение задачи (4), (5) при* $\varphi = \varphi_0$.

Литература. 1. Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A. On maintaining optimal temperatures in greenhouses // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. 2016. V. 15. №. 23. P. 198–204. 2. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On optimal temperature control in hothouses // Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016. AIP Conf. Proc. 2017. P. 4–8. 3. Асташова И.В., Филиновский А.В. Об управляемости в параболической задаче с распределенным по времени функционалом // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 53. № 6. С. 851–853. 4. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 5. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 6. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск-го матем. общества. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274. 7. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, AMS, 2010. 8. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems, Springer, Berlin, 2013.

И. Н. Сергеев (Москва) “Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем” (28 марта 2020 г.).

Для заданной области $G \subset \mathbb{R}^n$, служащей окрестностью нуля, рассмотрим *автономную* систему

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) \equiv 0, \quad x \in G, \tag{1}$$

допускающую *нулевое* решение и удовлетворяющую условию $f \in C^1(G)$. Обозначим через $S_*(f)$, $S_\delta(f)$ и $S^\delta(f)$ множества всех решений системы (1), удовлетворяющих соответственно условиям $|x(0)| > 0$, $0 < |x(0)| \leqslant \delta$ и $|x(0)| \geq \delta$.

Определение [1, 2]. Скажем, что система (1):

1) *устойчива* (*асимптотически*) *по Перрону*, если для любого $\varepsilon > 0$ (соответственно, для $\varepsilon = 0$) существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет неравенству

$$\varliminf_{t\to\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon; \tag{2}$$

2) *неустойчива по Перрону*, если она не является устойчивой по Перрону, т.е. для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет неравенству (2) (в частности, определено не при всех $t \geq 0$);

3) *вполне неустойчива по Перрону*, если для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$ ни одно решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет неравенству (2);

4) *частично устойчива по Перрону*, если она не является вполне неустойчивой по Перрону, т.е. для любых $\varepsilon, \delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет неравенству (2);

5) *тотально неустойчива по Перрону*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ни одно ненулевое решение x не удовлетворяет неравенству (2);

6) *глобально устойчива по Перрону*, если все ненулевые решения x удовлетворяют неравенству (2) при $\varepsilon = 0$.

Все описанные в приведенном определении перроновские свойства имеют ляпуновские аналоги. К примеру, *полная неустойчивость по Ляпунову* означает существование таких $\varepsilon, \delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет (в частности, определено не при всех $t \geq 0$) неравенству

$$\sup_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon, \tag{3}$$

откуда автоматически вытекает и *тотальная неустойчивость по Ляпунову*, означающая выполнение оценки (3) уже для всех решений $x \in S_*(f)$, но возможно с меньшим положительным числом в его правой части (здесь заведомо годится наименьшее из чисел ε и δ), а *частичная устойчивость по Ляпунову* – это отсутствие полной неустойчивости по Ляпунову.

Теорема 1. *Для любой одномерной автономной системы (1) каждое из перроновских свойств устойчивости эквивалентно аналогичному ляпуновскому.*

Утверждение теоремы 1 не распространяется не только на неавтономные системы (и даже на линейные, которые могут быть одновременно и неустойчивыми по Ляпунову, и устойчивыми по Перрону, причём глобально [3]), но и на двумерные автономные, что и подтверждает

Теорема 2 ([4, п. 6.3] и [5, § 18]). *Существует двумерная автономная система (1), неустойчивая по Ляпунову, но глобально устойчивая по Перрону, причём сужение её фазовой области $G = \mathbb{R}^2$ на любую достаточно малую окрестности нуля или даже выкалывание в ней некоторой одной ненулевой точки приводит к неустойчивости системы и по Перрону.*

В отношении полной и тотальной неустойчивости дело обстоит проще, как показывает

Теорема 3. *Если для автономной системы (1) выполнено хотя бы одно из следующих трёх свойств:*

1) *полная неустойчивость по Перрону;*

2) *тотальная неустойчивость по Перрону;*

3) *полная (она же тотальная) неустойчивость по Ляпунову,*

то выполнены и остальные два.

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Автономная система (1) частично устойчива по Перрону тогда и только тогда, когда она частично устойчива по Ляпунову.*

Полная неустойчивость по Перрону автономной системы не может возникнуть исключительно в результате сужения её фазовой области, о чём и говорит

Теорема 5. *Если автономная система (1) частично устойчива по Перрону, то её сужение на любую фазовую подобласть также частично устойчиво по Перрону.*

Доказательство теорем 3–5 обеспечивает следующая

Лемма. *Если для некоторого $\delta_0 > 0$ фазовая область G автономной системы (1) содержит δ_0-окрестность нуля и любое решение $x \in S_{\delta_0}(f)$ удовлетворяет условию (3) при $\varepsilon = \delta_0$, то для некоторых $T_0 > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ справедливы следующие утверждения:*

а) *любое решение $x \in S_{\delta_0}(f) \cap S^{\delta_0}(f)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{t\in[0,T_0]} |x(t)| > \delta_0;$$

б) *любое решение $x \in S^{\delta_0}(f)$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon_0;$$

в) *ни одно решение $x \in S_*(f)$ не удовлетворяет неравенству (2) при $\varepsilon = \varepsilon_0$.*

Эквивалентность утверждений 1) и 2) теоремы 3 для автономных систем установлена ранее [1, 2], причём утверждения теорем 3–5 не распространяются [2, 6, 7] на неавтономные системы.

Из теоремы 3 следует, что утверждение теоремы 2 нельзя усилить, заменив неустойчивость по Ляпунову на полную. И все же это утверждение допускает некоторое усовершенствование в указанном направлении (развивающее примеры неавтономных систем из [2, 6]), а именно: может случиться так, что автономная система *почти* (с точностью до множества меры нуль и первой категории Бэра) тотально неустойчива по Ляпунову, но в то же время, хотя и также почти, глобально устойчива по Перрону – эту возможность демонстрирует

Теорема 6. *Существует такая неустойчивая по Ляпунову, но устойчивая по Перрону двумерная автономная система (1), что все неподвижные точки её фазовой области $G = \mathbb{R}^2$ заполняют некоторое множество C, составленное из луча с началом в нуле и ещё одной ненулевой точки, причём для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(f) \setminus C$ выполнены соотношения*

$$0 = \varliminf_{t\to\infty} |x(t)| < \varlimsup_{t\to\infty} |x(t)| = \infty.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Об исследовании на устойчивость по Перрону одномерных и автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1561–1562. 3. Сергеев И.Н. Исследование на устойчивость по Перрону линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1571–1572. 4. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 5. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 6. Бондарев А.А. Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899–899. 7. Сергеев И.Н. О зависимости и независимости перроновских и ляпуновских свойств устойчивости от фазовой области системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1572–1573.

К. М. Чудинов (Пермь) “Об осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием первого порядка устойчивого типа” (3 апреля 2020 г.).

Исследование условий осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием восходит к работам А.Д. Мышкиса середины XX в. Говорят, что числовая функция f, определённая на луче $\mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$, *осциллирует*, если она имеет неограниченную последовательность нулей. Впервые асимптотические свойства решений уравнения

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где
$$a(t) \geqslant 0, \quad h(t) \leqslant t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{t\to\infty} h(t) = \infty, \tag{2}$$
были изучены в статье [1], а её результаты уточняла следующая хорошо известная

Теорема 1 [2]. *Если* $\varliminf\limits_{t\to\infty} \int_{h(t)}^t a(s)\,ds > 1/e$, *то все решения уравнения (1) осциллируют.*

Обобщение теоремы 1 на уравнение с несколькими запаздываниями
$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t)x(h_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$
и условиями (2) для каждой из функций $a = a_k$ и $h = h_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ оказалось нетривиальной задачей. Имеющиеся результаты либо не учитывают в равной мере влияние на осцилляцию решений всех входящих в уравнение слагаемых [3], либо накладывают на его коэффициенты слишком жёсткие условия [4]. В недавней работе [5] приведен пример уравнения вида (3), имеющего неосциллирующее решение при выполнении первого из следующих условий
$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_{h_k(t)}^t a_k(s)\,ds > 1/e, \quad \varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_t^{h_k^{-1}(t)} a_k(s)\,ds > 1/e. \tag{4}$$
С другой стороны, если все функции h_k непрерывны, монотонно возрастают и удовлетворяют второму из условий (4), то осциллируемость всех решений уравнения (3) обеспечивает

Теорема 2 [6]. *Если*
$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_{E_k(t)} a_k(s)\,ds > 1/e, \quad E_k(t) \equiv \{\tau \geqslant t \mid h_k(\tau) < t\}, \quad k = \overline{1,n}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
то все решения уравнения (2) осциллируют.

Отметим, что даже в случае $n = 1$ область применимости теоремы 2 шире, чем область применимости теоремы 1. Другие признаки осцилляции задают

Теорема 3 [7]. *Если* $\varlimsup\limits_{t\to\infty} \int_{\sup\limits_{\tau\in[0,t]} h(\tau)}^t a(s)\,ds > 1$ *, то все решения уравнения (1) осциллируют.*

Теорема 4 [8]. *Если*
$$\varlimsup_{t\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_{H_k(t)} a_k(s)\,ds > 1, \quad H_k(t) \equiv \{\tau \geqslant t \mid h_k(\tau) \leqslant t\}, \quad k = \overline{1,n}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
то все решения уравнения (3) осциллируют.

Заметим, что константа 1 в правой части неравенств из теорем 3 и 4 неуменьшаема, однако выражение в их левой части допускает уточнение. Описанный подход может быть перенесён также на разностные уравнения и на уравнения с распределённым запаздыванием.

Литература. 1. Мышкис А.Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Матем. сб. 1951. № 3. С. 641–658. 2. Коплатадзе Р.Г., Чантурия Т.А. О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1463–1465. 3. Fukagai N., Kusano T. Oscillation theory of first order functional differential equations with deviating arguments // Ann. Mat. Pura Appl. 1984. V. 136. № 4. P. 95–117. 4. Grammatikopoulos M.K., Koplatadze R., Stavroulakis I.P. On the oscillation of solutions of first order differential equations with retarded arguments // Georgian Math. J. 2003. V. 10. № 1. P. 63–76. 5. Чудинов К.М. О точных достаточных условиях осцилляции решений дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с последействием // Изв. вузов. Матем. 2018. № 5. С. 93–98. 6. Чудинов К.М. Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе–Чантурия

// Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61. № 1. С. 224–233. 7. Трамов М.И. Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Матем. 1975. № 3. С. 92–96. 8. Chudinov K. Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016. № 2.

А. В. Тюленев (Москва) "Пример невычислимости показателей системы обыкновенных дифференциальных уравнений" (10 апреля 2019 г.).

Рассматривается вопрос о вычислимости решений задачи Коши

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = x_0, \quad (t,x) \in D(f), \tag{1}$$

а в частном случае двумерной линейной диагональной системы

$$\dot{x}_1 = u(t)x_1, \quad \dot{x}_2 = v(t)x_2, \quad t \in J = [1,\infty), \tag{2}$$

изучается вычислимость различных её показателей.

Определение 1. Назовём *вычислимыми* следующие объекты:

1) функцию $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, которая, возможно, не является *тотальной* (т.е. определенной при всех $n\in\mathbb{N}$), если существует алгоритм, который *вычисляет* её значения, т.е. останавливается на тех и только тех $n\in\mathbb{N}$, для которых функция f определена, и выдает её значение $f(n)$;

2) последовательность (r_k) (где $k\in\mathbb{N}$) рациональных чисел, если существуют вычислимые тотальные функции $a,b,s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, удовлетворяющие условиям

$$r_k = (-1)^{s(k)}a(k)/b(k), \quad b(k)\neq 0, \quad k\in\mathbb{N};$$

3) число $x\in\mathbb{R}$, если существуют вычислимые последовательность (r_k) рациональных чисел и тотальная функция $\beta:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (*регулятор сходимости*), удовлетворяющие условиям

$$|r_k - x| \leqslant 2^{-n}, \quad k\geqslant\beta(n), \quad n\in\mathbb{N};$$

4) последовательность (x_k) действительных чисел, если существует вычислимая последовательность (r_{kn}) рациональных чисел, удовлетворяющие условиям

$$|r_{kn} - x_k| \leqslant 2^{-n}, \quad k,n\in\mathbb{N}.$$

Определение 2. Для заданного *вычислимого* (т.е. имеющего вычислимые границы) отрезка I назовём функцию $f:I\to\mathbb{R}$ *вычислимой*, если выполнены следующие два условия:

а) для любой вычислимой последовательности чисел $x_n\in I$ (где $n\in\mathbb{N}$) последовательность $(f(x_n))$ вычислима;

б) функция f *эффективно равномерно непрерывна*, т.е. существует вычислимая функция $\beta:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, удовлетворяющая условию

$$\left(|x-y|\leqslant\frac{1}{\beta(n)} \implies |f(x)-f(y)|\leqslant 2^{-n}\right) \quad x,y\in I, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Понятия вычислимых числа, последовательности и функции естественным образом распространяются на многомерный случай (см., например, [1, ch. 0.3]). Вопрос о вычислимости решений задачи Коши (1) с вычислимыми правыми частями решает

Утверждение. *Если для заданных вычислимого параллелепипеда $D(f)=I^{1+q}$ $(q\in\mathbb{N})$, вычислимой функции $f:D(f)\to\mathbb{R}^q$ и вычислимого начального значения $x_0\in\mathbb{R}^q$ задача Коши (1) имеет единственное решение, то оно – вычислимая функция.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [2, ch. 1], причём в отсутствие предположения о единственности решения задачи Коши оно оказывается неверным: см. пример [3] задачи (1) с вычислимой правой частью и не вычислимыми ни в одной точке решениями.

Пусть $\lambda_1\geqslant\lambda_2$ – показатели Ляпунова системы (2) (возможно, совпадающие [4, гл. I]), а Ω – верхний центральный показатель (т.е. верхняя граница подвижности старшего показателя Ляпунова при равномерно малых возмущениях коэффициентов системы [4, гл. III, V]). Тогда даже при условии, что решение задачи Коши системы (2) – вычислимая функция, некоторые из перечисленных её показателей могут оказаться невычислимыми, что и подтверждает

Теорема. *Существует система (2) с вычислимыми ограниченными на* J *коэффициентами* u, v, *для которой показатель* λ_1 *вычислим, а показатели* λ_2 *и* Ω *невычислимы.*

Литература. 1. Pour-El M.B., Richards J.I. Computability in Analysis and Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989. 2. Henrici P. Discrete variable methods in ordinary differential equations. Wiley, New York, 1962. 3. Pour-El M.B., Richards J.I. A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution. // Annals of mathematical logic. 1979. V. 17. P. 61–90. 4. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

И. Н. Сергеев (Москва) “О приводимости периодических линейных дифференциальных систем к периодическим и автономным уравнениям” (10 апреля 2020 г.).

Для евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ с заданным ортонормированным базисом рассмотрим множество $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ *линейных однородных дифференциальных систем*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty),$$

задаваемых *непрерывными* оператор-функциями $A : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (с которыми в дальнейшем и отождествляем сами системы), и выделим в нём три подмножества $\mathcal{M}^n, \mathcal{P}^n$ и $\mathcal{C}^n$, состоящие соответственно из *ограниченных*, *периодических* и *автономных* систем.

Определение 1. Скажем, что система $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ $(A \in \mathcal{M}^n)$ *отвечает уравнению* (соответственно *ограниченному* уравнению), с которым и будем её отождествлять, если она имеет в заданном базисе следующий вид

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} x, \quad x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

а подмножество всех таких систем обозначим через $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ (соответственно $\mathcal{E}^n$).

Определение 2. Систему $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ назовем *приводимой к уравнению* $B \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ непрерывно-дифференцируемым невырожденным преобразованием $L : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$, если верно равенство $B = LAL^{-1} + \dot{L}L^{-1}$, а саму приводимость назовём:

1) *ляпуновской*, если $\|L\| + \|L^{-1}\| + \|\dot{L}\| < \infty$;
2) *слабо-ляпуновской*, если $\|L\| + \|L^{-1}\| < \infty$;
3) *обобщённо-ляпуновской*, если $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\left(\ln|L(t)| + \ln|L^{-1}(t)|\right) = 0$;
4) *асимптотической*, если существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} L(t) \equiv L_0 \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$;
5) *периодической* (T-*периодической*), если функция L периодична (с периодом $T > 0$).

Приводимость систем к уравнениям играет важную роль в теории управления [1], а также в теории устойчивости по Ляпунову применительно к классу уравнений [2]. Настоящий доклад продолжает доклады [3, 4], первые теоремы которых несколько уточняет следующая

Теорема 1. *Всякая* T*-периодическая система* $A \in \mathcal{P}^n$ *приводима* T*-периодически к некоторому* T*-периодическому уравнению* $B \in \mathcal{E}^n \cap \mathcal{P}^n$.

Классическая теория *Флоке–Ляпунова* [5, гл. III] позволяет всякую T-периодическую систему $A \in \mathcal{P}^n$ привести $2T$-периодически (а порой и T-периодически) к некоторой автономной системе $B \in \mathcal{C}^n$. Затем полученную автономную систему можно привести также периодически (причём с тем же периодом) к автономному уравнению, правда, гарантированно – лишь в двумерном случае (т.е. при $n = 2$), что и обещает

Теорема 2. *Всякая двумерная* T*-периодическая система* $A \in \mathcal{P}^2$ *приводима* $2T$*-периодически к некоторому автономному уравнению* $B \in \mathcal{E}^2 \cap \mathcal{C}^2$.

Утверждение теоремы 2 не распространяется на системы более чем 2-го порядка, даже если в ней периодическую приводимость расширить до ляпуновской (или даже слабо-ляпуновской, что в данном контексте одно и то же) и даже если про исходную систему заранее известно, что она отвечает уравнению, – это и утверждает

Теорема 3. *При каждом* $n>2$ *существует периодическое уравнение* $A\in\mathcal{E}^n\cap\mathcal{P}^n$, *не приводимое ляпуновски ни к какому автономному уравнению* $B\in\mathcal{E}^n\cap\mathcal{C}^n$.

Возможности асимптотической приводимости периодических систем к уравнениям оказываются ещё более скромными, как показывает

Теорема 4. *При каждом* $n>1$ *существует периодическая система* $A\in\mathcal{P}^n$, *не приводимая асимптотически ни к какому уравнению* $B\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$.

Использование же обобщённо-ляпуновской приводимости вместо ляпуновской, наоборот, полностью снимает ограничение, обусловленное теоремой 3, о чем и говорит

Теорема 5. *Всякое периодическая система* $A\in\mathcal{P}^n$ *приводима обобщённо-ляпуновски к некоторому автономному уравнению* $B\in\mathcal{E}^n\cap\mathcal{C}^n$.

Наряду с рассмотренными ранее действительными линейными системами и уравнениями, полезную роль могут сыграть их *комплексные* аналоги, множества которых (аналогичные введённым выше) будем обозначать теми же буквами, но другого начертания: $\mathscr{P}^n,\mathscr{C}^n,\mathscr{E}^n$ вместо прежних $\mathcal{P}^n,\mathcal{C}^n,\mathcal{E}^n$ соответственно. Кроме того, распространим определение 2 и на комплексные преобразования $L:\mathbb{R}_+\to\operatorname{Aut}\mathbb{C}^n$.

Описанный выше механизм приведения периодической системы к автономному уравнению, дававший сбои для некоторых действительных систем более чем 2-го порядка, в комплексном случае работает уже безотказно, что и демонстрирует

Теорема 6. *Всякая* T*-периодическая комплексная система* $A\in\mathscr{P}^n$ *приводима* T*-периодически к некоторому автономному комплексному уравнению* $B\in\mathscr{E}^n\cap\mathscr{C}^n$.

Все теоремы настоящего и двух предшествующих [3, 4] докладов доказаны в работе [6].

Литература. 1. Зайцев В.А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Ижевск. 2003. № 1. С. 31–62. 2. Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2009. № 3. С. 25–33. 3. Сергеев И.Н. О приводимости ограниченных и неограниченных линейных систем к линейным уравнениям // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 900–901. 4. Сергеев И.Н. О приводимости автономных линейных дифференциальных систем к автономным линейным уравнениям // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1574–1575. 5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 6. Сергеев И.Н. О приводимости линейных дифференциальных систем к линейным дифференциальным уравнениям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2019. № 3. С. 39–45.

И. В. Горючкина (Москва), **В. И. Драгович** (Белград, Сербия; Даллас, США) "Многоугольник Петровича и его применение к изучению подвижных особенностей обыкновенных дифференциальных уравнений" (17 апреля 2020 г.).

В обзоре [1] приведены интересные, но малоизвестные результаты сербского математика Михаило Петровича (1868–1943), ученика Шарля Эрмита и Эмиля Пикара.

В докторской диссертации М. Петровича [2] изложен новый метод – модификация метода многоугольника Ньютона–Пьюзо для изучения решений алгебраических дифференциальных уравнений. Изучаются условия, при которых решения имеют подвижные особые точки, являются однозначными, рациональными или эллиптическими функциями. Результаты М. Петровича, хорошо известные в начале прошлого века, почему-то не упоминались другими авторами [3–6], использовавшими впоследствии аналогичные геометрические построения.

Напомним, что алгебраическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$f(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0,\quad f(x,y,y',\dots,y^{(n)})\equiv\sum_{i=1}^{I}\varphi_i(x)y^{m_{0i}}(y')^{m_{1i}}\dots(y^{(n)})^{m_{ni}},\tag{1}$$

где числа $m_{0i},\dots,m_{ni}\geqslant 0$ – целые, а функции φ_i – алгебраические или аналитические. Метод Петровича состоит в следующем: для заданной неособой точки x_0 уравнения (1) каждому слагаемому с коэффициентом $\varphi_i(x_0) \neq 0$ ставится в соответствие точка $(M_i, N_i) \in \mathbb{R}^2$, где

$$M_i = m_{0i} + \ldots + m_{ni}, \quad N_i = 1m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + nm_{ni}. \tag{2}$$

Наибольшая часть границы выпуклой оболочки множества всех таких точек (возможно повторяющихся), являющаяся выпуклой вверх, называется *многоугольником Петровича.*

Генри Файн, современник М. Петровича, независимо от него, обобщив результаты [7, 8] для исследования формальных асимптотик решений алгебраических уравнений в нуле, предложил иную модификацию [9] метода многоугольника Ньютона–Пьюзо, которую затем в конце XX в. развивал Х. Кано [4, 10]. В методе Файна каждому слагаемому уравнения (1) вида

$$c_{ij}x^{l_{ij}}y^{m_{0i}}(y')^{m_{1i}}\ldots(y^{(n)})^{m_{ni}}, \quad c_{ij} \neq 0, \quad \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}x^{l_{ij}},$$

ставится в соответствие точка $(N_{ij}, M_i) \in \mathbb{R}^2$, где $N_{ij} = l_{ij} - N_i$, а числа M_i и N_i определяются по формулам (2). Наибольшая часть границы выпуклой оболочки множества всех таких точек, являющаяся выпуклой влево, называется *многоугольником Файна.*

Теорема 1 [1]. *Для любой неособой точки* x_0 *уравнения (1) многоугольник Петровича совпадает на координатной плоскости с повернутым на угол* 90° *по часовой стрелке многоугольником Файна для уравнения* $f(x + x_0, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Литература. 1. Dragović V., Goryuchkina I. Polygons of Petrović and Fine, algebraic ODEs, and contemporary mathematics // arXiv: 2019. 2. Petrowitch M. Thèses: Sur les zéro et les infinis des intégrales des équations différentielles algébraiques // Propositions données par la Faculté. Paris, 1894. 3. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л., 1941. 4. Cano J. On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux polygon construction to these equations // Analysis, 1993, V. 13. P. 103–119. 5. Grigor'ev D.Yu., Singer M.F. Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 327. № 1. P. 329–351. 6. Bruno A.D. Asymptotic behaviour and expansions of solutions of an ordinary differential equation // Russian Math. Surv. 2004. V. 59. № 3. P. 429–480. 7. Puiseux V. Recherches sur les fonctions algébriques // J. Math. Pures Appl. 1850. V. 15. P. 365–480. 8. Briot C., Bouquet J. Proprietes des fonctions definie par des equations differentielles // J. l'Ecole Polytechnique. 1856. V. 36. P. 133–198. 9. Fine H. On the functions defined by differential equations, with an extension of the Puiseux polygon construction to these equations // American J. Math. 1889. V. 11. № 4. P. 317–328. 10. Cano J. An extension of the Newton-Puisuex polygon construction to give solutions of Pfaffian forms // Annales de l'institut Fourier. 1993. V. 43. P. 125–142.

Д. Н. Тагирова (Москва) "Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей динамику фитопланктона" (17 апреля 2019 г.).

Рассмотрим задачу динамики фито- и зоопланктона [1], описываемую системой дифференциальных уравнений с параметрами

$$\dot{x} = -\varepsilon_1 x + \beta zy - \gamma_1 xy, \quad \dot{y} = -\varepsilon_2 y + \gamma_2 xy, \quad x + y + z = M. \tag{1}$$

В уравнениях (1)–(3) x, y – содержание азота в фито- и зоопланктоне, z – содержание неорганического азота, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – коэффициенты естественной смертности фито- и зоопланктона, γ_1, γ_2 – коэффициенты потребления фитопланктона и усвоения пищи зоопланктоном, β – интенсивность фотосинтеза, где $x, y, z \geqslant 0$, $M > 0$ и $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$.

Исключив из системы (1) переменную z, преобразуем её к виду

$$\dot{x} = -\varepsilon_1 x + M\beta y - \beta y^2 - xy(\gamma_1 + \beta), \quad \dot{y} = -\varepsilon_2 y + \gamma_2 xy. \tag{2}$$

и исследуем её положения равновесия. Обозначим $G = M\beta\gamma_2 - \varepsilon_2\beta - \varepsilon_2\gamma_1$, $D = G^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\beta\gamma_2$, $F_\pm = (G \pm \sqrt{D})/(2\beta\gamma_2) \neq 0$ ($F_\pm$ – одного знака), $N_\pm = -\varepsilon_1 - \beta F_\pm - \gamma_1 F_\pm$, $T_\pm = \mp\sqrt{D}F_\pm$.

Теорема. *Для системы (2) положение равновесия* $(0,0)$ *– устойчивый узел (вырожденный при* $\varepsilon_1=\varepsilon_2$*), причём если* $D<0$ *или если* $D>0$ *и* $F_\pm<0$*, то других особых точек нет, а если* $D>0$ *и* $F_\pm>0$*, то существуют ещё две особые точки* $B_\pm=(\varepsilon_2/\gamma_2,F_\pm)$ *соответственно следующего типа: седло при* $T_\pm>0$*, устойчивый узел при* $N_\pm^2+4T_\pm>0>T_\pm$*, устойчивый вырожденный узел при* $N_\pm^2+4T_\pm=0$ *и устойчивый фокус при* $N_\pm^2+4T_\pm<0$.

Замечание. Если $D=0$ и $G>0$, то система (2) имеет 2 положения равновесия: $(0,0)$ и $B_+=B_-=B$, причём последнее из них – неустойчивая особая точка сложного типа: хотя бы одна траектория стремится к ней при $t\to+\infty$ и хотя бы одна – при $t\to-\infty$.

Литература. 1. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов // Изд-во МГУ, 1993. С. 178–183.

А. Х. Сташ (Майкоп) “Свойства показателей колеблемости и частот Сергеева уравнения Хилла” (24 апреля 2020 г.).

Рассмотрим множество $\mathcal{E}^2$ линейных однородных уравнений второго порядка

$$\ddot y+a_1(t)\dot y+a_2(t)y=0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0;\infty),$$

задаваемых непрерывными ограниченными функциями $a\equiv(a_1,a_2):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^2$, с которыми их и будем в дальнейшем отождествлять. Обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$ множество всех ненулевых решений уравнения $a\in\mathcal{E}^2$ (звёздочкой помечаем линейное пространство с выколотым нулём).

Определение 1 [1–3]. Скажем, что в точке $t>0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения. Для момента $t>0$ и функции $y\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ через $\nu^\alpha(y,t)$ при $\alpha=-,\sim,0,+,*$ соответственно обозначим:

– число точек её *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

– число точек её *нестрогой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

– число её *нулей* на промежутке $(0,t]$;

– число её *корней* с учётом их *кратности* (т.е. в сумме с числом нулевых подряд идущих производных в тех же точках) на промежутке $(0,t]$;

– число её *гиперкратных корней* на промежутке $(0,t]$: при их подсчёте каждый некратный корень берётся ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз.

Затем для вектора $m\in\mathbb{R}^2_*$ и функции $\psi y\equiv(y,\dot y)$ обозначим $\nu^\alpha(y,m,t)\equiv\nu^\alpha(\langle\psi y,m\rangle,t)$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение.

Определение 2 (см. [1, 2], а также [4, 5]). *Верхние* и *нижние частоты Сергеева знаков, нулей* и *корней* решения $y\in\mathcal{S}_*(a)$ при $\gamma=-,0,+$ соответственно зададим формулами

$$\hat\nu^\gamma(y)\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,t),\quad \check\nu^\gamma(y)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,t).$$

В случае совпадения какой-либо верхней частоты решения y с одноимённой нижней будем называть её *точной* и обозначать $\nu^\gamma(y)$, а если для неё дополнительно выполняются ещё и равенства $\nu^-(y)=\nu^0(y)=\nu^+(y)$, то будем называть такую частоту *абсолютной.*

Определение 3 [3, 6]. *Верхние сильный* и *слабый показатели колеблемости* для *строгих* и *нестрогих знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* решения $y\in\mathcal{S}_*(a)$ при $\alpha=-,\sim,0,+,*$ соответственно зададим формулами

$$\hat\nu^\alpha_\bullet(y)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t),\quad \hat\nu^\alpha_\circ(y)\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t),\tag{1}$$

а *нижние* $\check\nu^\alpha_\bullet(y)$ и $\check\nu^\alpha_\circ(y)$ – теми же формулами (1), но с заменой в них верхних пределов нижними. При совпадении сильного или слабого верхнего показателя колеблемости решения y с одноимённым нижним будем называть их *точными* и обозначать $\nu^\alpha_\bullet(y)$ или $\nu^\alpha_\circ(y)$ соответственно, а при совпадении всех его показателей колеблемости – *абсолютными.*

Будем изучать *уравнения Хилла* $a\equiv(0,p)\in\mathcal{E}^2$ с непрерывными π*-периодическими* функциями $p:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$. Известно [1, 7, 8], что на множестве решений произвольного уравнения второго порядка все рассмотренные верхние (равно как и нижние) характеристики совпадают между собой, причём для решений некоторого уравнения $a \in \mathcal{E}^2$ верхние характеристики не совпадают с нижними. Однако такого несовпадения не бывает для решений уравнения Хилла.

Теорема 1. *Для любого уравнения Хилла* $(0,p) \in \mathcal{E}^2$ *частоты Сергеева и показатели колеблемости всех его ненулевых решений являются абсолютными и совпадают между собой.*

Частоту $\omega(p)$ *уравнения* Хилла $(0,p) \in \mathcal{E}^2$ определим как частоту нулей Сергеева произвольного его ненулевого решения. Если частота $\omega(p)$ уравнения Хилла – целое число, то о его мультипликаторах почти ничего определённого сказать нельзя – разве только, что они вещественны и имеют знак числа $(-1)^{\omega(p)}$. В противном же случае по частоте Сергеева мультипликаторы восстанавливаются однозначно, как показывает следующая

Теорема 2. *Если частота уравнения Хилла* $(0,p) \in \mathcal{E}^2$ *удовлетворяет условию* $\omega(p) \notin \mathbb{Z}$, *то его мультипликаторы равны* $\mu_\pm = e^{\pm i\omega(p)\pi}$.

Будем рассматривать перечисленные выше характеристики колеблемости как функционалы на линейном топологическом пространстве $a \in \mathcal{E}^2$ с естественными для функции линейными операциями и *равномерной* на $\mathbb{R}_+$ топологией. Каждая из этих характеристик является непрерывной на всём множестве $\mathcal{E}^2$ [1, 7, 8]. В связи с этим возникает вопрос: может ли частота уравнения Хилла в некоторых случаях совсем не меняться при произвольных достаточно малых возмущениях его коэффициента?

Определение 4 [9, § 11]. Будем называть частоту уравнения Хилла $(0,p) \in \mathcal{E}^2$ *устойчивой*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ и для любого уравнения Хилла $(0,q) \in \mathcal{E}^2$, удовлетворяющего оценке $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |q(t) - p(t)| < \varepsilon$, имеет место равенство $\omega(q) = \omega(p)$. В противном случае будем называть частоту уравнения Хилла *неустойчивой.*

Теорема 3. *Если частота уравнения Хилла иррациональна, то она неустойчива.*

Теорема 4. *Если частота уравнения Хилла равна* s/k $(s \in \mathrm{N} \cup \{0\},\ k \in \mathbb{N})$, *а величина*

$$\int\limits_0^{\pi k} \frac{y\ddot{y}(t) - \dot{y}^2(t)}{y^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt - \pi s \tag{2}$$

для всех его ненулевых решений y *имеет один и тот же знак: либо неотрицательный, либо неположительный, – то эта частота неустойчива.*

Теорема 5. *Для того чтобы частота уравнения Хилла была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы она равнялась дроби* s/k $(s,k \in \mathbb{N})$ *и для некоторых его решений* $y = y_1$ *и* $y = y_2$ *величина (2) принимала разные знаки.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. 2. Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442. 3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. 4. Барабанов Е.А. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения 2016. Т. 52. № 10. С. 1302–1320. 5. Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425. 6. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения 2008. Т. 44. № 11. С. 1577. 7. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. № 6. С. 21–26. 8. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы// Известия РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172. 9. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.–Л.: Наука, 1964.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы” (24 апреля 2020 г.).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2019, том 55, № 6, с. 1–18

Для заданной *фазовой* области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$ рассмотрим *нелинейную*, вообще говоря, дифференциальную систему вида

$$\dot{x}=f(t,x),\quad f(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,\infty),\quad 0,x\in G, \tag{1}$$

допускающую *нулевое* решение и удовлетворяющую условиям $f,f'\in C(\mathbb{R}_+\times G)$ (обозначение $f\in C_G^{0,1}$). Через $x_f(\cdot,x_0)$ будем обозначать *непродолжаемое* решение системы (1) с начальным условием $x_f(0,x_0)=x_0$, т.е. решение задачи Коши

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x(0)=x_0, \tag{2}$$

а через $S_*(f)$ – множество всех ненулевых решений системы (1).

Определение 1. Перечислим три основных [1] *функционала* $\mathrm{K}(u,t)$ (определённых на парах $u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^n$ и $t\in\mathbb{R}_+$), соответствующих показателям

$$\varkappa=\nu,\theta,\rho \tag{3}$$

и отвечающих за следующие свойства решений:

1) *колеблемость* $(\varkappa=\nu)$, если $\mathrm{K}(u,t)=\mathrm{N}(u,t)$ – умноженное на π число нулей на промежутке $(0,t]$ функции P_1u, а P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую, причём если хотя бы один из этих нулей *кратен* (т.е. является нулем ещё и производной $(P_1u)^{\cdot}$), то считаем $\mathrm{N}(u,t)=\infty$;

2) *вращаемость* (*ориентированная*, $\varkappa=\theta$), если $\mathrm{K}(u,t)=\Theta(u,t)\equiv|\varphi(P_2u,t)|$ – модуль ориентированного угла $\varphi(P_2u,t)$ (непрерывного по t, с начальным условием $\varphi(P_2u,0)=0$) между вектором $P_2u(t)$ и начальным вектором $P_2u(0)$, а P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость, причём если $P_2u(\tau)=0$ хотя бы при одном $\tau\in[0,t]$, то считаем $\Theta(u,t)=\infty$;

3) *блуждаемость* $(\varkappa=\rho)$, если

$$\mathrm{K}(u,t)=\mathrm{P}(u,t)\equiv\int_0^t|(u(\tau)/|u(\tau)|)^{\cdot}|\,d\tau,\quad u(\tau)\neq0,\quad \tau\in[0,t].$$

Известны и другие функционалы подобного рода, отвечающие за *неориентированную* или *частотную вращаемость* $(\varkappa=\omega,\gamma$ [1]), *поворачиваемость* k*-го ранга* $(\varkappa=\rho_k$ [2]), а также *плоскую вращаемость* $(\varkappa=\psi$ [3]).

Определение 2. Для каждого из функционалов, описанных в определении 1, определим соответствующие *показатели* (3) решения $x\in S_*(f)$ при условии, что оно определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$: *слабый* и *сильный нижние* – по формулам

$$\check{\varkappa}^{\circ}(x)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n}\mathrm{K}(Lx,t),\quad \check{\varkappa}^{\bullet}(x)\equiv\inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n}\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathrm{K}(Lx,t),$$

а также *слабый* $\hat{\varkappa}^{\circ}(x)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}^{\bullet}(x)$ *верхние* соответственно – по тем же формулам, но с заменой в них нижних пределов при $t\to\infty$ верхними. В случае совпадения значений нижнего и верхнего показателей будем называть их *точными* и опускать в их обозначении любую тильду, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей будем называть их *абсолютными* и опускать в их обозначении любой кружочек.

При исследовании колеблемости, вращаемости и блуждаемости ненулевых решений нелинейной системы (1) может случиться, что некоторые из них (не исключено даже, что все вообще) определены не на всей временно́й полуоси из-за выхода соответствующих им фазовых кривых за конечное время на границу фазовой области. Один из возможных вариантов решения этой проблемы состоит в переходе от исходной системы к сферической, а от исходных решений к соответствующим задачам Коши.

Определение 3. По заданной системе (1) построим *сферическую* систему того же вида, в правой части которой стоит измененная (без радиальной составляющей) вектор-функция

$$f_s(t,x)\equiv P_x^{\perp}\cdot f(t,x),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad x\in G,$$

где $P_x^\perp$ – ортогональный проектор на гиперплоскость, ортогональную вектору $x \in \mathbb{R}^n$. Затем каждому из трёх функционалов K, описанных в определении 1, начальному значению $x_0 \in G$, моменту $t \in \mathbb{R}_+$ и невырожденному преобразованию $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значение *сферического* функционала $\mathrm{K} \equiv \mathrm{K}_s$, определяемого равенством

$$\mathrm{K}_s(x_0, f, t, L) = \mathrm{K}(Lx_{f_s}(\cdot, x_0), t)$$

и *расширенного*, т.е. принимающего значение ∞ всякий раз, когда решение $x_f(\cdot, x_0)$ определено не на всём отрезке $[0, t]$. Далее, по полученным сферическим функционалам определим соответствующие *сферические* показатели (3) задачи Коши (2): *слабый* и *сильный нижние* – по формулам

$$\check{\varkappa}_s^\circ(x_0, f) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \mathrm{K}_s(x_0, f, t, L), \quad \check{\varkappa}_s^\bullet(x_0, f) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathrm{K}_s(x_0, f, t, L),$$

и наконец, *слабый* $\hat{\varkappa}_s^\circ(x_0, f)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}_s^\bullet(x_0, f)$ *верхние*, а также *точные* и *абсолютные* их разновидности – аналогично, по той же схеме, что и в определении 2.

Переход от исходной системы к сферической на первый взгляд может показаться совершенно искусственным, однако в линейном случае его в определённом смысле оправдывает

Теорема 1. *Если система (1) – линейная однородная и $G = \mathbb{R}^n$, то для любого решения $x \in S_*(f)$, любого функционала из определения 1 и соответствующего сферического функционала из определения 3 выполнены равенства*

$$\mathrm{K}_s(x(0), f, t, L) = \mathrm{K}(Lx, t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n,$$

а для соответствующих показателей (3) из определений 2 и 3 выполнены равенства

$$\tilde{\varkappa}_s^*(x(0), f) = \tilde{\varkappa}^*(x), \quad \sim\, = \,\check{}\,, \hat{}\,, \quad * = \circ, \bullet.$$

Различные сферические показатели оказываются не более упорядоченными между собой, чем исходные их варианты [4], как показывает

Теорема 2. *Если какое-либо соотношение (равенство или неравенство) между различными показателями из определения 2 нарушается для некоторого решения некоторой линейной однородной системы (1), то это же соотношение между соответствующими сферическими показателями из определения 3 также будет нарушаться для некоторой задачи Коши той же системы.*

Для нелинейных же систем связи между различными показателями и их сферическими аналогами почти непредсказуемы, что и подтверждают

Теорема 3. *При $n = 2$ существует такая система (1) с фазовой областью $G = \mathbb{R}^2$, что каждое её решение $x \in S_*(f)$ определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, причём для него все значения всех показателей (3) из определений 2 и 3 точны, абсолютны и удовлетворяют соотношениям*

$$\varkappa_s(x(0), f) = |x(0)| > \varkappa(x) = 0.$$

Теорема 4. *При $n = 2$ существует такая система (1) с фазовой областью $G = \mathbb{R}^2$, что каждое её решение $x \in S_*(f)$ определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, причём для него все значения всех показателей (3) из определений 2 и 3 точны, абсолютны и удовлетворяют соотношениям*

$$\varkappa_s(x(0), f) = |x(0)| < \varkappa(x) = \infty.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 2. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 3. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 4. Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 2015. Вып. 2(46). С. 171–183.